CENGAGE Learning®

MECÁNICA DE FLUÍDOS

cuarta edición

MERLE C. POTTER
DAVID C. WIGGERT
BASSEM H. RAMADAN

Mecánica de fluidos

Mecánica de fluidos

Cuarta edición

Merle C. Potter
Michigan State University

David C. Wiggert
Michigan State University

Bassem Ramadan
Kettering University

con

Tom I-P. Shih
Purdue University

Traducción:
Ing. Jorge Humberto Romo Muñoz
Traductor profesional

Revisión Técnica:
Ing. Javier León Cárdenas
Profesor de Ciencias Básicas
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Mecánica de fluidos
Cuarta edición
Merle C. Potter
David C. Wiggert
Bassem Ramadan

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial en Español para Latinoamérica
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura
Rafael Pérez González

Editor
Sergio R. Cervantes González

Diseño de portada
Anneli Daniela Torres Arroyo

Imágenes de portada
© Paulo Manuel Furtado Pires/ Dreamstime

Composición tipográfica
Gerardo Larios García

© D.R. 2015 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *Mechanics of Fluids*
Fourth edition
Merle C. Potter
David C. Wiggert
Bassem Ramadan

Publicado en inglés por Cengage Learning © 2012

ISBN 13: 978-0-495-66773-5

Datos para catalogación bibliográfica:
Potter, Merle C., David C. Wiggert y Bassem Ramadan
Mecánica de fluidos
ISBN 13: 978-607-519-459-2

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 17 16 15 14

Contenido

CAPÍTULO 1
CONSIDERACIONES BÁSICAS **3**

1.1 Introducción 4
1.2 Dimensiones, unidades y cantidades físicas 4
1.3 Concepto de medio continuo de gases y líquidos 8
1.4 Escalas de presión y temperatura 11
1.5 Propiedades de los fluidos 14
1.6 Leyes de conservación 23
1.7 Propiedades y relaciones termodinámicas 24
1.8 Resumen 30
Problemas 32

CAPÍTULO 2
ESTÁTICA DE FLUIDOS **39**

2.1 Introducción 40
2.2 Presión en un punto 40
2.3 Variación de la presión 41
2.4 Fluidos en reposo 43
2.5 Recipientes linealmente acelerados 67
2.6 Recipientes giratorios 69
2.7 Resumen 72
Problemas 74

CAPÍTULO 3
INTRODUCCIÓN AL MOVIMIENTO DE FLUIDOS **87**

3.1 Introducción 88
3.2 Descripción del movimiento de fluidos 88
3.3 Clasificación de los flujos de fluidos 100
3.4 La ecuación de Bernoulli 107
3.5 Resumen 116
Problemas 117

CAPÍTULO 4
FORMAS INTEGRALES DE LAS
LEYES FUNDAMENTALES **127**

4.1 Introducción 128
4.2 Las tres leyes básicas 128
4.3 Transformación de un sistema a un volumen de control 132

4.4 Conservación de la masa 137
4.5 Ecuación de la energía 144
4.6 Ecuación de la cantidad de movimiento 157
4.7 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento 176
4.8 Resumen 179
Problemas 182

CAPÍTULO 5
FORMAS DIFERENCIALES DE LAS LEYES FUNDAMENTALES **203**

5.1 Introducción 204
5.2 Ecuación diferencial de continuidad 205
5.3 Ecuación diferencial de la cantidad de movimiento 210
5.4 Ecuación diferencial de la energía 223
5.5 Resumen 229
Problemas 231

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD **237**

6.1 Introducción 238
6.2 Análisis dimensional 239
6.3 Similitud 248
6.4 Ecuaciones diferenciales normalizadas 258
6.5 Resumen 262
Problemas 263

CAPÍTULO 7
FLUJOS INTERNOS **271**

7.1 Introducción 272
7.2 Flujo de entrada y flujo desarrollado 272
7.3 Flujo laminar en un tubo 274
7.4 Flujo laminar entre placas paralelas 281
7.5 Flujo laminar entre cilindros giratorios 288
7.6 Flujo turbulento en un tubo 292
7.7 Flujo uniforme turbulento en canales abiertos 325
7.8 Resumen 329
Problemas 331

CAPÍTULO 8
FLUJOS EXTERNOS **345**

8.1 Introducción 346
8.2 Separación 350
8.3 Flujo alrededor de cuerpos sumergidos 352
8.4 Sustentación y resistencia al avance en superficies aerodinámicas 367
8.5 Teoría del flujo potencial 372
8.6 Teoría de la capa límite 385
8.7 Resumen 409
Problemas 411

CAPÍTULO 9
FLUJO COMPRESIBLE **425**

9.1 Introducción 426
9.2 Velocidad del sonido y el número de Mach 427
9.3 Flujo isentrópico a través de una tobera 431
9.4 Onda de choque normal 442
9.5 Ondas de choque en toberas convergentes-divergentes 449
9.6 Flujo de vapor a través de una tobera 454
9.7 Onda de choque oblicua 456
9.8 Ondas isentrópicas de expansión 461
9.9 Resumen 465
Problemas 466

CAPÍTULO 10
FLUJO EN CANALES ABIERTOS **473**

10.1 Introducción 474
10.2 Flujos en canales abiertos 475
10.3 Flujo uniforme 478
10.4 Conceptos de energía 484
10.5 Conceptos de la cantidad de movimiento 498
10.6 Flujo no uniforme gradualmente variado 510
10.7 Análisis numérico de perfiles de superficies de agua 518
10.8 Resumen 528
Problemas 529

CAPÍTULO 11
FLUJOS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS **543**

11.1 Introducción 544
11.2 Pérdidas en sistemas de tuberías 544
11.3 Sistemas de tuberías simples 550
11.4 Análisis de redes de tuberías 561
11.5 Flujo no permanente en tuberías 574
11.6 Resumen 582
Problemas 583

CAPÍTULO 12
TURBOMAQUINARIA **599**

12.1 Introducción 600
12.2 Turbobombas 600
12.3 Análisis y similitud dimensional para turbomaquinaria 617
12.4 Uso de turbobombas en sistemas de tuberías 626
12.5 Turbinas 632
12.6 Resumen 647
Problemas 648

CAPÍTULO 13
MEDICIONES EN MECÁNICA DE FLUIDOS **655**

13.1 Introducción 656
13.2 Medición de parámetros de flujo local 656
13.3 Medición del gasto 664
13.4 Visualización del flujo 673
13.5 Adquisición y análisis de datos 681
13.6 Resumen 693
Problemas 693

CAPÍTULO 14
DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL **697**

14.1 Introducción 698
14.2 Ejemplos de métodos de diferencia finita 699
14.3 Estabilidad, convergencia y error 710
14.4 Solución del flujo de Couette 717
14.5 Solución de flujo potencial de estado permanente bidimensional 721
14.6 Resumen 726
Bibliografía 728
Problemas 729

APÉNDICE **733**

A. Unidades y conversiones en relaciones vectoriales 733
B. Propiedades de fluidos 735
C. Propiedades de áreas y volúmenes 741
D. Tablas para flujo compresible de aire 742
E. Soluciones numéricas del capítulo 10 751
F. Soluciones numéricas del capítulo 11 758

BIBLIOGRAFÍA **773**

Referencias 773
Interés general 774

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS **776**
ÍNDICE **785**

Prefacio

La motivación para escribir un libro es difícil de describir. Con mucha frecuencia los autores sugieren que los otros textos sobre la materia tienen ciertas deficiencias que ellos corregirán, por ejemplo una descripción precisa de flujos de entrada y de flujos alrededor de objetos desafilados, la diferencia entre flujo en una dimensión y un flujo uniforme, la correcta presentación de la derivación de un volumen de control, o una definición de flujo laminar que sea lógica. Los nuevos autores, por supuesto, ¡introducen otras deficiencias que futuros autores esperan corregir! Y la vida continúa. Éste es otro libro sobre fluidos que ha sido escrito con la esperanza de presentar un punto de vista mejorado de la mecánica de fluidos para que el estudiante de licenciatura pueda entender los conceptos físicos y siga las matemáticas. Esto no es una tarea fácil: la mecánica de fluidos es un tema que contiene muchos fenómenos difíciles de entender. Por ejemplo, ¿cómo se explicaría el agujero hecho en la arena por el agua en el lado de corriente arriba de un contrafuerte o estribo? ¿O la elevada concentración de esmog en la zona de Los Ángeles (no existe el mismo nivel en Nueva York)? ¿O el inesperado y fuerte viento alrededor de la esquina de un edificio alto en Chicago? ¿O la vibración y subsiguiente colapso de un gran puente de acero y concreto debido al viento? ¿O los vórtices de salida observados detrás de un enorme avión comercial? Hemos tratado de presentar la mecánica de fluidos de modo que el estudiante pueda entender y analizar muchos de los importantes fenómenos encontrados por el ingeniero.

El nivel matemático de este libro está basado en cursos previos de matemáticas requeridos en todos los currículos de ingeniería. Usamos soluciones para ecuaciones diferenciales y álgebra vectorial. Aplicamos un poco de cálculo vectorial con el uso del operador gradiente, pero se mantiene al mínimo puesto que tiende a ocultar la física involucrada.

Numerosos textos conocidos sobre mecánica de fluidos no han presentado los flujos de fluidos como campos, es decir, han presentado principalmente los flujos que pueden ser aproximados como flujos en una dimensión y han tratado otros flujos usando datos experimentales. Debemos reconocer que cuando un fluido fluye alrededor de un objeto, por ejemplo un edificio o un contrafuerte, su velocidad posee las tres componentes que dependen de las tres variables espaciales y, con frecuencia, del tiempo. Si presentamos las ecuaciones que describen tal flujo general, las ecuaciones se conocen como ecuaciones de campo, y los campos de velocidad y presión son entonces de interés. Esto es muy seme-

jante a los campos eléctrico y magnético en ingeniería eléctrica. Para que los ingenieros analicen los difíciles problemas del futuro, tales como la contaminación ambiental a gran escala, es imperativo que entendamos los campos de fluidos. Así pues, en el capítulo 5 introducimos las ecuaciones de campo y exponemos varias soluciones para algunas geometrías relativamente simples. Presentamos la forma más convencional de tratar los flujos individualmente como ruta alterna para quienes desean este método más estándar. Luego las ecuaciones de campo pueden incluirse en un curso posterior.

Quizás una lista de las adiciones hechas en esta cuarta edición sea de interés. Hemos:

- Incluido en http://latam.cengage.com/potter, el material contenido en la segunda edición de un DVD titulado "Multimedia Fluid Mechanics," de G. M. Homsy, distribuida por la Cambridge University Press. Varias demostraciones y laboratorios virtuales se han identificado en diversos lugares en el texto.
- Agregado muchos ejemplos y problemas, la mayoría tiene aplicaciones en la vida real.
- Colectado todos los problemas de opción múltiple al principio de los conjuntos de problemas. Pueden usarse para repasar la materia de Mecánica de Fluidos para los exámenes de Fundamentos de Ingeniería y de Ingeniería así como para el examen requerido para estudios de posgrado (GRE).
- Eliminado el capítulo sobre mecánica de fluidos ambiental en un intento por acortar el libro.
- Simplificado el capítulo sobre mecánica de fluidos computacional.
- Hecho numerosos cambios para aclarar la presentación.

El material de introducción incluido en los capítulos 1 a 9 ha sido seleccionado cuidadosamente para introducir al estudiante en todos los campos fundamentales de la mecánica de fluidos. No todo el material de cada capítulo tiene que ser estudiado en un curso introductorio. El profesor puede ajustar el material al perfil de un curso seleccionado. Algunas secciones al final de cada capítulo pueden ser omitidas sin pérdida de continuidad en capítulos posteriores. De hecho, el capítulo 5 puede ser omitido en su totalidad si se decide excluir las ecuaciones de campo en el curso introductorio, decisión que es relativamente común. Ese capítulo puede entonces incluirse en un curso intermedio de mecánica de fluidos. Después que ha sido presentado el material de introducción, hay suficiente material para presentar en uno o dos cursos adicionales. Este curso o cursos adicionales podrían incluir material que se hubiera omitido en el curso introductorio y en combinaciones de material de los más especializados capítulos del 9 al 14. Mucho del material es de interés para todos los ingenieros, aun cuando varios capítulos sean de interés sólo para disciplinas en particular.

Hemos incluido ejemplos resueltos en detalle para ilustrar cada uno de los importantes conceptos presentados en el material del texto. Numerosos problemas básicos, muchos con múltiples partes para mejores asignaciones de tarea, dan al estudiante una gran oportunidad de adquirir experiencia para resolver problemas de varios niveles de dificultad. Las respuestas de los problemas de tarea seleccionados se presentan antes del índice. También hemos incluido problemas de tipo de diseño en varios de los capítulos. Después de estudiar el material, repasar los ejemplos y resolver varios de los problemas de tarea, los estudiantes deben adquirir la capacidad para solucionar muchos de los problemas que se encuentran en situaciones reales de ingeniería. Por supuesto, existen numerosas clases de problemas que son extremadamente difíciles de resolver, incluso para un ingeniero experimentado. Para resolver estos problemas más difíciles,

el ingeniero debe reunir considerablemente más información que la que se incluye en este texto introductorio. Existen, no obstante, muchos problemas que pueden solucionarse con éxito usando el material y los conceptos presentados aquí.

Muchos estudiantes toman el examen de Fundamentos de ingeniería/Ingeniero en capacitación (FE/EIT) al término de su último año universitario, el primer paso para convertirse en un ingeniero profesional. Los problemas del examen FE/EIT son de opción múltiple, de cuatro partes. En consecuencia, hemos incluido este tipo de problema al principio de los capítulos. Los problemas de opción múltiple se presentarán usando unidades SI puesto que el examen FE/EIT usa exclusivamente unidades SI. Puede obtenerse información adicional sobre el examen FE/EIT en el sitio web **ppi2pass.com**.

El libro está escrito haciendo hincapié en las unidades SI, pero todas las propiedades y constantes dimensionales también se dan en el sistema inglés. Aproximadamente un quinto de los ejemplos y problemas se presentan usando unidades inglesas.

Los autores están en deuda tanto con sus profesores anteriores como con sus colegas actuales. El capítulo 10 fue escrito con inspiración en el libro de F. M. Henderson titulado *Open Channel Flow* (1996), y D. Wood de la University of Kentucky nos animó para incorporar un amplio material sobre el análisis de redes de tuberías en el capítulo 11. Varias ilustraciones del capítulo 11 relacionadas con el fenómeno del ariete hidráulico fueron proporcionadas por C. S. Martin del Georgia Institute of Technology. R.D. Thorley proporcionó algunos de los problemas del final del capítulo 12. Tom Shih asistió en la redacción del capítulo 14 sobre Dinámica de fluidos computacional. Gracias a Richard Prevost por escribir las soluciones con MATLAB®. También nos gustaría agradecer a nuestros revisores: Sajjed Ahmed, University of Nevada; Mohamed Alawardy, Louisiana State University; John R. Biddle, California State Polytechnic University; Nancy Ma, North Carolina State University; Saeed Moaveni, Minnesota State University; Nikos J. Mourtos, San Jose (CA) State University; Julia Muccino, Arizona State University; Emmanuel U. Nzewi, North Carolina A&T State University; y Yiannis Ventikos, Swiss Federal Institute of Technology.

Merle C. Potter
David C. Wiggert
Bassem Ramadan

Multimedia Mecánica de Fluidos

Se han añadido al texto las siguientes entradas del DVD Multimedia de Mecánica de Fluidos. Son experimentos y demostraciones (en inglés) disponibles en línea en http://latam.cengage.com/potter. El instructor puede asignar, desde párrafos específicos del texto, archivos en este sitio. Además, el lector puede encontrar entradas seleccionadas que no figuran en base a un interés particular. Para ver un archivo en una página especificada, basta con abrir cualquiera de los ocho grandes rubros, a continuación, introduzca un número de página en el cuadro en la parte superior y haga clic en "ir a la página." Los números de página después de los descriptores se refieren a las páginas del material contenido en el DVD que encontrará en el sitio mencionado arriba.

Example 1.4a: Capillary Rise, 512
Example 4.7a: Pipe Flow Virtual Lab, 947–948
Example 4.11a: Pipe Elbow Example, 918–923
Example 4.12a: Fire Hose Example, 911–917
Example 4.19a: Pressure-Jet Virtual Lab, 932–935
Example 6.2a: Oscillations in a U-Tube, 547–550
Example 6.2b: Flow from a Tank, 555–558
Example 6.2c: Geometric and Dynamic Similarity, 542–543
Example 7.5a: Taylor Cells, page 24
Example 7.8a: Turbulent Boundary-Layer Lab, 858–860
Example 8.1a: Forces on an Airfoil Example, 924–931
Example 8.2a: Cylinder-Wake Virtual Lab, 936–938
Example 8.3a: Example of Vortex Shedding, 195–197
Example 8.12a: Potential-Flow Virtual Lab, page 295
Example 8.13a: Viscous Layer Growth, 619–621
Example 8.14a: Profiles in a Turbulent Plume, 861–864

Example 8.17a: Laminar Boundary-Layer Growth, 625–627
Problem 8.14: Flow Past a Sphere, 5
Below Fig. 3.13: Taylor Cells, 24
In margin, p.105: Reynolds Number, 524
In margin, p.105: Pipe Flow, 202
In margin, p.380: A Doublet, 281
In margin, p.239: Dimensional Analysis, 588
In margin, p.242: Dimensional Analysis, 521–523
In margin, p.246: Dimensionless Numbers, 524–528
In margin, p.249: Dynamic Similarity, 195
In margin, p.250: Similarity and Scaling, 494, 534, 535, 568
In margin, p.274: Laminar Flow in a Pipe, 686
In margin, p.288: Flow between Cylinders, 735
In margin, p.293: Reynolds Decompostion, 689
In margin, p.295: Turbulent Flow in a Pipe, 687
In margin, p.347: Flow Past a Cylinder, 116, 131, 190
In margin, p.347: Flow over an Airfoil, 649
In margin, p.349: Separated Flow over an Airfoil, 167
In margin, p.350: Separated Flow past Sharp Edges, 662, 664, 666
In margin, p.353: Flow around Immersed Bodies, 652, 657, 694
In margin, p.355: Drag Curve for a Golf Ball, 265
In margin, p.359: Vortex Shedding, 81, 216
In margin, p.362: Streamlining, 651
In margin, p.370: Trailing Vortex, 725, 577
In margin, p.373: Potential Flows, 123, 271
In margin, p.378: Simple Potential Flows, 277
In margin, p.387: Boundary Layers, 163, 260, 602, 622, 677, 852
In margin, p.426: Compressible Flows, 50
In margin, p.347: Speed of Sound, 57
In margin, p.754: CFD Solutions, 669–672, 807, 821

Nomenclatura

para referencia rápida

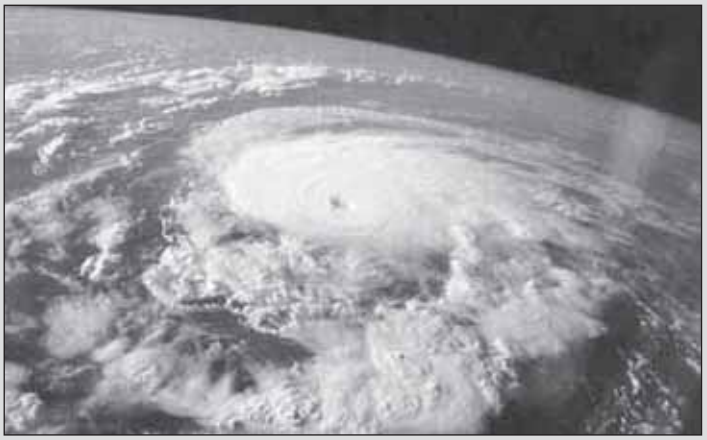
A - área
A_2, A_3 - tipo de perfil
a - aceleración, rapidez de una onda de presión
a - vector de aceleración
a_x, a_y, a_z - componentes de la aceleración
B - módulo de compresibilidad de la elasticidad, ancho de la superficie libre
b - ancho del fondo del canal
C - centroide, coeficiente de Chezy, coeficiente de Hazen-Williams
C_1, C_3 - tipo de perfil
C_D - coeficiente de arrastre
C_d - coeficiente de descarga
C_f - coeficiente de fricción superficial
C_H - coeficiente de pérdida
C_L - coeficiente de sustentación
C_P - factor de recuperación de presión, coeficiente de presión
C_{NPSH} - coeficiente de carga de succión neta positiva
C_Q - coeficiente de caudal
C_V - cociente de velocidad
$C_{\dot{W}}$ - coeficiente de potencia
c - calor específico, velocidad del sonido, longitud de la cuerda, celeridad
c_f -coeficiente de fricción superficial local
c_p - calor específico a presión constante
c_v - calor específico a volumen constante
c.s. - superficie de control
c.v. - volumen de control
D - diámetro
$\frac{D}{Dt}$ - derivada sustancial
d - diámetro
dx - diferencial de distancia
$d\theta$ -diferencial de ángulo
E - coeficiente de energía, energía específica
E_c - energía crítica
EGL - línea de referencia de energía
Eu - número de Euler
e - el exponencial, energía específica, altura de la rugosidad de la pared, espesor de la pared de la tubería

exp - el exponencial e
F - vector de fuerza
F - fuerza
F_B - fuerza de flotación
F_H - componente horizontal de la fuerza
F_V - componente de fuerza vertical
F_W - fuerza del cuerpo igual al peso
f - factor de fricción, frecuencia
G - centro de gravedad
$\overline{GM}$ - altura metacéntrica
g - vector de gravedad
g - gravedad
H - entalpía, altura, energía total
H_2, H_3 - tipo de perfil
H_D - carga de diseño
H_P - carga de bomba
H_T - carga de la turbina
HGL - línea de referencia hidráulica
h - distancia, altura, entalpía específica
h_j - pérdida de carga a través de un salto hidráulico
I - segundo momento de un área
$\bar{I}$ - segundo momento alrededor del eje centroidal
I_{xy} - producto de inercia
$\hat{\mathbf{i}}$ - vector unitario en la dirección x
$\hat{\mathbf{j}}$ - vector unitario en la dirección y
$\hat{\mathbf{k}}$ - vector unitario en la dirección z
K - conductividad térmica, coeficiente de caudal
K_c - coeficiente de contracción
K_e - coeficiente de expansión
K_{uv} - coeficiente de correlación
k - relación de calores específicos
L - longitud
L_E - longitud de entrada
L_e - longitud equivalente
ℓ - longitud
ℓ_m - longitud de mezclado
M - masa molar, número de Mach, función de impulso
M - número de Mach
M_1, M_2, M_3 - tipo de perfil
m - masa, pendiente de la pared lateral, constante de ajuste de la curva
$\dot{m}$ - flujo de masa
$\dot{m}_r$ - flujo de masa relativo
m_a - masa añadida
m_1, m_2 - pendientes de pared lateral
$m\dot{o}m$ - momento de flujo
N - propiedad extensiva en general, número entero, número de chorros
$NPSH$ - altura de succión neta positiva
n - dirección normal, número de moles, exponente de ley de potencias, número de Manning
$\hat{\mathbf{n}}$ - vector normal unitario

P - potencia, fuerza, perímetro mojado
p - presión
Q - velocidad de flujo (descarga), transferencia de calor
Q_D - descarga de diseño
$\dot{Q}$ - tasa de transferencia de calor
q - intensidad de la fuente, descarga específica, flujo de calor
R - radio, constante de los gases, radio hidráulico, radio de curvatura
Re - número de Reynolds
$\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}$ - número de Reynolds crítico
R_u - constante universal de los gases
R_x, R_y -componentes de fuerza
r - radio, coordenada variable
$\mathbf{r}$ - vector de posición
S - gravedad específica, entropía, distancia, pendiente del canal, pendiente de EGL
$\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$ - tipo de perfil
S_c - pendiente crítica
St - número Strouhal
$\mathbf{S}$ - vector de posición
S_0 - pendiente del fondo del canal
s - entropía específica, coordenadas de la línea de flujo
$\hat{\mathbf{s}}$ - vector unitario tangente para una línea de flujo
sys - sistema
T - temperatura, torque, tensión
t - tiempo, dirección tangencial
U - velocidad media
U_∞ - velocidad de corriente libre lejos de un cuerpo
u - componente x de la velocidad, velocidad de la cuchilla circunferencial
u' - perturbación de velocidad
$\tilde{u}$ - energía interna específica
$\overline{u}$ - tiempo promedio respecto a la velocidad
u_τ - velocidad de corte
V - velocidad
V_c - velocidad crítica
V_{ss} - velocidad de estado estacionario
$\mathbf{V}$ - vector de velocidad
$\overline{V}$ - velocidad media espacial
$\forbar{V}$ - volumen
V_B - velocidad de la cuchilla
V_n - componente normal de la velocidad
V_r - velocidad relativa
V_t - velocidad tangencial
v - velocidad, componente y de la velocidad
v' - perturbación de la velocidad
$v_r, v_z, v_\theta, v_\phi$ - componentes de la velocidad
W - trabajo, peso, cambio en la línea de referencia hidráulica
$\dot{W}$ - rapidez de trabajo (potencia)
$\dot{W}_f$ - potencia real
We - número de Weber
$\dot{W}_S$ - trabajo de eje (potencia)

ω - z- componente de velocidad, velocidad de un taladro hidráulico
X_T - distancia donde comienza la transición
x - coordenada variable
x_m - origen del sistema de referencia en movimiento
$\tilde{x}$ - distancia relativa a un sistema de referencia en movimiento
$\overline{x}$ - coordenada x del centroide
Y - altura del agua aguas arriba por encima de la parte superior de la presa
y - coordenadas variables, carga de flujo de energía
y_p - distancia al centro de la presión
$\overline{y}$ - coordenada y del centroide
y_c - profundidad crítica
z - coordenada variable
α - ángulo, ángulo de ataque, gradiente vertical, difusividad térmica, factor de corrección de energía cinética, ángulo de la hoja
β - ángulo, factor de corrección de movimiento, ángulo de chorro fijo, ángulo de la hoja
Δ - incremento pequeño
∇ - operador gradiente
∇^2 - Laplaciano
δ - espesor de la capa límite
$\delta(x)$ - Función de Dirac-delta
δ_d - espesor de desplazamiento
δ_ν - espesor de capa de la pared viscosa
ε - volumen pequeño
ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{xz} - componentes de la velocidad de deformación
ϕ - ángulo, coordenada variable, una función potencial de velocidad, factor de velocidad
Γ - circulación, fuerza de vórtice
γ - peso específico
η - propiedad intensiva general, viscosidad de remolino, eficiencia, variable de posición
η_P - eficiencia de la bomba
η_T - eficiencia de la turbina
λ - trayectoria media libre, longitud de onda constante
μ - viscosidad, magnitud de doblete
ν - viscosidad cinemática
π - término pi
θ - ángulo, espesor de impulso, ángulo del haz láser
ρ - densidad
Ω - velocidad angular
Ω_P - velocidad específica de una bomba
Ω_T - velocidad específica de una turbina
$\boldsymbol{\Omega}$ - vector de velocidad angular
σ - tensión superficial, número de cavitación, fuerza circunferencial
σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} - componentes normales de la fuerza
τ - vector de fuerza
$\overline{\tau}$ - fuerza promedio respecto al tiempo
τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} - componentes del esfuerzo cortante
ω - velocidad angular, vorticidad
$\boldsymbol{\omega}$ - vector de vorticidad
ψ - función de corriente
$\frac{\partial}{\partial x}$ - derivada parcial

Mecánica de fluidos



Izquierda: Se usan modernos molinos de viento para generar electricidad en numerosos lugares en Estados Unidos. Se localizan en regiones donde hay vientos constantes. (IRC/Shutterstock)

Arriba a la derecha: Huracán Bonnie en el Océano Atlántico, a unos 800 km de las Bermudas. En esta etapa de su desarrollo, la tormenta tiene un centro bien formado, llamado "ojo," donde las corrientes de aire están relativamente en calma. El movimiento semejante a una espiral está lejos del ojo. (U.S. National Aeronautics and Space Administration) **Abajo a la derecha:** El transbordador espacial *Discovery* despega del Centro Espacial Kennedy el 29 de octubre de 1988. En seis segundos, el vehículo pasa por encima de la torre de lanzamiento con una velocidad de 160 km/h, y en cerca de dos minutos estaba a 250 km del Centro Espacial, 47 km sobre el océano, con una velocidad de 6 150 km/h. Las alas y el timón de la cola son necesarios para regresar con éxito al ingresar a la atmósfera de la Tierra cuando complete su misión. (U.S. National Aeronautics and Space Administration)

1

Consideraciones básicas

Esquema

1.1 Introducción
1.2 Dimensiones, unidades y cantidades físicas
1.3 Concepto de medio continuo de gases y líquidos
1.4 Escalas de presión y temperatura
1.5 Propiedades de los fluidos
  1.5.1 Densidad y peso específico
  1.5.2 Viscosidad
  1.5.3 Compresibilidad
  1.5.4 Tensión superficial
  1.5.5 Presión de vapor
1.6 Leyes de conservación
1.7 Propiedades y relaciones termodinámicas
  1.7.1 Propiedades de un gas ideal
  1.7.2 Primera ley de la termodinámica
  1.7.3 Otras cantidades termodinámicas
1.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Introducir muchas de las cantidades que se encuentran en mecánica de fluidos, incluyendo sus dimensiones y unidades.
- Identificar los líquidos a ser considerados en este texto.
- Introducir las propiedades de interés de un fluido.
- Presentar las leyes de la termodinámica y sus cantidades asociadas.

1.1 INTRODUCCIÓN

Una comprensión adecuada de la mecánica de fluidos es muy importante en numerosos campos de la ingeniería. En biomecánica el movimiento de la sangre y del fluido cerebral son de particular interés; en meteorología e ingeniería oceánica una comprensión de los movimientos del aire y de las corrientes oceánicas requiere del conocimiento de la mecánica de fluidos; los ingenieros químicos deben entender la mecánica de fluidos para diseñar las numerosas y diferentes clases de equipo de procesamiento químico; los ingenieros en aeronáutica usan su conocimiento de fluidos para incrementar al máximo la sustentación y reducir al mínimo la resistencia al avance en aviones y para diseñar motores de reacción; los ingenieros mecánicos diseñan bombas, turbinas, motores de combustión interna, compresores de aire, equipo de acondicionamiento de aire, equipo para control de contaminación y plantas generadores de energía eléctrica usando un apropiado conocimiento de la mecánica de fluidos; los ingenieros civiles también deben utilizar los resultados obtenidos de un estudio de mecánica de fluidos para entender el transporte de sedimento y la erosión en un río, la contaminación del aire y el agua, así como para diseñar sistemas de tuberías, plantas de tratamiento de aguas residuales, canales de irrigación, sistemas de control de inundaciones, represas y estadios deportivos cubiertos.

CONCEPTO CLAVE *Se presentarán los fundamentos de fluidos para que los ingenieros puedan entender el papel que un fluido desempeña en aplicaciones particulares.*

No es posible presentar la mecánica de fluidos en forma tal que todos los temas anteriores se puedan tratar específicamente; es posible, sin embargo, presentar los fundamentos de la mecánica de fluidos de manera que los ingenieros puedan entender la función que el fluido desempeña en una aplicación en particular. Esta función puede comprender el tamaño adecuado de una bomba (la potencia y gasto) o el cálculo de una fuerza que actúa sobre una estructura.

En este libro se presentan las ecuaciones generales, integrales y diferenciales, que resultan del principio de la conservación de la masa, de la segunda ley de Newton, y de la primera ley de la termodinámica. A partir de éstas, serán consideradas varias situaciones que son de especial interés. Después de estudiar este libro, el ingeniero podrá aplicar los principios básicos de la mecánica de fluidos a situaciones nuevas y diferentes.

En este capítulo se presentan temas que son directa o indirectamente relevantes para todos los capítulos subsiguientes. Se incluye una descripción macroscópica de fluidos, propiedades de fluidos, leyes físicas que dominan la mecánica de fluidos, así como un resumen de unidades y dimensiones de cantidades físicas importantes. Antes de que se puedan analizar las cantidades de interés, se deben presentar las unidades y dimensiones que se utilizarán en el estudio de la mecánica de fluidos.

1.2 DIMENSIONES, UNIDADES Y CANTIDADES FÍSICAS

Antes de empezar un estudio más detallado de la mecánica de fluidos, se analizarán las dimensiones y unidades que se usarán en todo el libro. Las cantidades físicas requieren descripciones cuantitativas cuando se resuelve un problema de ingeniería. La densidad es una de tales cantidades físicas. Es una medida de la masa contenida en un volumen unitario, pero la densidad no representa una dimensión fundamental. Hay nueve cantidades que son consideradas dimensiones fundamentales: longitud, masa, tiempo, temperatura, cantidad de una sustancia, corriente eléctrica, intensidad luminosa, ángulo plano y ángulo sólido. Las dimensiones de todas las otras cantidades se pueden expresar en términos de las dimensiones fundamentales. Por ejemplo, la cantidad “fuerza” se puede relacionar con las dimensiones funda-

mentales de masa, longitud y tiempo. Para hacer esto, usamos la segunda ley de Newton, llamada así en honor de Sir Isaac Newton (1642-1727), expresada en forma simplificada en una dirección como

$$F = ma \tag{1.2.1}$$

Usando corchetes para denotar "la dimensión de," esto se escribe dimensionalmente como

$$\begin{aligned} [F] &= [m][a] \\ F &= M\frac{L}{T^2} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

donde F, M, L y T son las dimensiones de fuerza, masa, longitud y tiempo, respectivamente. Si la fuerza se hubiera seleccionado como una dimensión fundamental en lugar de la masa, una alternativa común, la masa tendría dimensiones de

$$\begin{aligned} [m] &= \frac{[F]}{[a]} \\ M &= \frac{FT^2}{L} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

donde F es la dimensión[1] de fuerza.

También hay sistemas de dimensiones en los que tanto la fuerza como la masa se seleccionan como dimensiones fundamentales. En tales sistemas se requieren factores de conversión, como una constante gravitacional; en este libro no se consideran estos tipos de sistemas, de modo que no se estudiarán.

Para dar un valor numérico a las dimensiones de una cantidad, debe seleccionarse un conjunto de unidades. En Estados Unidos, actualmente se usan dos sistemas primarios de unidades, el Sistema Gravitacional Inglés al que nos vamos a referir como unidades inglesas, y el Sistema Internacional, que se citará aquí como unidades del SI (Système International). Se prefieren y usan internacionalmente las unidades del SI; Estados Unidos es el único país importante que no requiere el uso de unidades del SI, pero ahora hay un programa de conversión en casi todas las industrias al uso predominante de unidades del SI. Siguiendo esta tendencia, hemos utilizado principalmente unidades del SI, pero como todavía están en uso unidades inglesas, también se presentan algunos ejemplos y problemas en estas unidades.

CONCEPTO CLAVE *Se prefieren unidades del SI y se usan internacionalmente.*

Las dimensiones fundamentales y sus unidades se presentan en la tabla 1.1; algunas unidades derivadas apropiadas a la mecánica de fluidos se dan en la tabla 1.2. Otras unidades aceptables son la hectárea (ha), que es igual a 10 000 m^2, que se usa para áreas grandes; la tonelada métrica (t), que equivale a 1000 kg, que se usa para masas grandes; y el litro (L), que es igual a 0.001 m^3. También, ocasionalmente se expresa la densidad como gramos por litro (g/L).

En cálculos químicos el mol es con frecuencia una unidad más conveniente que el kilogramo. En algunos casos también es útil en la mecánica de fluidos. Para ga-

[1]Desafortunadamente, la cantidad de fuerza F y la dimensión de la fuerza $[F]$ usan el mismo símbolo.

Tabla 1.1 Dimensiones fundamentales y sus unidades

Cantidad	*Dimensiones*	*Unidades del SI*		*Unidades inglesas*	
Longitud l	L	metro	m	pie	ft
Masa m	M	kilogramo	kg	slug	slug
Tiempo t	T	segundo	s	segundo	s
Corriente eléctrica i		ampere	A	ampere	A
Temperatura T	Θ	kelvin	K	Rankine	°R
Cantidad de sustancia	M	kg-mol	kmol	lb-mol	lbmol
Intensidad luminosa		candela	cd	candela	cd
Ángulo plano		radián	rad	radián	rad
Ángulo sólido		estereorradián	sr	estereorradián	sr

ses, un kilogramo-mol (kg-mol) es la cantidad que llena el mismo volumen que 32 kilogramos de oxígeno a la misma temperatura y presión. La masa (en kilogramos) de un gas que llena ese volumen es igual al peso molecular del gas; por ejemplo, la masa de 1 kg-mol de nitrógeno es 28 kilogramos.

Cuando se expresa una cantidad con un valor numérico y una unidad, se utilizan prefijos que se han definido de modo que el valor numérico se encuentre entre 0.1 y

Tabla 1.2 Unidades derivadas

Cantidad	*Dimensiones*	*Unidades del SI*	*Unidades inglesas*
Área A	L^2	m^2	ft^2
Volumen V	L^3	m^3	ft^3
		L (litro)	
Velocidad V	L/T	m/s	ft/s
Aceleración a	L/T^2	m/s^2	ft/s^2
Velocidad angular ω	T^{-1}	rad/s	rad/s
Fuerza F	ML/T^2	$kg \cdot m/s^2$	$slug\text{-}ft/s^2$
		N (newton)	lb (libra)
Densidad ρ	M/L^3	kg/m^3	$slug/ft^3$
Peso específico γ	M/L^2T^2	N/m^3	lb/ft^3
Frecuencia f	T^{-1}	s^{-1}	s^{-1}
Presión p	M/LT^2	N/m^2	lb/ft^2
		Pa (pascal)	(psf)
Esfuerzo cortante τ	M/LT^2	N/m^2	lb/ft^2
		Pa (pascal)	(psf)
Tensión superficial σ	M/T^2	N/m	lb/ft
Trabajo W	ML^2/T^2	N·m	ft-lb
		J (joule)	
Energía E	ML^2/T^2	N·m	ft-lb
		J (joule)	
Rendimiento térmico $\dot{Q}$	ML^2/T^3	J/s	Btu/s
Par de torsión T	ML^2/T^2	N·m	ft-lb
Potencia P	ML^2/T^3	J/s	ft-lb/s
$\dot{W}$		W (watt)	
Viscosidad μ	M/LT	$N \cdot s/m^2$	$lb\text{-}s/ft^2$
Flujo másico m	M/T	kg/s	slug/s
Gasto Q	L^3/T	m^3/s	ft^3/s
Calor específico c	$L^2/T^2\Theta$	J/kg·K	Btu/slug-°R
Conductividad K	$ML/T^3\Theta$	W/m·K	lb/s-°R

Tabla 1.3 Prefijos SI

Factor de multiplicación	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centi[a]	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

[a]Aceptable si se usa sólo como cm, cm^2 o cm^3

1000. Estos prefijos se presentan en la tabla 1.3. Usando notación científica, se emplean potencias de 10 en lugar de prefijos (por ejemplo, 2×10^6 N en vez de 2 MN). Si se escriben números más grandes no se usa la coma; veinte mil se escribiría como 20 000 con un espacio sin coma.[2]

CONCEPTO CLAVE
Cuando se usen unidades del SI, si se escriben números más grandes (5 dígitos o más), no se usa la coma. La coma es sustituida por un espacio (es decir, 20 000).

La segunda ley de Newton relaciona una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo rígido con su masa y aceleración. Esto se expresa como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.2.4}$$

En consecuencia, la fuerza necesaria para acelerar una masa de 1 kilogramo a 1 metro por segundo al cuadrado en la dirección de la fuerza neta es 1 newton; usando unidades inglesas, la fuerza necesaria para acelerar una masa de 1 slug a 1 pie por segundo al cuadrado en la dirección de la fuerza neta es 1 libra. Esto nos permite relacionar las unidades con

$$\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad \text{lb} = \text{slug-ft/s}^2 \tag{1.2.5}$$

CONCEPTO CLAVE *La relación* N = kg•m/s² *se usa con frecuencia en la conversión de unidades.*

que se incluyen en la tabla 1.2. Estas relaciones entre unidades se usan con frecuencia en la conversión de unidades. En el SI, el peso siempre se expresa en newtons, nunca en kilogramos. En el sistema inglés, la masa suele expresarse en slugs, aunque se usan libras en algunas relaciones termodinámicas. Para relacionar el peso con la masa, usamos

$$W = mg \tag{1.2.6}$$

donde g es la gravedad local. El valor estándar para la gravedad es 9.80665 m/s² (32.174 ft/s²) y varía de un mínimo de 9.77 m/s² en la cima del Monte Everest a un máximo de 9.83 m/s² en la fosa oceánica más profunda. Aquí se usará un valor nominal de 9.81 m/s² (32.2 ft/s²) a menos que se indique de otra manera.

Por último, una nota sobre cifras significativas. En cálculos de ingeniería con frecuencia no confiamos en un cálculo de más de tres cifras significativas porque

[2]En muchos países las comas representan puntos decimales, por lo que no se usarán en donde pueda ocurrir una confusión.

la información dada en el enunciado del problema a veces no se conoce con más de tres cifras significativas; de hecho, la viscosidad y otras propiedades de líquidos pueden no conocerse incluso con tres cifras significativas. El diámetro de un tubo puede estar indicado como 2 cm; en general, esto no sería tan preciso como lo implica 2.000 cm. Si la información empleada en la solución de un problema se conoce con sólo dos cifras significativas, es incorrecto expresar un resultado con más de dos dígitos significativos. En los ejemplos y problemas supondremos que toda la información dada se conoce con tres cifras significativas, y los resultados se expresarán en conformidad. Si el número 1 inicia un número, no se cuenta en el número de cifras significativas, es decir, el número 1.210 tiene tres cifras significativas.

CONCEPTO CLAVE
Supondremos que toda la información dada se conoce con tres dígitos significativos.

Ejemplo 1.1

Sobre una masa de 100 kg actúan una fuerza de 400 N verticalmente hacia arriba y una fuerza de 600 N hacia arriba a un ángulo de 45º. Calcule la componente vertical de la aceleración. La aceleración local de la gravedad es 9.81 m/s^2.

Solución

El primer paso para resolver un problema que comprende fuerzas es trazar un diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan sobre él, como se muestra en la figura E1.1.

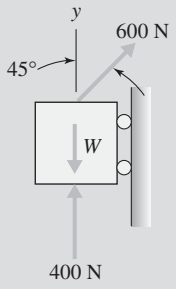


Fig. E1.1

A continuación, aplicamos la segunda ley de Newton (ecuación 1.2.4). Ésta relaciona la fuerza neta que actúa sobre una masa con la aceleración y se expresa como

$$\Sigma F_y = ma_y$$

Usando las componentes apropiadas en la dirección y, con $W = mg$, tenemos

$$400 + 600 \text{ sen } 45° - 100 \times 9.81 = 100a_y$$
$$a_y = -1.567 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo indica que la aceleración es en la dirección y negativa, es decir, hacia abajo. *Nota*: Hemos utilizado sólo tres cifras significativas en la respuesta porque se supone que la información dada en el problema se conoce con tres cifras significativas. (El número 1.567 tiene tres cifras significativas. El número "1" al principio no se cuenta como cifra significativa.)

1.3 CONCEPTO DE MEDIO CONTINUO DE GASES Y LÍQUIDOS

Las sustancias conocidas como fluidos pueden ser **líquidos** o **gases**. En nuestro estudio de la mecánica de fluidos restringimos los líquidos que se estudian aquí. Antes

que expresemos la restricción, debemos definir un esfuerzo cortante. Una fuerza ΔF que actúa sobre un área ΔA puede descomponerse en una componente normal ΔF_n y una componente tangencial ΔF_t, como se muestra en la figura 1.1. La fuerza dividida entre el área sobre la cual actúa recibe el nombre de *esfuerzo*. El vector de fuerza dividido entre el área es un **vector de esfuerzo**,[3] la componente normal de la fuerza dividida entre el área es un **esfuerzo normal**, y la fuerza tangencial dividida entre el área es un **esfuerzo cortante**. En esta exposición estamos interesados en el esfuerzo cortante τ. Matemáticamente, se define como

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \tag{1.3.1}$$

Ahora se puede identificar nuestra restringida familia de fluidos; los fluidos considerados en este libro son *los líquidos y gases que se mueven bajo la acción de un esfuerzo cortante, sin importar lo pequeño que sea ese esfuerzo.* Esto significa que incluso un esfuerzo cortante muy pequeño resulta en un movimiento del fluido. Los gases, obviamente, caen dentro de esta categoría de fluidos al igual que el agua y el alquitrán. Algunas sustancias, como los plásticos y la salsa de tomate, pueden resistir pequeños esfuerzos cortantes sin moverse; un estudio de estas sustancias está incluido en el tema de *reología* y no se incluye en este libro.

Merece la pena considerar en más detalle el comportamiento microscópico de los fluidos. Considere las moléculas de un gas en un recipiente. Estas moléculas no están estacionarias sino que se mueven en el espacio con velocidades muy altas. Chocan unas con otras y golpean las paredes del recipiente en el que están confinadas, dando lugar a la presión ejercida por el gas. Si el volumen del recipiente se aumenta mientras que la temperatura se mantiene constante, se reduce el número de moléculas que hacen impacto en un área determinada y, en consecuencia, la presión disminuye. Si aumenta la temperatura de un gas en un volumen determinado (es decir, aumentan las velocidades de las moléculas), la presión aumenta debido a la mayor actividad molecular.

Las fuerzas moleculares en los líquidos son relativamente altas, como puede inferirse por el siguiente ejemplo. La presión necesaria para comprimir 20 gramos de vapor de agua a 20 °C en 20 cm^3, suponiendo que no existan fuerzas moleculares, puede demostrarse por medio de la ley de un gas ideal que es aproximadamente 1340 veces la presión atmosférica. Por supuesto que no se requiere esta presión, porque 20 g de agua ocupan 20 cm^3. Se deduce que las fuerzas de cohesión de la fase líquida deben ser muy grandes.

A pesar de las elevadas fuerzas moleculares de atracción en un líquido, algunas de las moléculas de la superficie escapan hacia el espacio arriba del líquido. Si el líquido está contenido, se establece un equilibrio entre moléculas salientes y entrantes. La presencia de moléculas arriba de la superficie del líquido conduce a la llamada *presión de vapor*.

Vector de fuerza: *Es el vector fuerza dividido entre el área.*

Esfuerzo normal: *Componente normal de fuerza dividida entre el área.*

Esfuerzo cortante: *Fuerza tangencial dividida entre el área.*

Líquido: *Estado de la materia en el que las moléculas están relativamente libres para cambiar sus posiciones unas respecto a otras, pero restringidas por fuerzas de cohesión para mantener un volumen relativamente fijo.*[4]

Gas: *Estado de la materia en el que las moléculas prácticamente no están restringidas por fuerzas de cohesión. Un gas no tiene forma definida ni volumen.*

CONCEPTO CLAVE *Los fluidos considerados en este texto son aquellos que se mueven bajo la acción de un esfuerzo cortante, sin importar lo pequeño que sea ese esfuerzo.*

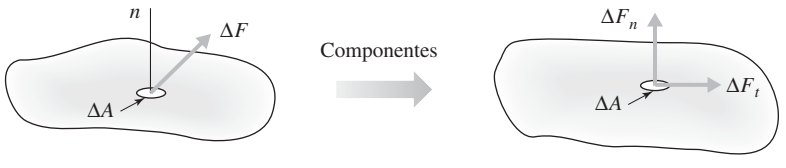


Fig. 1.1 Componentes normal y tangencial de una fuerza.

[3] *Una cantidad que se define en el margen está en negrita, mientras que una cantidad que no se define en el margen está en cursiva.*

[4] *Manual de Química y Física*, 40ª ed. CRC Press, Boca Raton, Florida.

Esta presión aumenta con la temperatura. Para agua a 20 ºC esta presión es aproximadamente 0.02 veces la presión atmosférica.

En nuestro estudio de la mecánica de fluidos es conveniente suponer que los gases y los líquidos están continuamente distribuidos en toda una región de interés, es decir, el fluido es tratado como un **medio continuo**. La principal propiedad que se usa para determinar si la suposición de medio continuo es apropiada es la *densidad* ρ, definida por

Medio continuo: *Distribución continua de un líquido o gas en toda una región de interés.*

$$\rho = \lim_{\Delta \mathcal{V} \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \mathcal{V}} \tag{1.3.2}$$

donde Δm es la masa incremental contenida en el volumen incremental $\Delta \mathcal{V}$. La densidad del aire en **condiciones atmosféricas estándar**, es decir, a una presión de 101.3 kPa (14.7 psi) y una temperatura de 15 ºC (59 ºF), es 1.23 kg/m^3 (0.00238 slug/ft^3). Para el agua, el valor nominal de la densidad es 1000 kg/m^3 (1.94 slug/ft^3).

Condiciones atmosféricas estándar: *Una presión de* 101.3 kPa *y una temperatura de* 15 ºC.

Físicamente, no podemos hacer que $\Delta \mathcal{V} \to 0$, porque, cuando $\Delta \mathcal{V}$ se hace muy pequeño, la masa contenida en $\Delta \mathcal{V}$ variaría en forma discontinua dependiendo del número de moléculas de $\Delta \mathcal{V}$; esto se muestra gráficamente en la figura 1.2. En realidad, el cero en la definición de densidad debe ser sustituido por algún pequeño volumen ε, abajo del cual no se cumple la suposición de un medio continuo. Para la mayoría de aplicaciones de ingeniería, el pequeño volumen ε que se muestra en la figura 1.2 es muy pequeño. Por ejemplo, hay 2.7×10^{16} moléculas contenidas en un milímetro cúbico de aire en condiciones estándar; por lo tanto, ε es mucho más pequeño que un milímetro cúbico. Una forma apropiada de determinar si es aceptable el modelo de medio continuo es comparar una longitud característica l (por ejemplo, el diámetro de un cohete) del dispositivo u objeto de interés con la **trayectoria media libre** λ, que es la distancia promedio que recorre una molécula antes de chocar con otra molécula; si $l >> \lambda$, el modelo de medio continuo es aceptable. La trayectoria media libre se deriva de la teoría molecular. Es

CONCEPTO CLAVE *Para determinar si el modelo de medio continuo es aceptable, compare una longitud l con la trayectoria media libre.*

Trayectoria media libre: *Distancia promedio que recorre una molécula antes de chocar con otra.*

$$\lambda = 0.225 \frac{m}{\rho d^2} \tag{1.3.3}$$

donde m es la masa (kg) de una molécula, ρ es la densidad (kg/m^3) y d es el diámetro (m) de una molécula. Para el aire $m = 4.8 \times 10^{-26}$ kg y $d = 3.710^{-10}$ m. En condiciones atmosféricas estándar la trayectoria media libre es aproximadamente 6.4×10^{-6} cm,

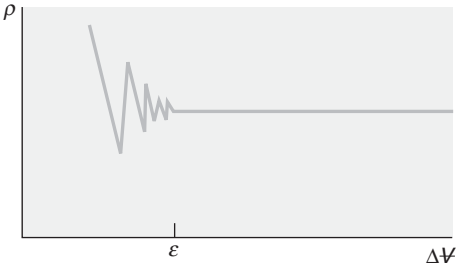


Fig. 1.2 Densidad en un punto en un medio continuo.

a una elevación de 100 km es 10 cm y a 160 km es 5000 cm. Obviamente, a mayores altitudes la suposición de un medio continuo no es aceptable y debe utilizarse la teoría de dinámica de gas enrarecido (o flujo molecular libre). Los satélites pueden girar alrededor de la Tierra si la dimensión primaria del satélite es del mismo orden de magnitud que la trayectoria media libre.

Con la suposición de un medio continuo, se puede estimar que las propiedades de un fluido se aplican uniformemente en todos los puntos de una región en cualquier instante particular del tiempo. Por ejemplo, la densidad ρ puede definirse en todos los puntos en el fluido; puede variar de un punto a otro y de un instante a otro; esto es, en coordenadas cartesianas ρ es una función continua de x, y, z y t, escrita como $\rho(x,y,z,t)$.

1.4 ESCALAS DE PRESIÓN Y TEMPERATURA

En mecánica de fluidos la presión resulta de una fuerza normal compresiva que actúa sobre un área. La *presión p* se define como (vea la figura 1.3)

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \tag{1.4.1}$$

donde ΔF_n es la fuerza de compresión normal incremental que actúa sobre el área incremental ΔA. Las unidades métricas a usarse en mediciones de presión son newtons por metro cuadrado (N/m^2) o pascal (Pa). Como el pascal es una unidad de presión muy pequeña, es más convencional expresar la presión en unidades de kilopascales (kPa). Por ejemplo, la presión atmosférica estándar a nivel del mar es 101.3 kPa. Las unidades inglesas para presión son libras por pulgada cuadrada (psi) o libras por pie cuadrado (psf). La presión atmosférica en ocasiones se expresa como pulgadas de mercurio o pies de agua, como se muestra en la figura 1.4; esa columna de fluido crea la presión en el fondo de la columna, siempre que ésta se encuentre abierta a la presión atmosférica en la parte superior.

Tanto la presión como la temperatura son cantidades físicas que pueden medirse usando escalas diferentes. Existen escalas absolutas para presión y temperatura, y hay escalas que miden estas cantidades respecto a puntos de referencia seleccionados. En muchas relaciones termodinámicas (vea la sección 1.7) deben usarse escalas absolutas para presión y temperatura. Las figuras 1.4 y 1.5 resumen las escalas de uso común.

CONCEPTO CLAVE *En muchas relaciones, deben usarse escalas absolutas para presión y temperatura.*

La **presión absoluta** llega a cero cuando se alcanza un vacío ideal, es decir, cuando no hay moléculas en un espacio; en consecuencia, una presión absoluta negativa es una imposibilidad. Se define una segunda escala al medir presiones respecto a

Presión absoluta: *Escala que mide la presión, donde se llega a cero cuando se alcanza un vacío ideal.*

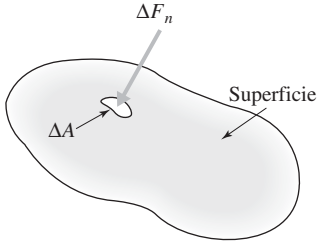


Fig. 1.3 Definición de presión.

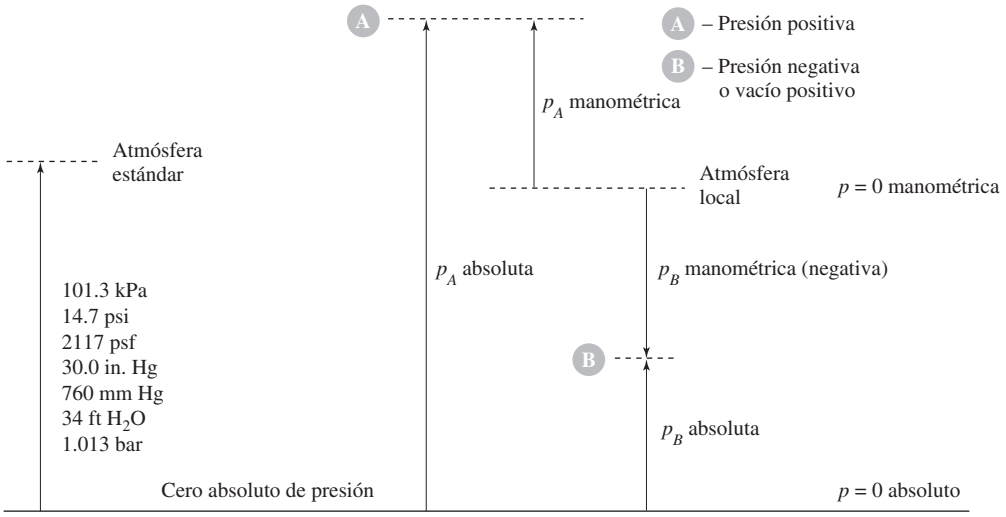


Fig. 1.4 Presión manométrica y presión absoluta.

Presión manométrica: *Escala que mide la presión respecto a la presión atmosférica local.*

la presión atmosférica local. Esta presión se denomina **presión manométrica**. Una conversión de presión manométrica a presión absoluta puede realizarse mediante

$$p_{\text{absoluta}} = p_{\text{atmosférica}} + p_{\text{manométrica}} \tag{1.4.2}$$

CONCEPTO CLAVE
Siempre que la presión absoluta sea menor que la presión atmosférica, a esta condición se le llama vacío.

Vacío: *Cuando la presión absoluta es menor que la presión atmosférica.*

Observe que la presión atmosférica en la ecuación 1.4.2 es la presión atmosférica local, que puede cambiar con el tiempo, en particular cuando un "frente" meteorológico pasa por el lugar. No obstante, si no nos dan la presión atmosférica local, usamos el valor dado para una elevación particular, como se indica en la tabla B.3 del apéndice B, y suponemos una elevación cero si la elevación es desconocida. La presión manométrica es negativa cuando la presión absoluta es menor que la presión atmosférica; entonces se le puede llamar **vacío**. En este libro, la palabra "absoluta" en general seguirá el valor de presión si ésta está dada como presión absoluta (por ejemplo, p = 50 kPa absoluta). Si se hubiera indicado como p = 50 kPa, la presión se tomaría como presión manométrica, excepto que la presión atmosférica es siempre una presión absoluta. En la mayoría de los casos, se usa la presión manométrica en mecánica de fluidos.

	°C	K	°F	°R
Punto de ebullición	100°	373	212°	672°
Punto de congelación	0°	273	32°	492°
Punto especial	–18°	255	0°	460°
Cero absoluto de temperatura				

Fig. 1.5 Escalas de temperatura.

En general se usan dos escalas de temperatura, la Celsius (C) y la Fahrenheit (F). Ambas están basadas en el punto de congelación y en el punto de ebullición del agua a una presión atmosférica de 101.3 kPa (14.7 psi). La figura 1.5 muestra que los puntos de congelación y de ebullición son 0 y 100 ºC en la escala Celsius y 32 y 212 ºF en la escala Fahrenheit. Hay dos escalas correspondientes de temperatura absoluta. La escala absoluta correspondiente a la Celsius es la escala kelvin (K). La relación entre estas escalas es

$$K = °C + 273.15 \tag{1.4.3}$$

La escala absoluta correspondiente a la Fahrenheit es la escala Rankine (ºR). La relación entre estas escalas es

$$°R = °F + 459.67 \tag{1.4.4}$$

Observe que en el sistema SI no escribimos 100 ºK sino simplemente 100 K, que se lee "100 kelvins", semejante a otras unidades.

CONCEPTO CLAVE *En el sistema SI escribimos* 100 K, *que se lee "*100 *kelvins".*

Con frecuencia haremos referencia a "condiciones atmosféricas estándar" o "temperatura y presión estándar". Esto se refiere a condiciones al nivel del mar a una latitud de 40º, que se toman como 101.3 kPa (14.7 psi) para la presión y 15 ºC (59 ºF) para la temperatura. En realidad, la presión estándar suele tomarse como 100 kPa, suficientemente precisa para cálculos en ingeniería.

Ejemplo 1.2

Un manómetro conectado a un tanque rígido mide un vacío de 42 kPa dentro del tanque que se ilustra en la figura E1.2, el cual está situado en un lugar en Colorado donde la elevación es 2000 m. Determine la presión absoluta dentro del tanque.

Fig. E1.2

Solución

Para determinar la presión absoluta debe conocerse la presión atmosférica. Si no nos dan la elevación, supondríamos una presión atmosférica estándar de 100 kPa. No obstante, como nos dan la elevación, la presión atmosférica se encuentra de la tabla B.3 del apéndice B como 79.5 kPa. Entonces

$$p = -42 + 79.5 = 37.5 \text{ kPa absoluta}$$

Nota: Un vacío es siempre una presión manométrica negativa. Además, es aceptable usar una presión atmosférica estándar de 100 kPa, en lugar de 101.3 kPa, porque está dentro de un 1%, que es una precisión aceptable en ingeniería.

1.5 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

En esta sección presentamos varias de las propiedades más comunes de los fluidos. Si la variación de densidad o de transferencia de calor es significativa, varias propiedades adicionales, no presentadas aquí, se convierten en importantes..

1.5.1 Densidad y peso específico

Peso específico: *Peso por unidad de volumen ($\gamma = \rho g$).*

La densidad de un fluido está definida en la ecuación 1.3.2 como masa por unidad de volumen. Una propiedad de un fluido directamente relacionada con la densidad es el **peso específico** γ o peso por unidad de volumen. Está definido por

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g \tag{1.5.1}$$

donde g es la gravedad local. Las unidades de peso específico son N/m^3 (lb/ft^3). Para el agua usamos el valor nominal de 9800 N/m^3 (62.4 lb/ft^3).

Gravedad específica: *Relación entre la densidad de una sustancia a la densidad del agua.*

La **gravedad específica** S se usa con frecuencia para determinar el peso específico o densidad de un fluido (por lo general un líquido). Se define como la relación entre la densidad de una sustancia a la densidad del agua a una temperatura de referencia de 4 ºC.

$$S = \frac{\rho}{\rho_{\text{agua}}} = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{agua}}} \tag{1.5.2}$$

CONCEPTO CLAVE *La gravedad específica se usa con frecuencia para determinar la densidad de un fluido.*

Por ejemplo, la gravedad específica del mercurio es 13.6, un número adimensional; es decir, la masa de mercurio es 13.6 veces la del agua para el mismo volumen. La densidad, peso específico y gravedad específica del aire y del agua en condiciones estándar se dan en la tabla 1.4.

La densidad y el peso específico del agua varían ligeramente con la temperatura; las relaciones aproximadas son

$$\rho_{H_2O} = 1000 - \frac{(T-4)^2}{180}$$
$$\gamma_{H_2O} = 9800 - \frac{(T-4)^2}{18} \tag{1.5.3}$$

Tabla 1.4 Densidad, peso específico y gravedad específica del aire y del agua en condiciones estándar

	Densidad ρ		*Peso específico γ*		
	kg/m^3	slug/ft^3	N/m^3	lb/ft^3	*Gravedad específica S*
Aire	1.23	0.0024	12.1	0.077	0.00123
Agua	1000	1.94	9810	62.4	1

Para el mercurio, la gravedad específica está relacionada con la temperatura por

$$S_{\text{Hg}} = 13.6 - 0.0024T \tag{1.5.4}$$

La temperatura en las tres ecuaciones anteriores está medida en grados Celsius. Para temperaturas menores de 50 ºC, usando los valores nominales indicados antes para agua y mercurio, el error es menor de 1%, dentro de los límites de ingeniería para la mayoría de problemas de diseño. Nótese que la densidad del agua a 0 ºC (32 ºF) es menor que a 4 ºC y, en consecuencia, el agua más ligera a 0 ºC sube a la superficie de un lago de manera que se forma hielo en la superficie. Para casi todos los otros líquidos la densidad en el punto de congelación es mayor que la densidad justo arriba de la congelación.

1.5.2 Viscosidad

Viscosidad: *Adhesividad interna de un fluido.*

La **viscosidad** puede ser considerada como la adhesividad interna de un fluido; es una de las propiedades que influye en la potencia necesaria para mover una superficie de sustentación a través de la atmósfera. Explica las pérdidas de energía asociadas con el transporte de fluidos en conductos, canales y tubos. Además, la viscosidad desempeña una función muy importante en la generación de turbulencia. No hay necesidad de decir que la viscosidad es una propiedad muy importante en los fluidos en nuestro estudio de flujo de fluidos.

CONCEPTO CLAVE *La viscosidad desempeña una función muy importante en la generación de turbulencia.*

La rapidez de deformación de un fluido está directamente relacionada con la viscosidad del fluido. Para un esfuerzo determinado, un fluido altamente viscoso se deforma con más lentitud que un fluido con baja viscosidad. Considere el flujo que se muestra en la figura 1.6 en donde las partículas de fluido se mueven en la dirección x a velocidades diferentes, de modo que las velocidades de partículas u varían con la coordenada y. Se muestran las posiciones de dos partículas en tiempos diferentes; observe cómo las partículas se mueven unas con respecto a otras. Para un campo de flujo tan sencillo, en el que $u = u(y)$, podemos definir la **viscosidad** μ del fluido por la relación

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.5.5}$$

donde τ es el esfuerzo cortante de la ecuación 1.3.1 y u es la velocidad en la dirección x. Las unidades de τ son N/m^2 o Pa (lb/ft^2), y de μ son N·s/m^2 (lb-s/ft^2). La cantidad du/dy es un gradiente de velocidad y puede ser interpretada como una **velocidad de deformación**. Las relaciones entre el esfuerzo y el gradiente de velocidad para situaciones de flujo más complicadas se presentan en el Capítulo 5.

Velocidad de deformación: *Velocidad con la que se deforma un elemento de fluido.*

El concepto de viscosidad y gradientes de velocidad también puede ilustrarse al considerar un fluido dentro del pequeño espacio entre dos cilindros concéntricos,

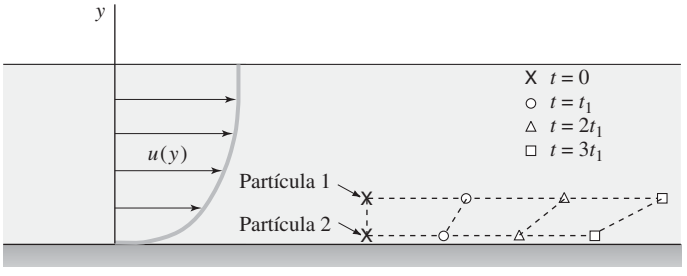


Fig. 1.6 Movimiento relativo de dos partículas de fluido en presencia de esfuerzos cortantes.

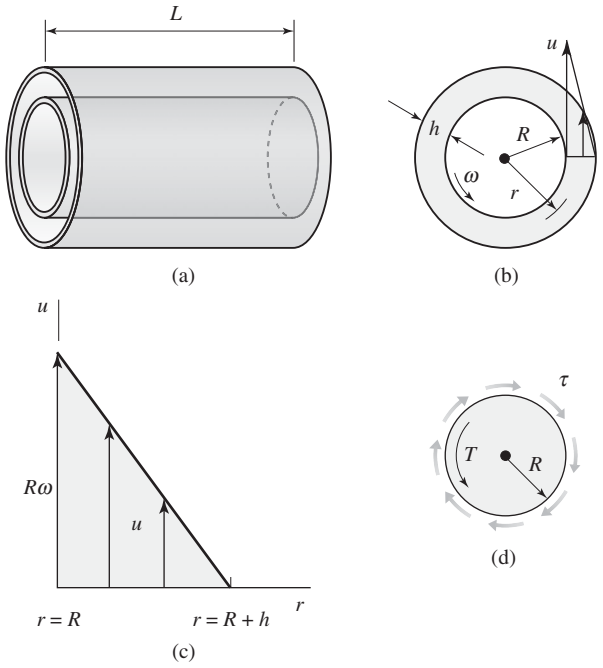


Fig. 1.7 Fluido sometido a esfuerzo cortante entre dos cilindros con un pequeño espacio entre ellos: (a) los dos cilindros; (b) cilindro interno giratorio; (c) distribución de velocidad; (d) el cilindro interno. El cilindro externo está fijo y el cilindro interno está girando.

como se muestra en en la figura 1.7. Es necesario un par de torsión para hacer girar el cilindro interno a una velocidad rotacional constante mientras que el cilindro externo permanece estacionario. Esta resistencia a la rotación del cilindro se debe a la viscosidad. El único esfuerzo que existe para resistir el par de torsión aplicado para este sencillo flujo es un esfuerzo cortante, el cual se observa que depende directamente del gradiente de velocidad; esto es,

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dr} \right| \tag{1.5.6}$$

donde du/dr es el gradiente de velocidad y u es la componente tangencial de la velocidad, que depende sólo de r. Para un pequeño espacio ($h << R$), este gradiente se puede calcular suponiendo una distribución[5] lineal de la velocidad en el espacio. Entonces

$$\left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{\omega R}{h} \tag{1.5.7}$$

donde h es el ancho del espacio. En esta forma podemos relacionar el par de torsión T aplicado a la viscosidad y otros parámetros por medio de la ecuación

$$\begin{aligned} T &= \text{esfuerzo} \times \text{área} \times \text{brazo de palanca} \\ &= \tau \times 2\pi RL \times R \\ &= \mu \frac{\omega R}{h} \times 2\pi RL \times R = \frac{2\pi R^3 \omega L \mu}{h} \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

[5]Si el espacio no es pequeño con relación a R, la distribución de la velocidad no será lineal (véase la sección 7.5). La distribución tampoco será lineal para valores relativamente pequeños de ω.

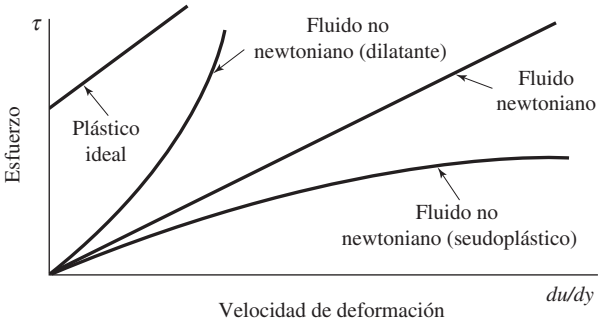


Fig. 1.8 Fluidos newtonianos y no newtonianos.

donde el esfuerzo cortante que actúa sobre los extremos del cilindro es insignificante; L representa la longitud del cilindro giratorio. Nótese que el par de torsión depende directamente de la viscosidad; de este modo los cilindros podrían usarse como un *viscosímetro*, o sea un dispositivo que mide la viscosidad de un fluido.

Viscosidad[6], 454

Si el esfuerzo cortante de un fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad, como se supone en las ecuaciones 1.5.5 y 1.5.6, se dice que es un **fluido newtoniano**. Afortunadamente, muchos fluidos comunes, como el aire, el agua y el aceite, son newtonianos. Los *fluidos no newtonianos*, con relaciones de esfuerzo cortante contra velocidad de deformación como se ve en la figura 1.8, con frecuencia tienen una composición molecular compleja.

Fluido newtoniano: *el esfuerzo cortante del fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad.*

Los *dilatantes* (arenas movedizas, lechadas) se hacen más resistentes al movimiento a medida que aumenta la velocidad de deformación, y los *seudoplásticos* (pintura y salsa de tomate) se hacen menos resistentes al movimiento a una mayor velocidad de deformación. Los *plásticos ideales* (o *fluidos de Bingham*) requieren de un mínimo de esfuerzo cortante para causar su movimiento. Las suspensiones de arcilla y pasta dentífrica son ejemplos que también requieren un cortante mínimo para ocasionar su movimiento, pero no tienen una relación lineal de esfuerzo-velocidad de deformación.

CONCEPTO CLAVE *La viscosidad hace que un fluido se adhiera a una superficie.*

Un efecto muy importante de la viscosidad es hacer que el fluido se adhiera a la superficie; esto se conoce como **condición sin deslizamiento**, lo cual se supuso en el ejemplo de la figura 1.7. La velocidad del fluido en el cilindro giratorio se tomó como ωR y la velocidad del fluido en el cilindro estacionario se igualó a cero, como se ilustra en la figura 1.7b. Cuando un vehículo espacial reingresa a la atmósfera, la alta velocidad crea gradientes de velocidad muy grandes en la superficie del vehículo, resultando en grandes esfuerzos que calientan la superficie; las altas temperaturas pueden hacer que el vehículo se desintegre si no está debidamente protegido.

Condición sin deslizamiento: *Condición donde la viscosidad hace que un fluido se adhiera a la superficie.*

La viscosidad depende en gran medida de la temperatura en líquidos en los que fuerzas de cohesión desempeñan una función dominante; nótese que la viscosidad de un líquido disminuye al aumentar la temperatura, como se muestra en la figura B.1 en el apéndice B. Es frecuente que las curvas se calculen por medio de la ecuación

$$\mu = Ae^{Bt} \tag{1.5.9}$$

conocida como *ecuación de Andrade;* las constantes A y B se determinan a partir de datos medidos. Para un gas, las colisiones moleculares son las que generan los esfuerzos internos, de modo que a medida que aumenta la temperatura, lo que resulta en

[6]Para ver un archivo en una página especificada, basta con abrir cualquiera de los ocho grandes encabezados, a continuación, introduzca un número de página en el cuadro en la parte superior y haga clic en "ir a la página." Los números después de los descriptores se refieren a las páginas en el DVD.

una mayor actividad molecular, aumenta la viscosidad. Esto se puede observar en la curva inferior para un gas de la figura B.1 en el apéndice B. Nótese, sin embargo, que el cambio porcentual de la viscosidad en un líquido es mucho mayor que en un gas para la misma diferencia de temperatura. También, se puede demostrar que las fuerzas de cohesión y actividad molecular son bastante insensibles a la presión, de modo que $\mu = \mu(T)$ sólo para líquidos y gases.

Como es frecuente que la viscosidad se divida entre la densidad en la derivación de ecuaciones, se ha hecho útil y rutinario definir la *viscosidad cinemática* como

$$v = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.5.10}$$

donde las unidades de v son m^2/s (ft^2/s). Nótese que para un gas, la viscosidad cinemática también dependerá de la presión ya que la densidad es sensible a la presión. La viscosidad cinemática se muestra, a presión atmosférica, en la figura B.2 del apéndice B.

Ejemplo 1.3

Un viscosímetro se construye con dos cilindros concéntricos de 30 cm de largo, uno de 20.0 cm de diámetro y el otro de 20.2 cm. Se requiere de un par de torsión de 0.13 N·m para hacer girar el cilindro interno a 400 rpm (revoluciones por minuto). Calcule la viscosidad.

Solución

El par de torsión aplicado es apenas equilibrado por un par de torsión resistente debido a los esfuerzos cortantes (vea figura 1.7c). Esto está expresado por la ecuación para un espacio pequeño, ecuación 1.5.8.

El radio es $R = d/2 = 10$ cm; el espacio $h = (d_2 - d_1)/2 = 0.1$ cm; la velocidad rotacional, expresada como rad/s, es $\omega = 400 \times 2\pi/60 = 41.89$ rad/s.

La ecuación 1.5.8 produce:

$$\mu = \frac{Th}{2\pi R^3 \omega L}$$

$$= \frac{0.13(0.001)}{2\pi(0.1)^3(41.89)(0.3)} = 0.001646 \text{ N·s/m}^2$$

Nota: Todas las longitudes están en metros, de modo que se obtienen las unidades deseadas en μ. Las unidades se pueden verificar por sustitución:

$$[\mu] = \frac{\text{N·m·m}}{\text{m}^3(\text{rad/s})\text{m}} = \frac{\text{N·s}}{\text{m}^2}$$

1.5.3 Compresibilidad

Módulo de elasticidad volumétrico: *Relación de cambio en presión al cambio relativo en densidad.*

En la sección anterior expusimos la deformación de fluidos que resulta de esfuerzos cortantes. En esta sección trataremos la deformación que resulta de cambios de presión. Todos los fluidos se comprimen si la presión aumenta, resultando en una disminución en el volumen o un aumento en la densidad. Una forma común de describir la compresibilidad de un fluido es mediante la siguiente definición del **módulo de elasticidad volumétrico** B:

$$B = \lim_{\Delta \mathcal{V} \to 0} \left[- \frac{\Delta p}{\Delta \mathcal{V}/\mathcal{V}} \right]_T = \lim_{\Delta \rho \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} \Big|_T = -\mathcal{V} \frac{\partial p}{\partial \mathcal{V}} \Big|_T = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_T \tag{1.5.11}$$

En otras palabras, el módulo de volumen, también llamado *coeficiente de compresibilidad*, se define como la relación del cambio en presión (Δp) al cambio relativo en densidad ($\Delta \rho / \rho$) mientras que la temperatura permanece constante. El módulo de volumen tiene las mismas unidades que la presión.

El módulo de volumen para el agua en condiciones estándar es aproximadamente de 2 100 MPa (310 000 psi), o sea 21 000 veces la presión atmosférica. Para el aire en condiciones estándar, B es igual a 1 atm. En general, B para un gas es igual a la presión del gas. Para causar un cambio de 1% en la densidad del agua se requiere una presión de 21 MPa (210 atm). Ésta es una presión muy grande para causar un cambio tan pequeño; por lo tanto, con frecuencia se supone que los líquidos son incompresibles. Para gases, si ocurren cambios importantes en densidad, por ejemplo de 4%, deben ser considerados como compresibles; para pequeños cambios de densidad menores de 3% pueden ser tratados como incompresibles. Esto ocurre para velocidades de aire atmosférico por debajo de los 100 m/s (220 mph), que incluye numerosos flujos de aire de interés en ingeniería: el flujo de aire alrededor de automóviles, aterrizaje y despegue de aviones y flujo de aire en y alrededor de edificios.

CONCEPTO CLAVE *Los gases con pequeños cambios de densidad menores de 3% pueden ser tratados como incompresibles.*

Pequeños cambios de densidad en líquidos pueden ser muy importantes cuando existen grandes cambios de presión. Por ejemplo, explican el "golpe de ariete" que puede escucharse poco después de cerrar en forma repentina una válvula en una línea de agua; cuando la válvula se cierra, se propaga una onda interna de presión en el tubo, produciendo un sonido como de martilleo debido al movimiento del tubo cuando la onda se refleja de la válvula cerrada o de los codos de la tubería. El "golpe de ariete" está considerado en detalle en la sección 11.5.

El módulo de volumen también se puede usar para calcular la velocidad del sonido en un líquido; en la sección 9.2 se demuestra que está dada por

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \Big|_T = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{1.5.12}$$

Esto da aproximadamente 1450 m/s (4 800 ft/s) para la velocidad del sonido en agua en condiciones estándar. La velocidad del sonido en un gas se presenta en la sección 1.7.3.

1.5.4 Tensión superficial

La **tensión superficial** es una propiedad que resulta de las fuerzas de atracción entre moléculas. Como tal, se manifiesta sólo en líquidos en una interfase, por lo general una interfase líquido-gas. Las fuerzas entre moléculas en la masa de un líquido son iguales en todas direcciones y, como resultado de esto, no se ejerce fuerza neta sobre las moléculas. No obstante, en una interfase las moléculas ejercen una fuerza que tiene una resultante en la capa de la interfase. Esta fuerza contiene una gota de agua suspendida en una varilla y limita el tamaño de la gota que puede ser con-

Tensión superficial: *Propiedad resultante de las fuerzas de atracción entre moléculas.*

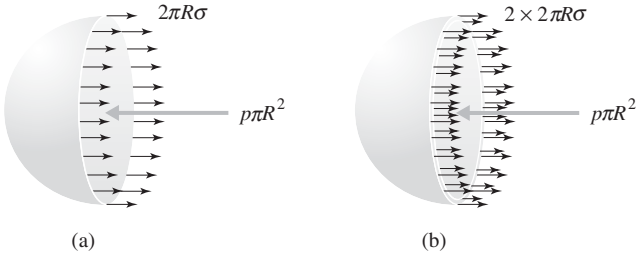


Fig. 1.9 Fuerzas internas en (a) una gotita y (b) una burbuja.

tenida. También hace que las pequeñas gotas de un rociador o atomizador tomen formas esféricas. También puede desempeñar una función importante cuando dos líquidos que no se mezclan (por ejemplo aceite y agua) están en contacto entre sí.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza debida a la tensión superficial resulta de una longitud multiplicada por la tensión superficial.*

La tensión superficial tiene unidades de fuerza por unidad de longitud, N/m (lb/ft). La fuerza debida a la tensión superficial resulta de una distancia multiplicada por la tensión superficial; la distancia a usar es la longitud del fluido en contacto con un sólido, o la circunferencia en el caso de una burbuja. El efecto de la tensión superficial puede ilustrarse si se consideran los diagramas de cuerpo libre de la mitad de una gotita o de la mitad de una burbuja, como se muestra en la figura 1.9. La gotita tiene una superficie, y la burbuja está compuesta de una delgada película de líquido con una superficie interior y una superficie exterior. Ahora se puede deducir una expresión para la presión dentro de la gotita y de la burbuja.

Formación de gotas, 453

La fuerza de presión $p\pi R^2$ en la gotita equilibra la fuerza de tensión superficial alrededor de la circunferencia. Por tanto,

$$p\pi R^2 = 2\pi R\sigma$$

$$\therefore p = \frac{2\sigma}{R} \tag{1.5.13}$$

De manera similar, la fuerza de presión en la burbuja está equilibrada por las fuerzas de tensión superficial en las dos circunferencias suponiendo que el grosor de la burbuja sea pequeño. Por tanto,

$$p\pi R^2 = 2(2\pi R\sigma)$$

$$\therefore p = \frac{4\sigma}{R} \tag{1.5.14}$$

De las ecuaciones 1.5.13 y 1.5.14 podemos concluir que la presión interior en una burbuja es el doble que la de una gotita del mismo tamaño.

La figura 1.10 muestra el ascenso de un líquido por un tubo capilar de vidrio limpio debido a la tensión superficial. El líquido forma un ángulo de contacto β con el tubo de vidrio. Experimentos realizados han demostrado que este ángulo para el agua y para la mayoría de los líquidos en un tubo de vidrio limpio es cero. También hay casos en los que este ángulo es mayor que 90º (por ejemplo, mercurio); tales líquidos tienen un descenso capilar. Si h es el ascenso capilar, D el diámetro, ρ la densidad y σ la tensión superficial, h puede determinarse si se igualan en una ecuación

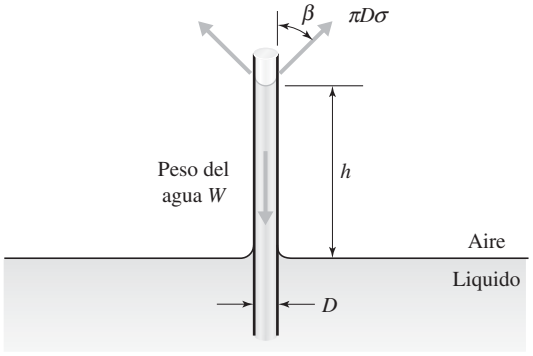


Fig. 1.10 Ascenso en un tubo capilar.

la componente vertical de la fuerza de tensión superficial con el peso de la columna de líquido:

$$\sigma \pi D \cos \beta = \gamma \frac{\pi D^2}{4} h \tag{1.5.15}$$

o bien, reordenando,

$$h = \frac{4\sigma \cos \beta}{\gamma D} \tag{1.5.16}$$

La tensión superficial puede influir en problemas de ingeniería cuando, por ejemplo, se realiza un modelado de ondas en laboratorio a una escala donde las fuerzas de tensión son del mismo orden de magnitud que las fuerzas gravitacionales.

Ejemplo 1.4

Un tubo de vidrio limpio de 2 mm de diámetro se introduce en agua a 15 ºC (figura E1.4). Determine la altura a la que subirá el agua por el tubo. El agua forma un ángulo de contacto de 0º con el vidrio limpio.

Capilaridad, 346

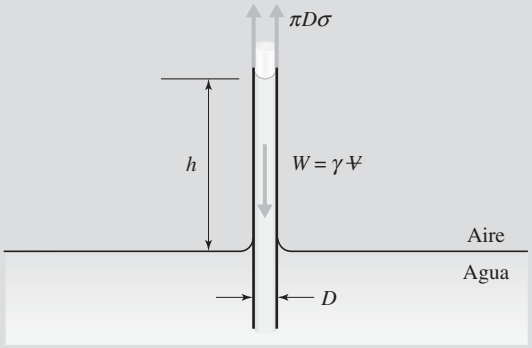


Fig. E1.4

Solución

Un diagrama de cuerpo libre del agua muestra que la fuerza hacia arriba de la tensión superficial es igual y opuesta al peso. Escribiendo la fuerza de tensión superficial como tensión superficial por distancia, tenemos

$$\sigma \pi D = \gamma \frac{\pi D^2}{4} h$$

o bien,

$$h = \frac{4\sigma}{\gamma D} = \frac{4 \times 0.0741 \text{ N/m}}{9800 \text{ N/m}^3 \times 0.002 \text{ m}} = 0.01512 \text{ m} \quad \text{o} \quad 15.12 \text{ mm}$$

Los valores numéricos de σ y ρ se obtuvieron de la tabla B.1 del apéndice B. Observe que el valor nominal empleado para el peso específico del agua es $\gamma = \rho g = 9\,800 \text{ N/m}^3$.

Ejemplo 1.4a En el DVD, Similitud y Escala, Ascenso capilar 512

Fig. 1.11 Cocinar alimentos en agua hirviendo toma más tiempo a una altitud elevada. Toma más tiempo cocer huevos duros en Denver que en la ciudad de Nueva York. (Thomas Firak Photography/FoodPix/Getty Images)

1.5.5 Presión de vapor

Cuando una pequeña cantidad de líquido se pone en un recipiente cerrado, una cierta fracción del líquido se evapora. La vaporización terminará cuando se alcance el equilibrio entre los estados líquido y gaseoso de la sustancia en el recipiente, es decir, cuando el número de moléculas que escapan de la superficie del agua es igual al número de moléculas entrantes. La presión resultante de las moléculas en el estado gaseoso es la **presión de vapor**.

Presión de vapor: *Presión que resulta de las moléculas en estado gaseoso.*

La presión de vapor es diferente de un líquido a otro. Por ejemplo, la presión de vapor del agua a 15 ºC es 1.70 kPa absoluta y para el amoniaco es 33.8 kPa absoluta.

La presión de vapor depende en gran medida de la temperatura; aumenta en forma importante cuando aumenta la temperatura. Por ejemplo, la presión de vapor del agua aumenta a 101.3 kPa (14.7 psi) si la temperatura alcanza 100 ºC (212 ºF). Las presiones de vapor de agua para otras temperaturas se dan en el apéndice B.

CONCEPTO CLAVE *La cavitación puede ser muy dañina.*

Por supuesto, no es coincidencia que la presión de vapor del agua a 100 ºC sea igual a la presión atmosférica estándar. A esa temperatura el agua está **hirviendo**; es decir, el estado líquido del agua ya no puede ser sostenido porque las fuerzas de atracción no son suficientes para contener las moléculas en una fase líquida. En general, ocurre una transición del estado líquido al gaseoso si la presión absoluta local es menor que la presión de vapor del líquido. A grandes elevaciones, donde la presión atmosférica es relativamente baja, la ebullición ocurre a temperaturas menores a 100 ºC (vea la figura 1.11). A una elevación de 3 000 m, la ebullición ocurriría a aproximadamente 90 ºC; vea las tablas B.3 y B.1.

Ebullición: *Punto donde la presión de vapor es igual a la atmosférica.*

En flujos líquidos, pueden crearse condiciones que lleven a una presión debajo de la presión de vapor del líquido. Cuando esto ocurre, se forman burbujas localmente. Este fenómeno, llamado **cavitación**, puede ser muy dañino cuando estas burbujas son transportadas por el flujo a regiones de presión más alta, y este colapso produce picos de presión locales que tienen el potencial de dañar la pared de un tubo o la hélice de un barco. La cavitación en una hélice se muestra en la figura 1.12. Más información sobre cavitación está incluida en la sección 8.3.4.

Cavitación: *Se forman burbujas en un líquido cuando la presión local cae por debajo de la presión de vapor del líquido.*

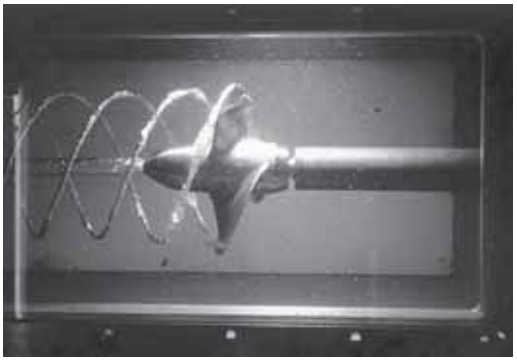


Fig. 1.12 Fotografía de una hélice sometida a cavitación en el túnel de agua del MIT. (Cortesía del Prof. S.A. Kinnas, Ocean Engineering Group, University of Texas-Austin.)

Ejemplo 1.5

Calcule el vacío necesario para causar cavitación en un flujo de agua a una temperatura de 80 ºC en Colorado, donde la elevación es de 2500 m.

Solución

La presión de vapor del agua a 80 ºC se da en la tabla B.1. Es 47.3 kPa absoluta. La presión atmosférica se encuentra por interpolación usando la tabla B.3 que es 79.48 – (79.48 – 61.64)500/2000 ≅ 75.0. La presión requerida es entonces

$$p = 47.3 - 75.0 = -27.7 \text{ kPa} \quad \text{o} \quad 27.7 \text{ kPa de vacío}$$

1.6 LEYES DE CONSERVACIÓN

Por experiencia, se ha encontrado que existen leyes fundamentales que parecen exactas; esto es, si se realizan experimentos con la mayor precisión y cuidado, las desviaciones a partir de estas leyes son muy pequeñas y, en efecto, las desviaciones serían incluso más pequeñas si se utilizaran técnicas experimentales mejoradas. Tres de estas leyes forman la base de nuestro estudio de mecánica de fluidos. La primera es la **conservación de la masa**, que establece que la materia es indestructible. Aun cuando la teoría de la relatividad de Einstein postula que, bajo ciertas condiciones, la materia es convertible en energía y lleva al enunciado de que las cantidades extraordinarias de radiación del Sol están asociadas con una conversión de 3.3×10^{14} kg de materia por día en energía, la destructibilidad de la materia bajo condiciones comunes de ingeniería no es medible y no viola el principio de la conservación de la masa.

Conservación de la masa: *La materia es indestructible.*

Para la segunda y tercera leyes es necesario introducir el concepto de un sistema. Un **sistema** se define como una cantidad fija de materia sobre la que se concentra la atención. Todo lo que sea externo al sistema está separado por los límites del sistema.

Sistema: *Una cantidad fija de materia.*

Estos límites pueden ser fijos o movibles, reales o imaginarios. Con esta definición podemos ahora presentar nuestra segunda ley fundamental, la *conservación de la cantidad de movimiento*: La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema. Una ley más específica basada en este principio es la **segunda ley de Newton**: La suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal del sistema. Existe una ley paralela para el momento de la cantidad de movimiento: La rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular es igual a la suma de todos los pares de torsión que actúan sobre el sistema.

Segunda ley de Newton: *La suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal del sistema.*

La tercera ley fundamental es la **conservación de la energía**, que también se conoce como *primera ley de la termodinámica:* La energía total de un sistema aislado permanece constante. Si un sistema está en contacto con el entorno, su energía aumenta sólo si la energía del entorno experimenta una disminución correspondiente. Se observa que la energía total está formada por energía potencial, cinética e interna, siendo esta última el contenido de energía debido a la temperatura del sistema. Otras formas de energía[7] no son consideradas en mecánica de fluidos. La primera ley de la termodinámica y otras relaciones termodinámicas se presentan en la siguiente sección.

Conservación de la energía: *La energía total de un sistema aislado permanece constante. También se conoce como* primera ley de la termodinámica.

1.7 PROPIEDADES Y RELACIONES TERMODINÁMICAS

Para fluidos incompresibles, las tres leyes mencionadas en la sección anterior son suficientes. Esto suele ser verdadero para líquidos pero también para gases si existen cambios relativamente pequeños en presión, densidad y temperatura. No obstante, para un fluido compresible, puede ser necesario introducir otras relaciones, de modo que los cambios de densidad, temperatura y presión sean debidamente tomados en cuenta. Un ejemplo es la predicción de cambios en densidad, presión y temperatura cuando un gas comprimido sale por la tobera de un cohete.

Las propiedades termodinámicas, las cantidades que definen el estado de un sistema, dependerán de la masa de un sistema o son independientes de la masa. La primera se denomina **propiedad extensiva**; la segunda, **propiedad intensiva**. Se puede obtener una propiedad intensiva al dividir la propiedad extensiva entre la masa del sistema. La temperatura y presión son propiedades intensivas; la cantidad de movimiento y la energía son propiedades extensivas.

Propiedad extensiva: *Propiedad que depende de la masa del sistema.*

Propiedad intensiva: *Propiedad que es independiente de la masa del sistema.*

1.7.1 Propiedades de un gas ideal

El comportamiento de los gases en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería puede ser descrito por la ley de un gas ideal, también llamada ley de un gas perfecto. Cuando la temperatura es relativamente baja y/o la presión relativamente alta, debe tenerse cuidado y aplicarse leyes de gases reales. Para el aire con temperaturas mayores que –50 ºC (–58 ºF) la ley de un gas ideal calcula de manera aproximada el comportamiento del aire a un grado aceptable siempre que la presión no sea extremadamente alta.

[7]Otras formas de energía incluyen la energía eléctrica y el campo magnético, la energía asociada con los átomos y la energía liberada durante la combustión.

La *ley de un gas ideal* está dada por

$$p = \rho RT \tag{1.7.1}$$

donde p es la presión absoluta, ρ la densidad, T la temperatura absoluta y R la constante del gas. La constante del gas está relacionada con la constante universal de los gases R_u por la relación

$$R = \frac{R_u}{M} \tag{1.7.2}$$

donde M es la masa molar. En la tabla B.4 del apéndice B están tabulados los valores de M y R. El valor de R_u es

$$\begin{aligned} R_u &= 8.314 \text{ kJ/kmol·K} \\ &= 49{,}710 \text{ ft-lb/slugmol-°R} \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Para el aire, M = 28.97 kg/kmol (28.97 slug/slugmol), de modo que para aire R = 0.287 kJ/kg·K (1716 ft-lb/slug-ºR), un valor que tiene amplio uso en cálculos relativos al aire.

Otras formas que toma la ley de un gas ideal son

$$p\forall = mRT \tag{1.7.4}$$

y

$$p\forall = nR_uT \tag{1.7.5}$$

donde n es el número de moles.

Ejemplo 1.6

Un tanque con un volumen de 0.2 m^3 contiene 0.5 kg de nitrógeno. La temperatura es 20 ºC. ¿Cuál es la presión?

Solución

Supóngase que es un gas ideal. Apliquemos la ecuación 1.7.1 (R se puede hallar en la tabla B.4). Resolviendo la ecuación, con $p = \rho RT$, obtenemos, usando $\rho = m/\forall$,

$$p = \frac{0.5 \text{ kg}}{0.2 \text{ m}^3} \times 0.2968 \frac{\text{kJ}}{\text{kg·K}} (20 + 273) \text{ K} = 218 \text{ kPa absoluta}$$

Nota: Las unidades resultantes son kJ/m^3 = kN · m/m^3 = kPa. La ley de un gas ideal requiere que la presión y la temperatura estén en unidades absolutas.

1.7.2 Primera ley de la termodinámica

CONCEPTO CLAVE *El intercambio de energía con el entorno es transferencia de calor o trabajo.*

En el estudio de fluidos incompresibles, la primera ley de la termodinámica es particularmente importante. La primera ley de la termodinámica establece que cuando un sistema, que es una cantidad fija de fluido, cambia del estado 1 al estado 2, su cambio de contenido de energía de E_1 a E_2 por intercambio de energía con su entorno. El intercambio de energía es en la forma de transferencia de calor o de trabajo. Si definimos la transferencia de calor al sistema como positiva y el trabajo realizado por el sistema como positivo,[8] la primera ley de la termodinámica se puede expresar como

$$Q_{1\text{-}2} - W_{1\text{-}2} = E_2 - E_1 \tag{1.7.6}$$

donde $Q_{1\text{-}2}$ es la cantidad de transferencia de calor al sistema y $W_{1\text{-}2}$ es la cantidad de trabajo realizado por el sistema. La energía E representa la energía total, que está formada por energía cinética ($mV^2/2$), potencial (mgz) e interna ($m\tilde{u}$), donde $\tilde{u}$ es la energía interna por unidad de masa; por lo tanto

$$E = m\left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u}\right) \tag{1.7.7}$$

Observe que $V^2/2$, gz y $\tilde{u}$ son propiedades intensivas y E es una propiedad extensiva.

Para un sistema aislado, uno que está termodinámicamente desconectado del entorno (es decir, $Q_{1\text{-}2} = W_{1\text{-}2} = 0$), la ecuación 1.7.6 se convierte en

$$E_1 = E_2 \tag{1.7.8}$$

CONCEPTO CLAVE *El trabajo resulta de una fuerza que se mueve una distancia.*

Esta ecuación representa la conservación de la energía.

El término de trabajo de la ecuación 1.7.6 resulta de una fuerza F que se mueve una distancia cuando actúa sobre el límite del sistema; si la fuerza se debe a una presión, está dado por

$$\begin{aligned} W_{1\text{-}2} &= \int_{l_1}^{l_2} F\,dl \\ &= \int_{l_1}^{l_2} pA\,dl = \int_{\forall_1}^{\forall_2} p\,d\forall \end{aligned} \tag{1.7.9}$$

donde $A\,dl = d\forall$. A continuación veamos un ejemplo que demuestra una aplicación de la primera ley de la termodinámica.

[8] En algunas presentaciones el trabajo realizado sobre el sistema es positivo, por lo que la ecuación 1.7.6 aparecería como $Q + W = \Delta E$. Cualquier opción es aceptable.

Ejemplo 1.7

Una carreta con masa de 2 slug es empujada hacia arriba por una rampa con una fuerza inicial de 100 lb (figura E1.7). La fuerza disminuye de acuerdo con

$$F = 5(20 - l) \text{ lb}$$

Si la carreta parte del reposo en $l = 0$, determine su velocidad después que se ha desplazado 20 ft hacia arriba por la rampa. Desprecie la fricción.

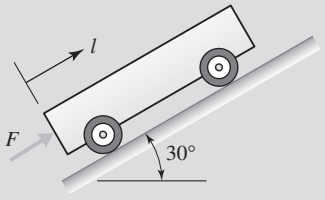


Fig. E1.7

Solución

La ecuación de la energía (ecuación 1.7.6) nos permite relacionar las cantidades de interés. Como no hay transferencia de calor, tenemos

$$-W_{1\text{-}2} = E_2 - E_1$$

Reconociendo que la fuerza está realizando trabajo en el sistema, el trabajo es negativo. Por lo tanto, la ecuación de energía se convierte en

$$-\left[-\int_0^{20} 5(20 - l)\, dl\right] = m\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - m\left(\cancel{\frac{V_1^2}{2}}^{\,0} + \cancel{gz_1}^{\,0}\right)$$

Tomando el nivel de referencia como $z_1 = 0$, tenemos $z_2 = 20 \text{ sen } 30^\circ = 10$ ft. Entonces

$$100 \times 20 - 5 \times \frac{20^2}{2} = 2\left(\frac{V_2^2}{2} + 32.2 \times 10\right)$$

$$\therefore V_2 = 18.9 \text{ ft/s}$$

Nota: Hemos supuesto que no hay cambio de energía interna ni transferencia de calor.

1.7.3 Otras cantidades termodinámicas

En fluidos compresibles a veces es útil definir cantidades termodinámicas que sean combinaciones de otras cantidades termodinámicas. Una de estas combinaciones es la suma $(m\tilde{u} + p\forall)$, que puede ser considerada como una propiedad del sistema; se encuentra en numerosos procesos termodinámicos. Esta propiedad se define como **entalpía** H:

Entalpía: *Propiedad creada para ayudar en cálculos de termodinámica.*

$$H = m\tilde{u} + p\forall \tag{1.7.10}$$

La propiedad intensiva correspondiente (H/m) es

$$h = \tilde{u} + \frac{p}{\rho} \tag{1.7.11}$$

CONCEPTO CLAVE *Se usan el calor específico a volumen constante y el calor específico a presión constante para calcular cambios de entalpía y energía interna.*

Otras cantidades termodinámicas útiles son el *calor específico a presión constante* c_p y el *calor específico a volumen constante* c_v; se usan para calcular los cambios de entalpía y de energía interna en un gas ideal como sigue:

$$\Delta h = \int c_p \, dT \tag{1.7.12}$$

y

$$\Delta \tilde{u} = \int c_v \, dT \tag{1.7.13}$$

Para muchas situaciones podemos suponer calores específicos constantes en las relaciones anteriores. En la tabla B.4 aparecen calores específicos para gases comunes. Para un gas ideal c_p se relaciona con c_v utilizando la ecuación 1.7.11 en forma diferencial:

$$dh = d\tilde{u} + RdT \qquad c_p = c_v + R \tag{1.7.14}$$

Relación entre calores específicos: *Relación entre c_p y c_v.*

donde empleamos $p/\rho = RT$. La **relación entre calores específicos** k es de uso frecuente para un gas ideal; se expresa como

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{1.7.15}$$

Para líquidos y sólidos usamos $\Delta u = c\,\Delta T$ donde c es el calor específico de la sustancia. Para el agua, $c \cong 4.18$ kJ/kg·ºC (1 Btu/lb-ºF).

Un proceso en el que la presión, la temperatura y otras propiedades son esencialmente constantes en cualquier instante en todo el sistema se denomina proceso en **cuasiequilibrio** o proceso *cuasiestático*. Un ejemplo de tal proceso es la compresión y expansión en el cilindro de un motor de combustión interna.[9] Si, además, no se transfiere calor ($Q_{1\text{-}2} = 0$), el proceso se denomina *adiabático*, proceso en cuasiequilibrio o proceso *isentrópico*. Para tal proceso isentrópico[10] se pueden usar las relaciones:

Proceso en cuasiequilibrio: *Proceso en el que las propiedades son esencialmente constantes en cualquier instante en todo un sistema.*

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1} \tag{1.7.16}$$

[9] A pesar de que estos procesos pueden parecer rápidos, son termodinámicamente lentos. Las moléculas se mueven muy rápido.

[10] Un proceso isentrópico se produce cuando la entropía es constante. No vamos a definir o calcular la entropía aquí, sino que se discutirá en la sección 9.1.

Para una pequeña onda de presión que se desplaza en un gas a una frecuencia relativamente baja, la velocidad de la onda está dada por un proceso isentrópico de modo que

$$c = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s} = \sqrt{kRT} \tag{1.7.17}$$

Si la frecuencia es relativamente alta, la entropía no es constante y usamos

$$c = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_T} = \sqrt{RT} \tag{1.7.18}$$

Éstas son las principales relaciones termodinámicas que usaremos cuando consideremos fluidos compresibles.

Ejemplo 1.8

Un cilindro equipado con un pistón tiene un volumen inicial de 0.5 m^3. Contiene 2.0 kg de aire a 400 kPa absoluta. Se transfiere calor al aire mientras que la presión permanece constante hasta que la temperatura es de 300 °C. Calcule la transferencia de calor y el trabajo realizado. Suponga calores específicos constantes.

Solución

Usando la primera ley, ecuación 1.7.9, y la definición de entalpía, vemos que

$$\begin{aligned} Q_{1\text{-}2} &= p_2\mathcal{V}_2 - p_1\mathcal{V}_1 + m\tilde{u}_2 - m\tilde{u}_1 \\ &= m\tilde{u}_2 + p_2\mathcal{V}_2 - (m\tilde{u}_1 + p_1\mathcal{V}_1) \\ &= H_2 - H_1 = m(h_2 - h_1) = mc_p(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

donde se usa la ecuación 1.7.12 suponiendo que c_p es constante. La temperatura inicial es

$$T_1 = \frac{p_1\mathcal{V}_1}{mR} = \frac{400 \text{ kN/m}^2 \times 0.5 \text{ m}^3}{2.0 \text{ kg} \times 0.287 \text{ kJ/kg·K}} = 348.4 \text{ K}$$

(Use kJ = kN·m para comprobar las unidades.) De este modo, la transferencia de calor es (c_p se encuentra en la tabla B.4)

$$Q_{1\text{-}2} = 2.0 \times 1.0[(300 + 273) - 348.4] = 449 \text{ kJ}$$

El volumen final se encuentra usando la ley de un gas ideal:

$$\mathcal{V}_2 = \frac{mRT_2}{p_2} = \frac{2 \text{ kg} \times (0.287 \text{ kJ/kg·K}) \times 573 \text{ K}}{400 \text{ kN/m}^2} = 0.822 \text{ m}^3$$

El trabajo realizado para el proceso a presión constante es, usando la ecuación 1.7.9 con p = constante,

$$\begin{aligned} W_{1\text{-}2} &= p(\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1) \\ &= 400 \text{ kN/m}^2(0.822 - 0.5) \text{ m}^3 = 129 \text{ kN·m o } 129 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.9

La temperatura en un frío día de invierno en las montañas de Wyoming es –22 ºF a una elevación de 10 000 ft. Calcule la densidad del aire suponiendo la misma presión que la atmósfera local; también encuentre la velocidad del sonido.

Solución

De la tabla B.3 encontramos que la presión atmosférica a una elevación de 10 000 ft es 10.1 psi. Se encuentra que la temperatura absoluta es

$$T = -22 + 460 = 438\ ^\circ\text{R}$$

Usando la ley de un gas ideal, se calcula que la densidad es

$$\rho = \frac{p}{RT}$$
$$= \frac{10.1\ \text{lb/in}^2 \times 144\ \text{in}^2/\text{ft}^2}{(1716\ \text{ft-lb/slug-}^\circ\text{R}) \times 438\ ^\circ\text{R}} = 0.00194\ \text{slug/ft}^3$$

La velocidad del sonido, usando la ecuación 1.7.17, se determina que es

$$c = \sqrt{kRT}$$
$$= \sqrt{1.4 \times (1716\ \text{ft-lb/slug-}^\circ\text{R}) \times 438\ ^\circ\text{R}} = 1026\ \text{ft/s}$$

Nota: La constante de gas en las ecuaciones anteriores tiene unidades de ft-lb/slug-ºR de modo que resultan las unidades apropiadas. Exprese slug = lb-s^2/ft (de $m = F/a$) para observar que esto es verdadero.

1.8 RESUMEN

Para relacionar unidades a veces usamos la segunda ley de Newton, que nos permite escribir

$$\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad \text{lb} = \text{slug-ft/s}^2 \tag{1.8.1}$$

Al hacer cálculos de ingeniería, una respuesta debe tener el mismo número de cifras significativas que el número menos preciso empleado en los cálculos. Se sabe que la mayoría de las propiedades de los fluidos son a cuatro cifras significativas como máximo. En consecuencia, las respuestas deben expresarse también con cuatro cifras significativas como máximo, y con frecuencia con sólo tres cifras significativas.

En mecánica de fluidos, la presión se expresa como presión manométrica a menos que se indique de otra manera. Esto es diferente de la termodinámica, en donde se supone que la presión es absoluta. Si se necesita la presión absoluta, se agregan 101 kPa si la presión atmosférica no está dada en el enunciado del problema.

La densidad de un fluido, o peso específico, se conoce si se conoce la gravedad específica:

$$\rho_x = S_x \rho_{\text{agua}} \qquad \gamma_x = S_x \gamma_{\text{agua}} \tag{1.8.2}$$

El esfuerzo cortante debido a efectos viscosos en un flujo simple donde $u = u(y)$ está dado por

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.8.3}$$

Este esfuerzo se puede usar para calcular el par de torsión necesario para hacer girar un eje en un cojinete.

Se supone que muchos flujos de aire, y también otros gases, son incompresibles a bajas velocidades, por debajo de unos 100 m/s (220 mph) para aire atmosférico.

Las tres leyes fundamentales que se usan en nuestro estudio de mecánica de fluidos son la conservación de la masa, la segunda ley de Newton y la primera ley de la termodinámica. Éstas tomarán varias formas, dependiendo del problema en cuestión. Buena parte de nuestro estudio de mecánica de fluidos se expresará en estas leyes en formas matemáticas, para que las cantidades de interés puedan calcularse.

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

1.1 Si fuerza, longitud y tiempo se seleccionan como las tres dimensiones fundamentales, las unidades de masa en el sistema SI podrían escribirse como:

(A) FT^2/L **(B)** FL/T^2
(C) $\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$ **(D)** $\text{N}\cdot\text{m}/\text{s}^2$

1.2 Seleccione las dimensiones de viscosidad usando el sistema *F-L-T*:

(A) FT^2/L
(B) FT/L^2
(C) $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
(D) $\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$

1.3 La cantidad 2.36×10^{-8} Pa se puede escribir como:

(A) 23.6 nPa **(B)** 236 μPa
(C) 236×10^{-3} mPa **(D)** 236 nPa

1.4 Un cuerpo que pesa 250 N en la Tierra, ¿cuánto pesaría en la Luna, donde $g \cong 1.6\ \text{m/s}^2$?

(A) 5030 N **(B)** 250 N
(C) 40.77 N **(D)** 6.2 N

1.5 Una fuerza de 4 200 N actúa sobre un área de 250 cm a un ángulo de 30º respecto a la normal. El esfuerzo cortante que actúa sobre el área es:

(A) 84 Pa **(B)** 84 mPa
(C) 84 kPa **(D)** 84 MPa

1.6 La temperatura a 11 000 m en la atmósfera estándar, usando una interpolación parabólica de las anotaciones de la tabla B.3, es más cercana a:

(A) –62.4 °C **(B)** –53.6 °C
(C) –32.8 °C **(D)** –17.3 °C

1.7 Usando una ecuación, calcule la densidad del agua a 80 ºC:

(A) $980\ \text{kg/m}^3$ **(B)** $972\ \text{kg/m}^3$
(C) $976\ \text{kg/m}^3$ **(D)** $968\ \text{kg/m}^3$

1.8 La distribución de velocidad en un tubo de 4 cm de diámetro que transporta agua a 20 ºC está dada por $u(r) = 10(1 - 2\,500r^2)$ m/s. El esfuerzo cortante en la pared es más cercano a:

(A) 1.0 Pa **(B)** 0.1 Pa
(C) 0.01 Pa **(D)** 0.001 Pa

1.9 La distancia que una cantidad de agua a 20 ºC subiría en un tubo largo de vidrio limpio, de 10 μm de diámetro, es más cercana a:

(A) 50 cm **(B)** 100 cm
(C) 200 cm **(D)** 300 cm

1.10 ¿Cuál de las siguientes es una propiedad intensiva?

(A) Energía cinética **(B)** Entalpía
(C) Densidad **(D)** Cantidad de movimiento

1.11 La masa de propano contenida en un tanque de 4 m^3 mantenida a 800 kPa y 10 ºC es más cercana a:

(A) 100 kg **(B)** 80 kg
(C) 60 kg **(D)** 20 kg

1.12 Cinco cubos de hielo de 40 cm^3 se derriten por completo en 2 litros de agua caliente (se necesitan 320 kJ para derretir un kilogramo de hielo). La caída de temperatura en el agua es más cercana a:

(A) 10 °C **(B)** 8 °C
(C) 6 °C **(D)** 4 °C

1.13 La velocidad del sonido de un silbato para perros en la atmósfera, en un lugar donde la temperatura es 50 ºC, es más cercana a:

(A) 396 m/s **(B)** 360 m/s
(C) 332 m/s **(D)** 304 m/s

PROBLEMAS

Dimensiones, unidades y cantidades físicas

1.14 Exprese las tres leyes básicas que se usan en el estudio de la mecánica de fluidos. Exprese al menos una cantidad global (integral) que se presenta en cada una. Indique al menos una cantidad que pueda ser definida en un punto que se presenta en cada una.

1.15 Verifique las dimensiones dadas en la tabla 1.2 para las siguientes cantidades:

(a) Densidad **(b)** Presión
(c) Potencia **(d)** Energía
(e) Masa **(f)** Gasto

1.16 Exprese las dimensiones de las siguientes cantidades usando el sistema *F-L-T*:

(a) Densidad **(b)** Presión
(c) Potencia **(d)** Energía
(e) Flujo másico **(f)** Gasto

1.17 Reconociendo que todos los términos de una ecuación deben tener las mismas dimensiones, determine las dimensiones en las constantes de las siguientes ecuaciones:

(a) $d = 4.9t^2$ donde d es distancia y t es tiempo.
(b) $F = 9.8\,m$ donde F es una fuerza y m es masa.
(c) $Q = 80AR^{2/3}S_0^{1/2}$ donde A es el área, R es un radio, S_0 es una pendiente y Q es un gasto con dimensiones de L^3/T.

1.18 Determine las unidades en cada una de las constantes de las siguientes ecuaciones, reconociendo que todos los términos de una ecuación tienen las mismas dimensiones:

(a) $d = 4.9t^2$ donde d está en metros y t en segundos.
(b) $F = 9.8\,m$ donde F está en newtons y m en kilogramos.
(c) $Q = 80AR^{2/3}S_0^{1/2}$ donde A está en metros cuadrados, R en metros, S_0 es la pendiente y Q tiene unidades de metros cúbicos por segundo.

1.19 Exprese las unidades del SI de la tabla 1.1 en cada uno de lo siguiente:

(a) Presión **(b)** Energía
(c) Potencia **(d)** Viscosidad
(e) Flujo de calor **(f)** Calor específico

1.20 Determine las unidades de c, k y $f(t)$ en $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{dy}{dt} + ky = f(t)$ si m está en kilogramos, y en metros y t en segundos.

1.21 Escriba lo siguiente con el uso de prefijos:

(a) 2.5×10^5 N **(b)** 5.72×10^{11} Pa
(c) 4.2×10^{-8} Pa **(d)** 1.76×10^{-5} m^3
(e) 1.2×10^{-4} m^2 **(f)** 7.6×10^{-8} m^3

1.22 Escriba lo siguiente con el uso de potencias; no use prefijos:

(a) 125 MN **(b)** 32.1 μs
(c) 0.67 GPa **(d)** 0.0056 mm^3
(e) 520 cm^2 **(f)** 7.8 km^3

1.23 Reescriba la ecuación 1.3.3 usando las unidades inglesas de la tabla 1.1.

1.24 Usando la tabla de conversiones que aparece en la primera de forros de este libro, exprese cada una de las siguientes cantidades en unidades del SI de la tabla 1.2:

(a) 20 cm/h **(b)** 2000 rpm
(c) 500 hp **(d)** 100 ft^3/min
(e) 2000 kN/cm^2 **(f)** 4 slug/min
(g) 500 g/L **(h)** 500 kWh

1.25 ¿Qué fuerza neta es necesaria para acelerar una masa de 10 kg a razón de 40 m/s^2 (desprecie la fricción):

(a) horizontalmente?
(b) verticalmente hacia arriba?
(c) en la pendiente de 30º hacia arriba?

1.26 Un cuerpo particular pesa 60 lb en la Tierra. Calcule su peso en la Luna, donde $g \cong 5.4$ ft/s^2.

1.27 Calcule la trayectoria media libre en la atmósfera usando la ecuación 1.3.3 y la tabla B.3 del apéndice a una elevación de:

(a) 30 000 m
(b) 50 000 m
(c) 80 000 m

Presión y temperatura

1.28 Una presión manométrica de 52.3 kPa se lee en un manómetro. Encuentre la presión absoluta si la elevación es:
- **(a)** Al nivel del mar
- **(b)** 1 000 m
- **(c)** 5 000 m
- **(d)** 10 000 m
- **(e)** 30 000 m

1.29 Un vacío de 31 kPa se mide en una corriente de aire al nivel del mar. Encuentre la presión absoluta en:
- **(a)** kPa
- **(b)** mm Hg
- **(c)** psi
- **(d)** ft H_2O
- **(e)** in. Hg

1.30 Para una atmósfera a temperatura constante, la presión como función de la elevación está dada por $p(z) = p_0 e^{-gz/RT}$, donde g es la gravedad, $R = 287$ J/kg·K, y T es la temperatura absoluta. Use esta ecuación y calcule la presión a 4 000 m suponiendo que $p_0 = 101$ kPa y $T = 15$ ºC. ¿Cuál es el error?

1.31 Calcule la presión y la temperatura a una elevación de 22560 ft usando la tabla B.3 de unidades inglesas. Utilice:
- **(a)** Una interpolación lineal: $f \simeq f_0 + n(f_1 - f_0)$.
- **(b)** Una interpolación parabólica: $f \simeq f_0 + n(f_1 - f_0) + (n/2)(n-1)(f_2 - 2f_1 + f_0)$.

1.32 Calcule la temperatura en ºC y ºF a 33 000 ft, una elevación a la que vuelan muchos aviones comerciales. Use la tabla B.3 de unidades inglesas.

1.33 Una fuerza aplicada de 26.5 MN está distribuida uniformemente sobre un área de 152 cm^2; no obstante, actúa a un ángulo de 42º respecto a un vector normal (vea la figura P1.33). Si produce un esfuerzo compresivo, calcule la presión resultante.

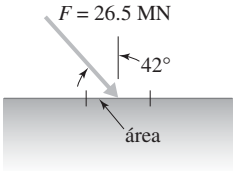


Fig. P1.33

1.34 La fuerza sobre un área de 0.2 cm^2 se debe a una presión de 120 kPa y un esfuerzo cortante de 20 Pa, como se muestra en la figura P1.34. Calcule la magnitud de la fuerza que actúa sobre el área y el ángulo de la fuerza respecto a una coordenada normal.

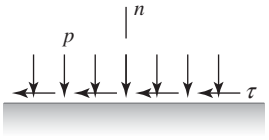


Fig. P1.34

Densidad y peso específico

1.35 Calcule la densidad y el peso específico del agua si 0.2 slug ocupan 180 in^3.

1.36 Use la ecuación 1.5.3 para determinar la densidad y la gravedad específica del agua a 70 ºC. ¿Cuál es el error en el cálculo de la densidad? Use la tabla B.1.

1.37 La gravedad específica del mercurio por lo común se toma como 13.6. ¿Cuál es el porcentaje de error al usar un valor de 13.6 a 50 ºC?

1.38 El peso específico de un líquido desconocido es de 12 400 N/m^3. ¿Qué masa del líquido está contenida en un volumen de 500 cm^3? Use:
- **(a)** El valor estándar de la gravedad.
- **(b)** El valor mínimo de la gravedad en la Tierra.
- **(c)** El valor máximo de la gravedad en la Tierra.

1.39 Un líquido con una gravedad específica de 1.2 llena un volumen. Si la masa del volumen es 10 slug, ¿cuál es la magnitud del volumen?

Viscosidad

1.40 En sistemas de combustión que queman combustibles de hidrocarburos, el dióxido de carbono que se produce eventualmente escapa a la atmósfera, con lo que contribuye al calentamiento global. Calcule la densidad, el peso específico, la viscosidad y la viscosidad cinemática del dióxido de carbono a una presión de 200 kPa absoluta y a 90 ºC.

1.41 En un motor de un solo cilindro, un pistón sin anillos está diseñado para deslizarse libremente dentro del cilindro vertical. La lubricación entre el pistón y el cilindro es mantenida por una delgada película de aceite. Determine la velocidad con la que un pistón de 120 mm de diámetro caerá dentro del cilindro de 120.5 mm de diámetro. El pistón de 350 g mide 10 cm de largo. El lubricante es aceite SAE 10W-30 a 60 ºC.

1.42 Considere un flujo de fluido entre dos placas paralelas que están separadas 5 cm, como se muestra en la figura P1.42. La distribución de velocidad para el flujo está dada por $u(y) = 120(0.05y - y^2)$ m/s donde y está en metros. El fluido es agua a 10 ºC. Calcule la magnitud del esfuerzo cortante que actúa sobre cada una de las placas.

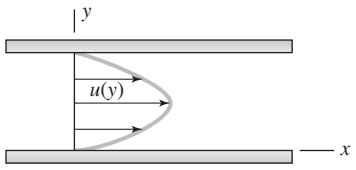


Fig. P1.42

1.43 La distribución de velocidad en un tubo de 2 pulgadas de diámetro está dada por $u(r) = 30(1 - r^2/r_0^2)$ ft/s, donde r_0 es el radio del tubo. Calcule el esfuerzo cortante en la pared si está fluyendo agua a 75 ºF.

1.44 La distribución de velocidad en un tubo de 1.0 cm de diámetro está dada por $u(r) = 16(1 - r^2/r_0^2)$ m/s, donde r_0 es el radio del tubo. Calcule el esfuerzo cortante en la línea central, en $r = 0.25$ cm, y en la pared si está fluyendo agua a 20 ºC.

1.45 Para dos cilindros concéntricos giratorios de 0.2 m de largo, la distribución de velocidad está dada por $u(r) = 0.4/r - 1000r$ m/s. Si los diámetros de los cilindros son 2 cm y 4 cm, respectivamente, calcule la viscosidad del fluido si el par de torsión en el cilindro interno se mide y se encuentra que es de 0.0026 N · m.

1.46 Un eje de 4 ft de largo y 1 pulgada de diámetro gira dentro de un cilindro igualmente largo de 1.02 pulgadas de diámetro. Calcule el par de torsión requerido para hacer girar el eje interno a 2000 rpm si el espacio entre los cilindros está lleno con aceite SAE-30 a 70 ºF. También, calcule los caballos de fuerza necesarios. Suponga cilindros concéntricos.

1.47 Una banda de 60 cm de ancho se mueve a 10 m/s, como se muestra en la figura P1.47. Calcule el requerimiento de potencia suponiendo un perfil de velocidad lineal en el agua a 10 ºC.

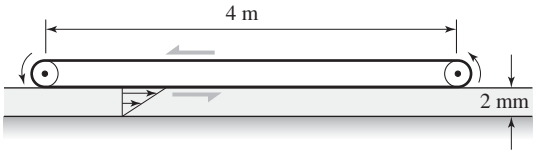


Fig. P1.47

1.48 Un disco horizontal de 6 pulgadas de diámetro gira una distancia de 0.08 pulgadas sobre una superficie sólida. Agua a 60 ºF llena el espacio. Estime el par de torsión requerido para hacer girar el disco a 400 rpm.

1.49 Calcule el par de torsión necesario para hacer girar el cono que se muestra en la figura P1.49 a 2000 rpm si el espacio está lleno con aceite SAE-30 a 40 ºC. Suponga un perfil de velocidad lineal entre el cono y la pared fija.

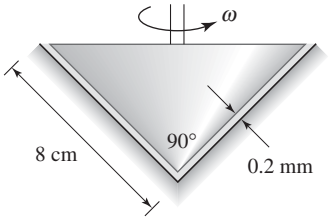


Fig. P1.49

1.50 Un diagrama de cuerpo libre del líquido entre una banda móvil y una pared fija muestra que el esfuerzo cortante en el líquido es constante. Si la temperatura varía de acuerdo con $T(y) = K/y$, donde y se mide desde la pared (la temperatura en la pared es muy grande), ¿cuál sería la forma del perfil de velocidad si la viscosidad varía de acuerdo con la ecuación de Andrade $\mu = Ae^{B/T}$?

1.51 La viscosidad del agua a 20 ºC es 0.001 N·s/m^2 y a 80 ºC es 3.57×10^{-4} N·s/m^2. Usando la ecuación de Andrade $\mu = Ae^{B/T}$ calcule la viscosidad del agua a 40 ºC. Determine el porcentaje de error.

Compresibilidad

1.52 Demuestre que $d\rho/\rho = -d\mathcal{V}/\mathcal{V}$, como se supuso en la ecuación 1.5.11.

1.53 ¿Cuál es el cambio de volumen de 2 m^3 de agua a 20 ºC debido a una presión aplicada de 10 MPa?

1.54 Dos ingenieros desean estimar la distancia de un lado al otro de un lago. Uno de ellos hace chocar dos piedras bajo el agua en un lado del lago y el otro sumerge la cabeza y escucha un leve sonido 0.62 s después, como lo indica un cronómetro muy preciso. ¿Cuál es la distancia entre los dos ingenieros?

1.55 Se aplica una presión a 20 L de agua. Se observa que el volumen disminuye a 18.7 L. Calcule la presión aplicada.

1.56 Calcule la velocidad de propagación de una onda de pequeña amplitud en agua a:

(a) 40 ºF

(b) 100 ºF

(c) 200 ºF

1.57 El cambio en volumen de un líquido con la temperatura está dado por $\Delta \mathcal{V} = \alpha_T \mathcal{V} \Delta T$, donde α_T es el *coeficiente de dilatación térmica*. Para agua a 40 ºC, $\alpha_T = 3.8 \times 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$. ¿Cuál es el cambio de volumen de 1 m^3 de agua a 40 ºC si $\Delta T = -20$ ºC? ¿Qué cambio de presión sería necesario para causar el mismo cambio de volumen?

Tensión superficial

1.58 Calcule la presión en las pequeñas gotitas de 10 µm de diámetro que son formadas por máquinas de aspersores. Suponga que las propiedades son las mismas que el agua a 15 ºC. Calcule la presión para burbujas del mismo tamaño.

1.59 Una pequeña burbuja de 1/16 de pulgada es formada por una corriente de agua a 60 ºF. Calcule la presión dentro de la burbuja.

1.60 En motores diesel, se inyecta combustible directamente en el cilindro del motor durante la carrera de compresión donde el promedio de presión del aire podría llegar a 8 000 kPa. Suponiendo que se formen gotitas de combustible cuando éste fluye desde el inyector, determine la presión interna en una gotita esférica de 5 µm de diámetro. La tensión superficial para combustible diesel en aire es de 0.025 N/m.

1.61 Determine la altura a la que subiría agua a 20 ºC en un tubo vertical de 0.02 cm de diámetro, si se adhiere a la pared con un ángulo β de 30º respecto a la vertical.

1.62 El mercurio forma un ángulo de 130º (β en la figura 1.10) cuando está en contacto con vidrio limpio. ¿Qué distancia descenderá el mercurio en un tubo vertical de vidrio de 0.8 pulgadas de diámetro? Use $\sigma = 0.032$ lb/ft.

1.63 Encuentre una expresión para la subida de líquido entre dos placas paralelas que están separadas una distancia t. Use un ángulo de contacto β y tensión superficial σ.

1.64 Escriba una expresión para el diámetro máximo d de una aguja de longitud L que puede flotar en un líquido con una tensión superficial σ. La densidad de la aguja es ρ.

1.65 ¿Una aguja de acero de 4 mm de diámetro y 7 cm de largo podría flotar en agua a 15 ºC? Use $\rho_{\text{acero}} = 7\,850\ \mathrm{kg/m^3}$.

1.66 Encuentre una expresión para la fuerza vertical máxima F necesaria para levantar lentamente un anillo de alambre delgado de diámetro D, de un líquido con tensión superficial σ.

1.67 Dos placas planas están colocadas como se muestra en la figura P1.67 con un pequeño ángulo α en un recipiente abierto con una pequeña cantidad de líquido. Las placas están verticales y el líquido sube entre las placas. Encuentre una expresión para la ubicación $h(x)$ de la superficie del líquido suponiendo que $\beta = 0$.

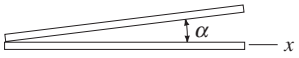


Fig. P1.67

Presión de vapor

1.68 Se transporta agua por el tubo de la figura P1.68 tal que existe un vacío de 80 kPa en un lugar en particular. ¿Cuál es la máxima temperatura posible del agua? Use $p_{\text{atm}} = 92$ kPa.

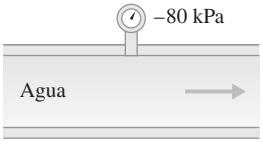


Fig. P1.68

1.69 Un grupo de exploradores deseaba conocer su elevación. Un ingeniero hirvió agua, midió la temperatura y encontró que era de 82 ºC. ¡Encontraron un libro de mecánica de fluidos en una mochila y el ingeniero les dijo su elevación! ¿Qué elevación debió indicar el ingeniero?

1.70 Un tanque lleno a la mitad con agua a 40 ºC ha de ser vaciado. ¿Cuál es la presión mínima que puede esperarse en el espacio arriba del agua?

1.71 Se fuerza agua por medio de una contracción, ocasionando así una baja presión. Se observa que el agua "hierve" a una presión de –11.5 psi. Si la presión atmosférica es de 14.5 psi, ¿cuál es la temperatura del agua?

1.72 Se transporta aceite por un oleoducto por medio de una serie de bombas que pueden producir una presión de 10 MPa en el aceite que sale de cada bomba. Las pérdidas en el oleoducto causan una caída de presión de 600 kPa cada kilómetro. ¿Cuál es la máxima separación posible de las bombas?

Gas ideal

1.73 Determine la densidad y la gravedad específica del aire en condiciones estándar (es decir, 15 ºC y 101.3 kPa absoluta).

1.74 Calcule la densidad del aire adentro y afuera de una casa usando 20 ºC adentro y –25 ºC afuera. Use una presión atmosférica de 85 kPa. ¿Cree usted que habría un movimiento de aire del interior al exterior (infiltración), aun sin un viento? Explique.

1.75 Un tanque de aire de 15 ft^3 está presurizado a 750 psia. Cuando la temperatura alcanza 10 ºF, calcule la densidad y la masa del aire.

1.76 Calcule el peso del aire contenido en un salón de clases que mide 10 m × 20 m × 4 m. Suponga valores razonables para las variables.

1.77 Un neumático de un automóvil está presurizado a 35 psi en Michigan, donde la temperatura es de –10 ºF. El auto es conducido a Arizona, donde la temperatura en la carretera, y en el neumático, llega a 150 ºF. Calcule la máxima presión en el neumático.

1.78 La masa de todo el aire en la atmósfera contenida arriba de un área de 1 m^2 ha de estar contenida en un volumen esférico. Estime el diámetro de la esfera si el aire está en condiciones estándar.

Primera ley

1.79 Un cuerpo cae desde el reposo. Determine su velocidad después de 10 ft y 20 ft, usando la ecuación de la energía.

1.80 Determine la velocidad final de la masa de 15 kg de la figura P1.80 que se mueve horizontalmente, si arranca a 10 m/s y avanza una distancia de 10 m mientras que la siguiente fuerza neta actúa en la dirección del movimiento (donde s es la distancia en la dirección del movimiento):

(a) 200 N **(b)** 20s N

(c) 200 cos ($s\pi$/20) N

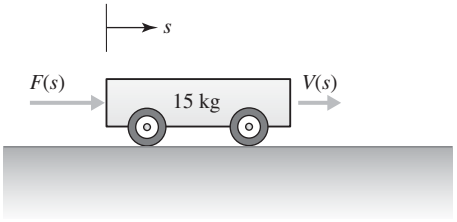


Fig. P1.80

1.81 La masa de 10 kg que se muestra en la figura P1.81 está en movimiento a 40 m/s y golpea un émbolo conectado a un pistón. El pistón comprime 0.2 kg de aire contenido en un cilindro. Si la masa es llevada al reposo, calcule la máxima elevación de temperatura del aire. ¿Qué efectos podrían llevar a una menor elevación de temperatura?

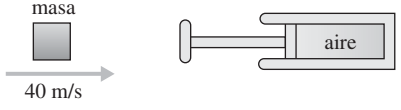


Fig. P1.81

1.82 Un automóvil de 1 500 kg que se desplaza a 100 km/h es sujetado de pronto por un gancho, y toda su energía cinética es disipada en un amortiguador hidráulico que contiene 2000 cm^3 de agua. Calcule la máxima elevación de temperatura en el agua.

1.83 Una masa de combustible de 0.2 kg contiene 40 MJ/kg de energía. Calcule la elevación de temperatura de 100 kg de agua si ocurre una combustión completa y el agua, que rodea al combustible, queda aislada por completo del entorno.

1.84 Cuatro libras de aire se comprimen en un mecanismo de cilindro-pistón, en tanto que la temperatura permanece constante a 70 ºF. Si la presión inicial es de 30 psi absoluta, calcule el trabajo necesario para comprimir el aire de modo que se duplique la presión absoluta. También calcule la transferencia de calor.

1.85 Determine la transferencia de calor necesaria para duplicar la presión absoluta en un volumen fijo de 2 m^3 que contiene aire a 200 kPa absoluta, si la temperatura inicial es:

(a) 20 ºC

(b) 100 ºC

(c) 200 ºC

1.86 Se transfiere calor a 2 kg de aire en un cilindro, de modo que la temperatura se duplica mientras que la presión permanece constante. ¿Qué trabajo se requiere si la temperatura inicial es:

(a) 60 ºC?

(b) 150 ºC?

(c) 200 ºC?

1.87 Fluye aire desde un tanque que se mantiene a una presión de 5 Mpa absoluta y a 20 ºC. Sale por un agujero y alcanza una presión de 500 kPa absoluta. Suponiendo un proceso adiabático, cuasi equilibrado, calcule la temperatura existente.

1.88 Circula una corriente de aire sin transferencia de calor, de modo que la temperatura cambia de 20 ºC a 150 ºC. Si la presión inicial se mide y es de 150 kPa, calcule la máxima presión final.

1.89 Se comprime aire en un cilindro aislado de 20 ºC a 200 ºC. Si la presión inicial es 100 kPa absoluta, ¿cuál es la máxima presión final? ¿Qué trabajo se requiere?

Velocidad del sonido

1.90 Calcule la velocidad del sonido a 20 ºC en:

(a) Aire

(b) Dióxido de carbono

(c) Nitrógeno

(d) Hidrógeno

(e) Vapor

1.91 Compare la velocidad del sonido en la atmósfera a una elevación de 10 000 m con la velocidad al nivel del mar, calculando una disminución porcentual.

1.92 Un leñador, a lo lejos, está cortando un árbol con un hacha. Un observador, usando su cronómetro digital, mide un tiempo de 8.32 s desde el instante en que el hacha golpea el árbol hasta que se escucha el sonido. ¿A qué distancia está el observador del leñador si:

(a) $T = -20$ ºC?

(b) $T = 20$ ºC?

(c) $T = 45$ ºC?

La Morrow Point Dam es un ejemplo de una presa de tipo de arco. La pared curva hace posible resistir grandes cargas hidrostáticas en su cara aguas arriba, minimizando así el grosor necesario de la estructura. (U.S. Bureau of Reclamation)

2

Estática de fluidos

Esquema

2.1 Introducción
2.2 Presión en un punto
2.3 Variación de presión
2.4 Fluidos en reposo
  2.4.1 Presiones en líquidos en reposo
  2.4.2 Presiones en la atmósfera
  2.4.3 Manómetros
  2.4.4 Fuerzas sobre áreas planas
  2.4.5 Fuerzas sobre superficies curvas
  2.4.6 Flotabilidad
  2.4.7 Estabilidad
2.5 Recipientes linealmente acelerados
2.6 Recipientes giratorios
2.7 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Establecer la variación de la presión de un fluido en reposo.
- Aprender cómo usar manómetros para medir la presión.
- Calcular fuerzas sobre superficies planas y curvas incluyendo fuerzas de flotación.
- Determinar la estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes.
- Calcular presiones y fuerzas en recipientes acelerados y giratorios.
- Presentar numerosos ejemplos y problemas que demuestran cómo calcular presiones y fuerzas en fluidos en reposo.

2.1 INTRODUCCIÓN

Estática de fluidos: *Estudio de fluidos en los que no hay movimiento relativo entre sus partículas.*

La **estática de fluidos** es el estudio de fluidos en los que no hay movimiento relativo entre sus partículas. Si no hay movimiento relativo, no existen esfuerzos cortantes porque los gradientes de velocidad, por ejemplo du/dy, se requieren para que haya esfuerzos cortantes. El único esfuerzo que existe es un esfuerzo normal, la presión, de modo que ésta tiene la mayor importancia en estática de fluidos.

CONCEPTO CLAVE *El único esfuerzo que existe donde no hay movimiento es un esfuerzo normal, la presión.*

Se investigarán tres situaciones, descritas en la figura 2.1, que comprenden estática de fluidos. Incluyen fluidos en reposo, por ejemplo agua empujando contra una represa, fluidos contenidos en dispositivos que experimentan aceleración lineal, y fluidos contenidos en cilindros giratorios. En cada una de estas situaciones el fluido está en equilibrio estático respecto a un marco de referencia unido al límite que circunda al fluido. Además de los ejemplos mostrados para fluidos en reposo, consideramos instrumentos llamados manómetros e investigamos las fuerzas de flotación. Por último, también expondremos la estabilidad de cuerpos flotantes tales como barcos.

2.2 PRESIÓN EN UN PUNTO

Hemos definido la presión como una fuerza de compresión normal infinitesimal dividida entre el área infinitesimal sobre la cual actúa. Esto define la presión en un punto. Podríamos preguntar si la presión en un punto determinado varía cuando la normal al área cambia de dirección. Para demostrar que éste no es el caso, incluso para fluidos en movimiento no sometidos a un esfuerzo cortante, considere el elemento en forma de cuña de profundidad unitaria (en la dirección z) que se muestra en la figura 2.2. Suponga que una presión p actúa sobre la hipotenusa y que una presión diferente actúa sobre cada una de las otras áreas, como se ilustra. Como las fuerzas sobre las dos caras extremas están en la dirección z, no las hemos incluido en el elemento. Ahora, apliquemos la segunda ley de Newton al elemento, en las direcciones x y y:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = ma_x: &\qquad p_x \Delta y - p\Delta s \operatorname{sen}\theta = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} a_x \\ \Sigma F_y = ma_y: &\qquad p_y \Delta x - \rho g \frac{\Delta x \Delta y}{2} - p\Delta s \cos\theta = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} a_y \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde hemos utilizado $\Delta \mathcal{V} = \Delta x\, \Delta y/2$ (podríamos incluir Δz en cada término para

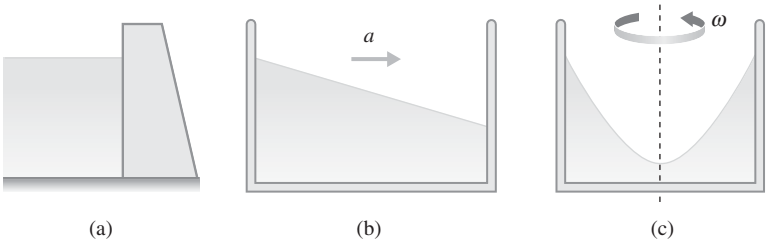


Fig. 2.1 Ejemplos incluidos en estática de fluidos: (a) líquidos en reposo; (b) aceleración lineal; (c) rotación angular.

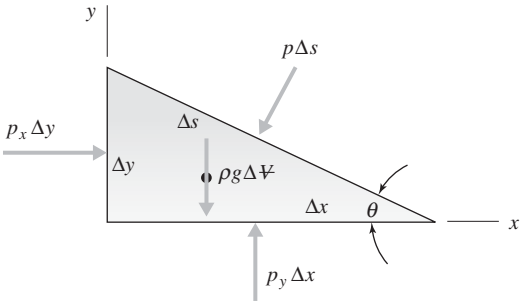


Fig. 2.2 Presión en un punto en un fluido.

tomar en cuenta la profundidad). Las presiones mostradas se deben al fluido circundante y son la presión promedio sobre las áreas. Sustituyendo, tenemos

$$\Delta s \operatorname{sen} \theta = \Delta y \qquad \Delta s \cos \theta = \Delta x \tag{2.2.2}$$

vemos que las ecuaciones 2.2.1 toman la forma

$$\begin{aligned} p_x - p &= \frac{\rho a_x}{2} \Delta x \\ p_y - p &= \frac{\rho(a_y + g)}{2} \Delta y \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Observe que en el límite cuando el elemento se contrae a un punto, $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Por tanto, los lados derechos de las ecuaciones anteriores se vuelven cero, incluso para fluidos en movimiento, dándonos el resultado de que, en un punto,

$$p_x = p_y = p \tag{2.2.4}$$

Como θ es arbitrario, esta relación se cumple para todos los ángulos en un punto. Podríamos haber analizado un elemento en el plano xz y concluido que $p_x = p_z = p$. Entonces se concluye que la presión en un fluido es constante en un punto; esto es, la presión es una función escalar. Actúa igualmente en todas las direcciones en un punto dado tanto para un fluido estático como en uno en movimiento en ausencia de un esfuerzo cortante.

CONCEPTO CLAVE *La presión en un fluido actúa igualmente en todas las direcciones en un punto determinado.*

2.3 VARIACIÓN DE PRESIÓN

Se deriva una ecuación general para predecir la variación de presión de fluidos en reposo o de fluidos que experimentan una aceleración, en tanto que la posición relativa de sus elementos permanece igual (esto elimina el esfuerzo cortante). Para determinar la variación de presión en tales fluidos, considere el elemento infinitesimal que se ilustra en la figura 2.3, donde el eje z está en la dirección vertical. La variación de presión de un punto a otro se determinará aplicando la segunda ley de Newton; esto es, la suma de las fuerzas que actúan sobre el elemento de fluido es igual a la masa por la aceleración del elemento.

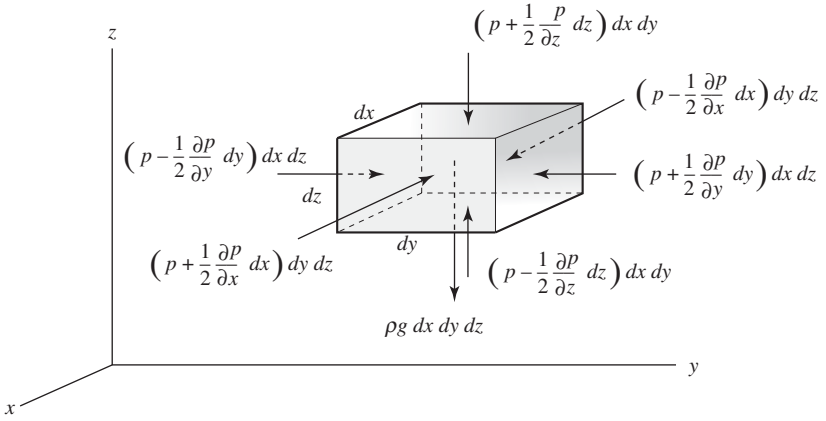


Fig. 2.3 Fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal que está en reposo en el marco de referencia *xyz*. El marco de referencia puede estar sometido a una aceleración o a una rotación.

Si suponemos que existe una presión p en el centro de este elemento, las presiones en cada uno de los lados se pueden expresar usando la regla de la cadena del cálculo infinitesimal con $p(x,y,z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{2.3.1}$$

Si nos movemos del centro a una cara una distancia $(dx/2)$, vemos que la presión es

$$p\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \tag{2.3.2}$$

Las presiones en todas las caras se expresan de esta manera, como se ilustra en la figura 2.3. La segunda ley de Newton se escribe en forma vectorial para un sistema de masa constante como

$$\Sigma\,\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.3.3}$$

Esto resulta en las tres ecuaciones de componentes, suponiendo que z es vertical y usando la masa como $\rho\,dx\,dy\,dz$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz &= \rho a_x\,dx\,dy\,dz \\ -\frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \rho a_y\,dx\,dy\,dz \\ -\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \rho(a_z + g)\,dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

donde a_x, a_y y a_z son las componentes de la aceleración del elemento. La división entre el volumen $dx\,dy\,dz$ da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y \tag{2.3.5}$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(a_z + g)$$

El diferencial de presión en cualquier dirección se puede determinar ahora a partir de la ecuación 2.3.1 como

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(a_z + g)dz \tag{2.3.6}$$

donde z es siempre vertical. Las diferencias de presión entre puntos especificados se pueden hallar al integrar la ecuación 2.3.6. Esta ecuación es útil en varios problemas, como se demostrará en las secciones restantes de este capítulo.

2.4 FLUIDOS EN REPOSO

Un fluido en reposo no experimenta aceleración alguna. Por lo tanto, $a_x = a_y = a_z = 0$ y la ecuación 2.3.6 se reduce a

$$dp = -\rho g\, dz \tag{2.4.1}$$

o bien

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \tag{2.4.2}$$

Esta ecuación implica que no hay variación de presión en las direcciones x y y, es decir, en el plano horizontal. La presión varía en la dirección z, la dirección vertical, únicamente. También observe que dp es negativa si dz es positiva; esto es, la presión disminuye cuando nos movemos hacia arriba y aumenta cuando nos movemos hacia abajo.

2.4.1 Presiones en líquidos en reposo

Si la densidad se puede suponer constante, la ecuación 2.4.2 se integra para obtener

$$\Delta p = -\gamma \Delta z \quad \text{o} \quad p + \gamma z = \text{constante} \quad \text{o} \quad \frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \tag{2.4.3}$$

de modo que la presión aumenta con la profundidad. Observe que z es positiva en la dirección hacia arriba. Es frecuente que la cantidad $(p/\gamma + z)$ se conozca como *carga hidráulica*. Si el punto de interés estuviera a una distancia h bajo una **superficie libre:** *Superficie que separa un gas de un líquido.*

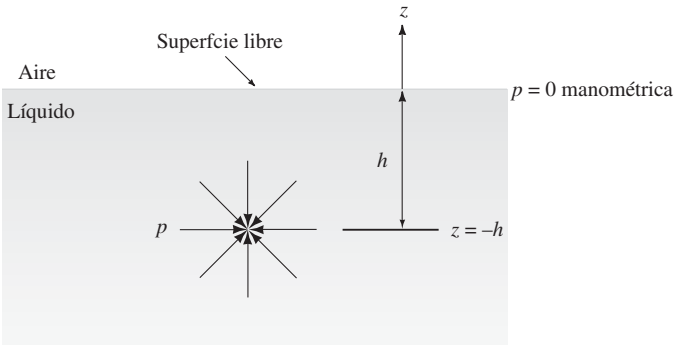


Fig. 2.4 Presión bajo una superficie libre.

ficie libre (una superficie que separa un gas de un líquido), como se muestra en la figura 2.4, la ecuación 2.4.3 resultaría en

$$p = \gamma h \tag{2.4.4}$$

CONCEPTO CLAVE *La ecuación $p = \gamma h$ se usa para convertir una presión en una altura de líquido.*

donde $p = 0$ para $h = 0$. Esta ecuación sería muy útil para convertir la presión a una altura equivalente de líquido. Por ejemplo, es frecuente que la presión atmosférica se exprese en milímetros de mercurio; esto es, la presión atmosférica es igual a la presión a cierta profundidad en una columna de mercurio, y conociendo el peso específico del mercurio, podemos determinar esa profundidad usando la ecuación 2.4.4.

2.4.2 Presiones en la atmósfera

Atmósfera estándar: *Posición a 40º de latitud donde se estandarizan los cálculos.*

Para la atmósfera, en donde la densidad depende de la altura, es decir, $\rho = \rho(z)$, debemos integrar la ecuación 2.4.1 a lo largo de una trayectoria vertical. La atmósfera se divide en cuatro capas: la *troposfera* (la más cercana a la Tierra), la *estratosfera*, la *mesosfera* y la *ionosfera*.[1] Debido a que en la atmósfera las condiciones cambian con el tiempo y la latitud y las capas son más gruesas en el ecuador y más delgadas en los polos, los cálculos se basan en la **atmósfera estándar**, que se considera a 40º de latitud. En la atmósfera estándar, la temperatura de la troposfera varía linealmente con la elevación $T(z) = T_0 - \alpha z$, donde el *gradiente de temperatura* $\alpha = 0.0065$ K/m (0.00357 ºR/ft) y T_0 es 288 K (518 ºR). En la parte de la estratosfera entre 11 y 20 km la temperatura es constante a –56.5 ºC. (Los aviones comerciales comúnmente vuelan en la parte más baja de esta región de temperatura constante.) Luego la temperatura aumenta otra vez y alcanza un máximo cerca de los 50 km; después disminuye hasta el borde de la ionosfera. La atmósfera normal se ilustra en la figura 2.5. Como la densidad del aire en la ionosfera es tan baja, es posible que los satélites giren en órbita alrededor de la Tierra en esta capa.

La figura 2.6 muestra la forma en que varía la presión atmosférica con la altitud en tres montañas. Una columna de aire de la capa externa hasta un punto determinado en la Tierra contiene gases que ejercen una fuerza igual a 14.7 lb sobre cada pulgada cuadrada. Esta presión es 1 atm o 760 mm Hg. A una altitud mayor la presión es menor porque la masa de la columna de aire de la atmósfera externa a ese punto es menor. Ejemplos de presión en las tres montañas se dan a la derecha de la figura 2.6.

[1]La ionosfera está formada por la termosfera y la exosfera.

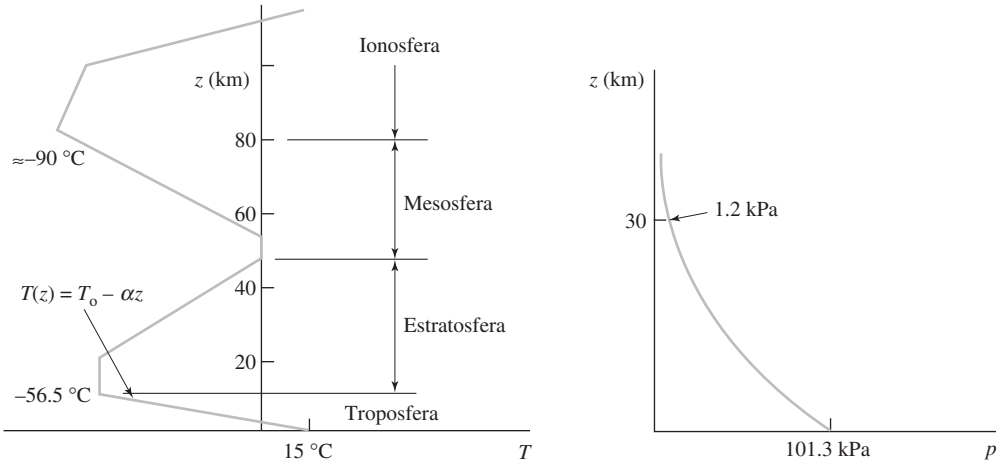


Fig. 2.5 Atmósfera estándar.

Para determinar la variación de la presión en la troposfera, podemos usar la ley de un gas ideal $p = \rho RT$ y la ecuación 2.4.1; lo que resulta en

$$dp = -\frac{pg}{RT}\,dz$$

o bien, poniendo la presión p en el lado izquierdo,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\,dz \tag{2.4.5}$$

Esto puede ser integrado, entre el nivel del mar y una elevación z en la troposfera:

$$\int_{p_{\text{atm}}}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T_0 - \alpha z} \tag{2.4.6}$$

Después de integrar, esto da

$$\ln\frac{p}{p_{\text{atm}}} = \frac{g}{\alpha R}\ln\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \tag{2.4.7}$$

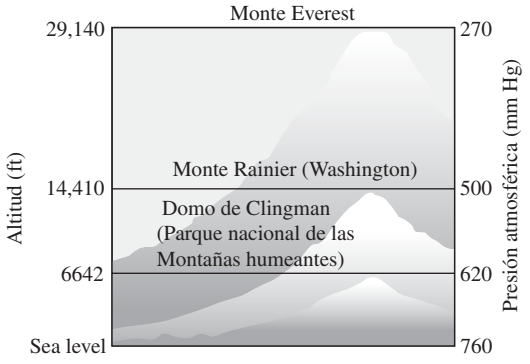


Fig. 2.6 Presión atmosférica y altitud en tres montañas.

que se puede poner en la forma

$$p = p_{\text{atm}}\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{g/\alpha R} \tag{2.4.8}$$

Si usamos condiciones atmosféricas estándar en la ecuación 2.4.8, encontramos que $p/p_{\text{atm}} = 0.999$ para $z = 10$ m. En consecuencia, se ignoran los cambios de presión en un gas como el aire a menos que z sea relativamente grande. Para $z = 1000$ m, la presión disminuye en alrededor de 2%.

En la parte inferior de la estratosfera, donde la temperatura es constante, la ecuación 2.4.5 se integra otra vez como sigue:

$$\int_{p_s}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_s}\int_{z_s}^{z} dz \tag{2.4.9}$$

$$\ln\frac{p}{p_s} = -\frac{g}{RT_s}(z - z_s) \tag{2.4.10}$$

o bien

$$p = p_s \exp\left[\frac{g}{RT_s}(z_s - z)\right] \tag{2.4.11}$$

El subíndice s denota condiciones en la interfase troposfera-estratosfera. Las propiedades de la atmósfera estándar hasta 80 km se detallan en el apéndice B.3.

Ejemplo 2.1

La presión atmosférica está dada como 680 mm Hg en un lugar montañoso. Convierta la presión a kilopascales y metros de agua. También, calcule la disminución de la presión debida a un aumento de elevación de 500 m, empezando a 2000 m de elevación, suponiendo una densidad constante.

Solución

Use la ecuación 2.4.4 y encuentre, usando $S_{\text{Hg}} = 13.6$ con la ecuación 1.5.2,

$$\begin{aligned} p &= \gamma_{\text{Hg}} h \\ &= (9.81\ \text{kN/m}^3 \times 13.6) \times 0.680\ \text{m} = 90.7\ \text{kPa} \end{aligned}$$

Para convertir esto a metros de agua, tenemos

$$\begin{aligned} h &= \frac{p}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} \\ &= \frac{90.7}{9.810} = 9.25\ \text{m de agua} \end{aligned}$$

Para hallar la disminución de la presión, usamos la ecuación 2.4.3 y encontramos la densidad en la tabla B.3:

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\gamma \Delta z = -\rho g \Delta z \\ &= -1.007\ \text{kg/m}^3 \times 9.81\ \text{m/s}^2 \times 500\ \text{m} = -4940\ \text{Pa} \end{aligned}$$

donde usamos kg = N • s^2/m.

Nota: Como se conoce la gravedad con tres dígitos significativos, expresamos la respuesta con tres dígitos significativos.

Ejemplo 2.2

Suponga una atmósfera isotérmica y obtenga un valor aproximado de la presión a 10 000 m. Calcule el error porcentual cuando se compare con los valores usando la ecuación 2.4.8 y del apéndice B.3. Use una temperatura de 256 K, la temperatura a 5 000 m.

Solución

Integre la ecuación 2.4.5 suponiendo que T es constante, como sigue:

$$\int_{101}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\int_{0}^{z} dz$$

$$\ln \frac{p}{101} = -\frac{gz}{RT} \qquad \text{o} \qquad p = 101e^{-gz/RT}$$

Sustituyendo $z = 10\,000$ m y $T = 256$ K, resulta

$$p = 101e^{-9.81\times 10\,000/(287\times 256)}$$

$$= 26.57 \text{ kPa}$$

Usando la ecuación 2.4.8 tenemos

$$p = p_{\text{atm}}\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{g/\alpha R}$$

$$= 101\left(\frac{288 - 0.0065 \times 10\,000}{288}\right)^{9.81/0.0065\times 287} = 26.3 \text{ kPa}$$

La presión real a 10 000 m según la tabla B.3 es de 26.50 kPa. Por lo tanto, los errores porcentuales son

$$\%\text{ error} = \left(\frac{26.57 - 26.3}{26.3}\right) \times 100 = 1.03\%$$

$$\%\text{ error} = \left(\frac{26.57 - 26.50}{26.50}\right) \times 100 = 0.26\%$$

Como el error es tan pequeño, con frecuencia suponemos que la atmósfera es isotérmica. *Nota*: Cuando se evalúe gz/RT usamos $R = 287$ J/kg • K, no 0.287 kJ/kg • K. Para comprobar que gz/R es adimensional, lo cual debe ser porque es un exponente, use N = kg • m/s^2 de modo que

$$\left[\frac{gz}{RT}\right] = \frac{(\text{m/s}^2)\text{m}}{(\text{J/kg}\cdot\text{K})\text{K}} = \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{N}\cdot\text{m/kg}} = \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{(\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2)/\text{kg}} = \frac{\text{m}^2/\text{s}}{\text{m}^2/\text{s}}$$

2.4.3 Manómetros

Presión hidrostática, 517

Los manómetros son instrumentos que usan columnas de líquidos para medir presiones. Tres de estos instrumentos, que se muestran en la figura 2.7, se estudian para ilustrar su uso. El inciso (a) muestra un manómetro de tubo U, que se usa para medir presiones relativamente pequeñas. En este caso la presión en el tubo se puede determinar al definir un punto 1 en el centro del tubo y un punto 2 en la superficie de la columna a la derecha. A continuación, usando la ecuación 2.4.3,

$$p_1 + \gamma z_1 = p_2 + \gamma z_2$$

donde el nivel de referencia desde donde se miden z_1 y z_2, se localiza en cualquier posición deseada, por ejemplo a través del punto 1. Como $p_2 = 0$ (si se elige la presión manométrica; si se desea la presión absoluta, seleccionaríamos $p_2 = p_{atm}$) y $z_2 - z_1 = h$,

$$p_1 = \gamma h \tag{2.4.12}$$

La figura 2.7b muestra un manómetro que se emplea para medir presiones relativamente grandes ya que podemos seleccionar γ_2 como muy grande; por ejemplo, podríamos seleccionar γ_2 para que sea la presión del mercurio de modo que $\gamma_2 = 13.6\,\gamma_{agua}$. La presión se puede determinar si introducimos los puntos indicados. Esto

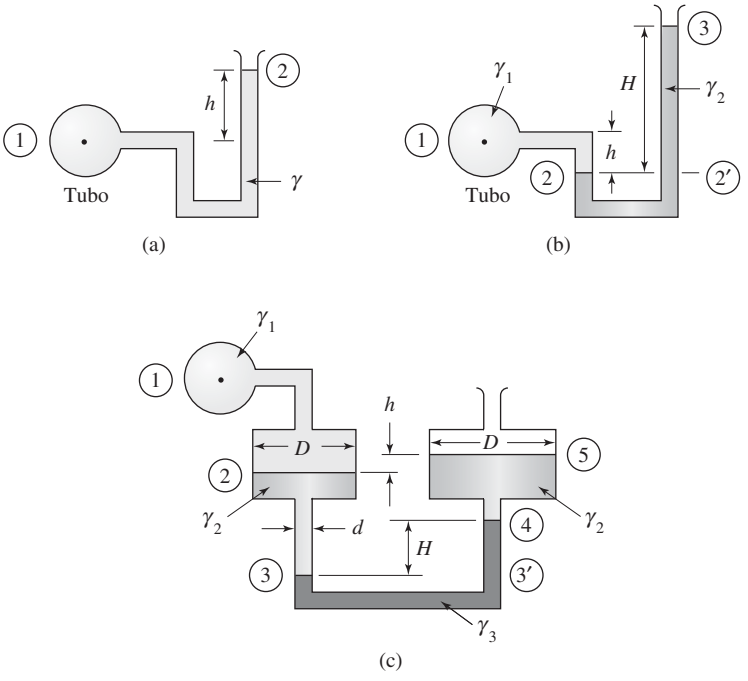


Fig. 2.7 Manómetros: (a) manómetro de tubo en U (presiones pequeñas); (b) manómetro de tubo en U (presiones grandes); (c) micromanómetro (cambios de presión muy pequeños).

es necesario porque la ecuación 2.4.3 aplica a todo un fluido; γ debe ser constante. El valor de γ cambia abruptamente en el punto 2. La presión en el punto 2 y en el punto 2' es la misma ya que los puntos están a la misma elevación en el mismo fluido. Por tanto,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_2' \\ p_1 + \gamma_1 h &= p_3 + \gamma_2 H \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Si hacemos $p_3 = 0$ (se utiliza presión manométrica) resulta en

$$p_1 = -\gamma_1 h + \gamma_2 H \tag{2.4.14}$$

La figura 2.6c muestra un micromanómetro que se usa para medir cambios de presión muy pequeños. Introduciendo los puntos indicados, requiriendo que $p_3 = p_3'$, podemos escribir

$$p_1 + \gamma_1(z_1 - z_2) + \gamma_2(z_2 - z_3) = p_5 + \gamma_2(z_5 - z_4) + \gamma_3(z_4 - z_3) \tag{2.4.15}$$

Observe que $z_2 - z_3 + h = H + z_5 - z_4$ y hacemos $p_5 = 0$; entonces

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2(h - H) + \gamma_3 H \\ &= \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2 h + (\gamma_3 - \gamma_2)H \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Observe que en todas las ecuaciones anteriores para los tres manómetros hemos identificado todas las interfases con un punto. Esto siempre es necesario cuando se analiza un manómetro.

El micromanómetro es capaz de medir cambios de presión muy pequeños dado que un pequeño cambio de presión en p_1 resulta en una deflexión H relativamente grande. El cambio en H debido a un cambio en p_1 puede ser determinado usando la ecuación 2.4.16. Supongamos que p_1 aumenta en Δp_1 y, como resultado, z_2 disminuye en Δz; entonces h y H también cambian. Partiendo del hecho de que una disminución en z_2 es acompañada por un aumento en z_5 conduce a un aumento en h de $2\Delta z$ y, análogamente, suponiendo que los volúmenes se conservan, se puede demostrar que H aumenta en $2\Delta z D^2/d^2$. Por tanto, un cambio de presión Δp_1 puede ser evaluado a partir de cambios en deflexiones como sigue:

$$\Delta p_1 = \gamma_1(-\Delta z) + \gamma_2(2\Delta z) + \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)2\Delta z D^2}{d^2} \tag{2.4.17}$$

La rapidez de cambio de H con p_1 es

$$\frac{\Delta H}{\Delta p_1} = \frac{2\Delta z D^2/d^2}{\Delta p_1} \tag{2.4.18}$$

Usando la ecuación 2.4.17 tenemos

$$\frac{\Delta H}{\Delta p_1} = \frac{2D^2/d^2}{-\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2)D^2/d^2} \tag{2.4.19}$$

Un ejemplo de este tipo de manómetro se da en el ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.3

Circulan agua y aceite en unas tuberías horizontales. Un manómetro de doble tubo en U está conectado entre las tuberías, como se muestra en la figura E2.3. Calcule la diferencia de presión entre el tubo de agua y el de aceite.

Solución

Primero identificamos los puntos relevantes como se muestra en la figura. Se empieza en el punto ① y se suma la presión cuando la elevación disminuye y se resta la presión cuando la elevación aumenta hasta llegar al punto ⑤:

$$p_1 + \gamma(z_1 - z_2) - \gamma S_1(z_3 - z_2) - \gamma S_{\text{aire}}(z_4 - z_3) + \gamma S_2(z_4 - z_5) = p_5$$

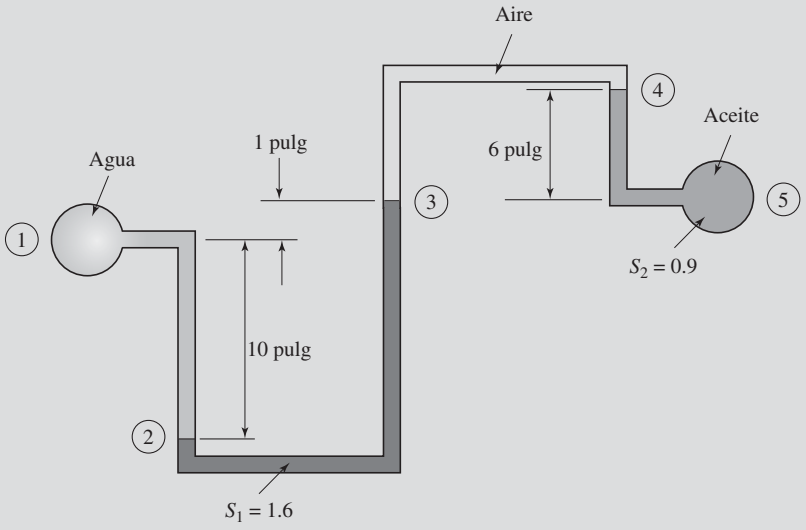


Fig. E2.3

donde $\gamma = 62.4$ lb/ft^3, $S_1 = 1.6$, $S_2 = 0.9$ y $S_{\text{aire}} \approx 0$. Entonces

$$p_1 - p_5 = 62.4\left(-\frac{10}{12} + 1.6 \times \frac{11}{12} + 0 \times \frac{6}{12} - 0.9 \times \frac{6}{12}\right)$$

$$= 11.44 \text{ lb/ft}^2 \quad \text{o} \quad 0.0794 \text{ psi}$$

Observe que si se desprecia el peso del aire, la presión en el punto 3 es igual a la presión en el punto 4.

Ejemplo 2.4

Para una condición dada los niveles del líquido en la figura 2.7c son $z_1 = 0.95$ m, $z_2 = 0.70$ m, $z_3 = 0.52$ m, $z_4 = 0.65$ m y $z_5 = 0.72$ m. Además, $\gamma_1 = 9810$ N/m^3, $\gamma_2 = 11500$ N/m^3 y $\gamma_3 = 14000$ N/m^3. Los diámetros son $D = 0.2$ m y $d = 0.01$ m. (a) Calcule la presión p_1 en el tubo, (b) calcule el cambio en H si p_1 aumenta en 100 Pa, y (c) calcule el cambio en h del manómetro de la figura 2.7a si $h = 0.5$ m de agua y $\Delta p_1 = 100$ Pa.

Solución

(a) De acuerdo con la figura 2.7c, tenemos

$$h = 0.72 - 0.70 = 0.02 \text{ m}$$

$$H = 0.65 - 0.52 = 0.13 \text{ m}$$

Sustituyendo los valores dados en la ecuación (2.4.16) lleva a

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2 h + (\gamma_3 - \gamma_2)H \\ &= 9810(0.70 - 0.95) + 11\,500(0.02) + (14\,000 - 11\,500)(0.13) \\ &= -1898 \text{ Pa} \end{aligned}$$

(b) Si la presión p_1 se aumenta en 100 Pa a $p_1 = -1798$ Pa, el cambio en H es, usando la ecuación 2.4.19,

$$\Delta H = \Delta p_1 \frac{2D^2/d^2}{-\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2)D^2/d^2}$$

$$\Delta H = 100 \frac{2(20^2)}{-9810 + 2(11\,500) + 2(14\,000 - 11\,500) \times 20^2} = 0.0397 \text{ m}$$

Entonces H aumenta en 3.97 cm como resultado de aumentar la presión en 100 Pa.

(c) Para el manómetro de la figura 2.7a, la presión p_1 está dada por $p = \gamma h$. Supongamos que inicialmente $h = 0.50$ m. Entonces la presión inicialmente es

$$p_1 = 9810 \times 0.50 = 4905 \text{ Pa}$$

Ahora si p_1 se aumenta en 100 Pa, h se puede hallar:

$$p_1 = \gamma h$$

$$h = \frac{p_1}{\gamma} = \frac{5005}{9810} = 0.510 \text{ m.} \quad \therefore \Delta h = 0.510 - 0.5 = 0.01 \text{ m}$$

Entonces un aumento de 100 Pa aumenta h en 1 cm en el manómetro mostrado en el inciso (a), 25% del cambio en el micromanómetro.

2.4.4 Fuerzas sobre áreas planas

En el diseño de dispositivos y objetos que están sumergidos, por ejemplo represas, obstrucciones en flujos, superficies en barcos y tanques de almacenamiento, es necesario calcular las magnitudes y ubicaciones de las fuerzas que actúan sobre superficies planas y curvas. En esta sección consideramos sólo superficies planas, por ejemplo la superficie plana de forma general que se muestra en la figura 2.8.

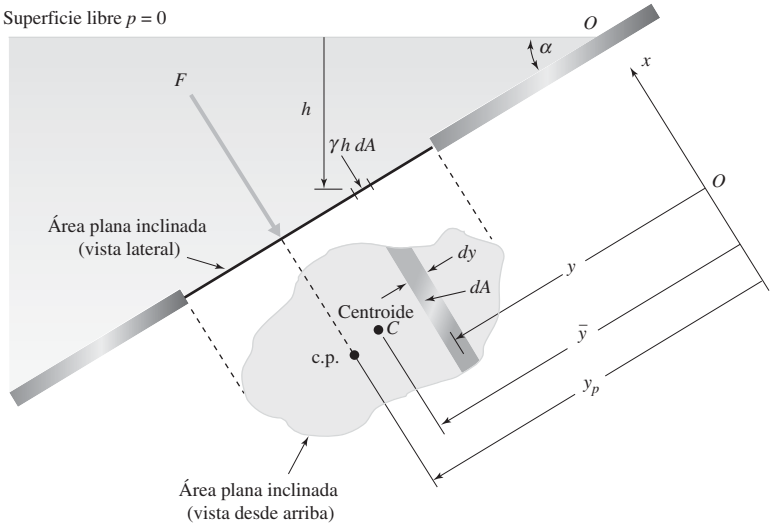


Fig. 2.8 Fuerza sobre un área plana inclinada.

Observe que se da una vista lateral así como una vista que muestra la forma del plano. La fuerza total del líquido sobre la superficie plana se encuentra integrando la presión sobre el área, esto es,

$$F = \int_A p\, dA \tag{2.4.20}$$

donde comúnmente usamos la presión manométrica. (La presión atmosférica se cancela porque actúa en ambos lados del área.) Las coordenadas x y y están en el plano de la superficie plana, como se muestra. Suponiendo que $p = 0$ en $h = 0$, sabemos que

$$\begin{aligned} p &= \gamma h \\ &= \gamma y \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

donde h se mide verticalmente hacia abajo desde la superficie libre hasta el área elemental dA y y se mide del punto O en la superficie libre. La fuerza puede entonces expresarse como

$$\begin{aligned} F &= \int_A \gamma h\, dA \\ &= \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A y\, dA \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

La distancia a un centroide se define como

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y\, dA \tag{2.4.23}$$

La expresión para la fuerza se convierte entonces en

$$\begin{aligned} F &= \gamma \bar{y} A \operatorname{sen} \alpha \\ &= \gamma \bar{h} A = p_C A \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

donde $\overline{h}$ es la distancia vertical de la superficie libre al centroide del área y p_C es la presión en el centroide. Así, vemos que la magnitud de la fuerza sobre la superficie plana es la presión en el centroide multiplicada por el área. La fuerza, en general, no actúa en el centroide.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza sobre una superficie plana es la presión en el centroide multiplicada por el área.*

Para hallar la ubicación de la fuerza resultante F, observamos que la suma de los momentos de todas las fuerzas de presión que actúan sobre el área A debe ser igual al momento de la fuerza resultante. Sea F la fuerza que actúa en el punto (x_p, y_p), el **centro de presión** (c.p.). El valor de y_p se puede obtener al igualar los momentos respecto al eje x:

Centro de presión: *El punto donde actúa la fuerza resultante.*

$$\begin{aligned} y_p F &= \int_A yp\, dA \\ &= \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A y^2\, dA = \gamma I_x \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

donde el segundo momento del área respecto al eje x es

$$I_x = \int_A y^2\, dA \tag{2.4.26}$$

El segundo momento de un área está relacionado con el segundo momento de un área $\overline{I}$ respecto al eje centroidal por medio del teorema de transferencia de eje paralelo,

$$I_x = \overline{I} + A\overline{y}^2 \tag{2.4.27}$$

Sustituimos las ecuaciones 2.4.24 y 2.4.27 en la ecuación 2.4.25 y obtenemos

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{\gamma(\overline{I} + A\overline{y}^2)\operatorname{sen} \alpha}{\gamma \overline{y} A \operatorname{sen} \alpha} \\ &= \overline{y} + \frac{\overline{I}}{A\overline{y}} \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

donde $\overline{y}$ se mide paralela al área plana a la superficie libre.

Los centroides y momentos para diversas áreas se presentan en el apéndice C. Usando la expresión anterior, podemos demostrar que la fuerza sobre una compuerta rectangular, con el borde superior a nivel con la superficie del líquido, como se muestra en la figura 2.9, actúa a dos tercios de la distancia hacia abajo. Esto también es obvio considerando la distribución triangular de la presión que actúa sobre la compuerta. Observe que la ecuación 2.4.28 muestra que y_p es siempre mayor

CONCEPTO CLAVE *La fuerza sobre una compuerta rectangular, con el borde superior a nivel con la superficie del líquido, actúa a dos tercios de la distancia hacia abajo.*

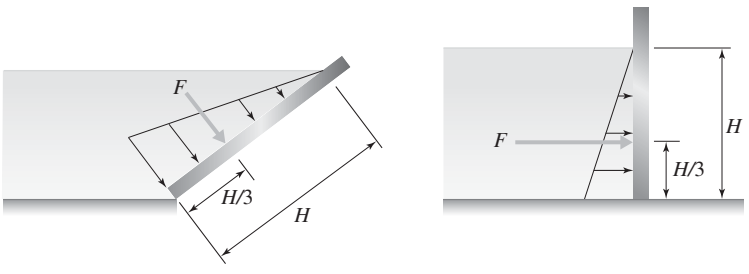


Fig. 2.9 Fuerza sobre un área plana con el borde superior en una superficie libre.

que $\overline{y}$, esto es, la fuerza resultante del líquido sobre una superficie plana siempre actúa abajo del centroide del área, excepto sobre un área horizontal para la cual $\overline{y} = \infty$; entonces coinciden el centro de presión y el centroide .

De manera similar, para localizar la coordenada x_p (eje x) del centro de presión (c.p.), escribimos

$$\begin{aligned} x_p F &= \int_A xp \, dA \\ &= \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A xy \, dA = \gamma I_{xy} \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

donde el producto de inercia del área A es

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA \tag{2.4.30}$$

Usando el teorema de transferencia para el producto de inercia,

$$I_{xy} = \overline{I}_{xy} + A\overline{x}\,\overline{y} \tag{2.4.31}$$

La ecuación 2.4.29 se convierte en

$$x_p = \overline{x} + \frac{\overline{I}_{xy}}{A\overline{y}} \tag{2.4.32}$$

Ahora tenemos expresiones para las coordenadas que localizan el centro de presión.

Por último, debemos observar que la fuerza F en la figura 2.8 es el resultado de un *prisma de presión* que actúa sobre el área. Para el área rectangular que se muestra en la figura 2.10, la presión aumenta, como se muestra por la distribución de presión en la figura 2.10b. Si formamos la integral $\int p \, dA$, obtenemos el volumen del prisma de presión, que es igual a la fuerza F que actúa sobre el área, mostrada en la figura 2.10c. La fuerza actúa a través del centroide del volumen. Para el área rectangular que se muestra en la figura 2.10a, el volumen podría dividirse en dos volúmenes: un volumen rectangular con su centroide en su centro, y un volumen triangular con su centroide a un tercio de la distancia desde la base apropiada. La ubicación de la fuerza se encuentra entonces localizando el centroide del volumen compuesto.

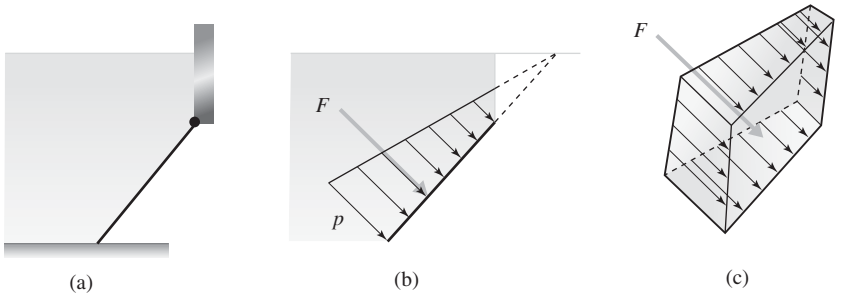


Fig. 2.10 Prisma de presión: (a) área rectangular; (b) distribución de presión sobre el área; (c) prisma de presión.

Ejemplo 2.5

Un área plana de 80 cm × 80 cm actúa como escotilla de escape en un submarino en los Grandes Lagos. Si forma un ángulo de 45º con la horizontal, ¿qué fuerza aplicada normal a la escotilla en el borde inferior se necesita para apenas abrir la escotilla, si está abisagrada en el borde superior cuando este último está 10 m debajo de la superficie? Se supone que la presión dentro del submarino es la atmosférica.

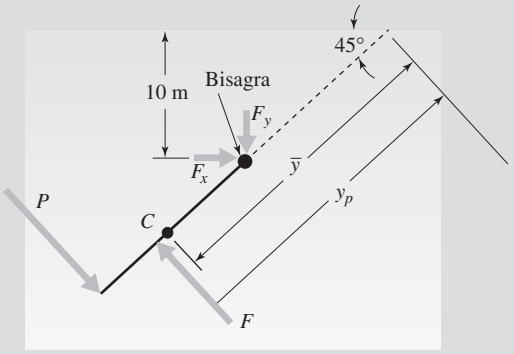


Fig. E2.5

Solución

Primero, sería muy útil un bosquejo de la escotilla como se ve en la figura E2.5. La fuerza del agua que actúa sobre la escotilla es

$$F = \gamma \bar{h} A$$
$$= 9810(10 + 0.4 \times \text{sen } 45°)(0.8 \times 0.8) = 64\,560 \text{ N}$$

La distancia $\bar{y}$ es

$$\bar{y} = \frac{\bar{h}}{\text{sen } 45°} = \frac{10 + 0.4 \times \text{sen } 45°}{\text{sen } 45°} = 14.542 \text{ m}$$

de modo que

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}}$$
$$= 14.542 + \frac{0.8 \times 0.8^3/12}{(0.8 \times 0.8) \times 14.542} = 14.546 \text{ m}$$

Tomando momentos con respecto a la bisagra da la fuerza necesaria P para abrir la escotilla:

$$0.8P = (y_p - \bar{y} + 0.4)F$$

$$\therefore \quad P = \frac{14.546 - 14.542 + 0.4}{0.8} 64\,560 = 32\,610 \text{ N}$$

Alternativamente, podríamos haber bosquejado el prisma de presión, compuesto de un volumen rectangular y un volumen triangular. Los momentos respecto a la bisagra superior darían la fuerza deseada.

Ejemplo 2.6

Encuentre la ubicación de la fuerza resultante F del agua sobre la compuerta triangular y la fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada en la figura E2.6a. Desprecie el peso de la compuerta, como es usual.

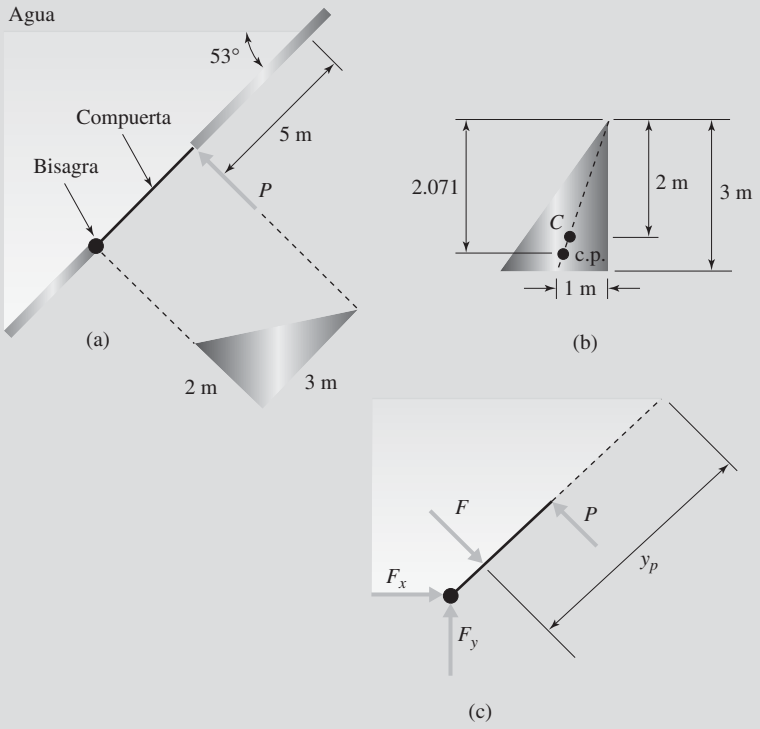


Fig. E2.6

Solución

Primero trazamos un diagrama de cuerpo libre de la compuerta, incluyendo todas las fuerzas que actúan sobre ella (figura E2.6c). El centroide de la compuerta se muestra en la figura E2.6b. La coordenada y de la ubicación de la F resultante puede hallarse usando la ecuación 2.4.28 como sigue:

$$\bar{y} = 2 + 5 = 7$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}}$$

$$= 7 + \frac{2 \times 3^3/36}{3 \times 7} = 7.071 \text{ m}$$

Para hallar x_p podríamos usar la ecuación 2.4.32. En lugar de eso, reconocemos que la fuerza resultante debe actuar sobre una línea que conecta el vértice y el punto medio del lado opuesto dado que cada fuerza infinitesimal actúa sobre esta línea (el momento de la resultante debe ser igual al momento de sus componentes). Por tanto, usando triángulos semejantes tendremos

$$\frac{x_p}{1} = \frac{2.071}{3}$$

$$\therefore \quad x_p = 0.690 \text{ m}$$

Las coordenadas x_p y y_p ubican el lugar donde la fuerza debida al agua actúa sobre la compuerta.

Si tomamos los momentos respecto a la bisagra, que se supone sin fricción, podemos determinar la fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\text{bisagra}} &= 0 \\ \therefore \quad 3 \times P &= (3 - 2.071)F \\ &= 0.929 \times \gamma \bar{h} A \\ &= 0.929 \times 9810 \times (7 \text{ sen } 53°) \times 3 \end{aligned}$$

donde $\bar{h}$ es la distancia vertical del centroide a la superficie libre. Por tanto,

$$P = 50\,900 \text{ N} \quad \text{o} \quad 50.9 \text{ kN}$$

2.4.5 Fuerzas sobre superficies curvas

No utilizamos un método directo de integración para hallar la fuerza debida a la presión hidrostática sobre una superficie curva. En lugar de ello, identificamos un diagrama de cuerpo libre que contiene la superficie curva y los líquidos directamente arriba o debajo de esa superficie. Este diagrama de cuerpo libre contiene sólo superficies planas sobre las que actúan fuerzas de fluidos desconocidas; estas fuerzas desconocidas se pueden hallar como se hizo en la sección anterior.

Como ejemplo, determinemos la fuerza de la compuerta curva sobre el tope que se muestra en la figura 2.11a. El diagrama de cuerpo libre, que incluye el agua contenida directamente arriba de la compuerta, se ilustra en la figura 2.11b; F_1 y F_2 se deben al agua circundante y son las fuerzas resultantes de las distribuciones de presión mostradas; la fuerza del cuerpo F_W se debe al peso del agua mostrada. En la figura 2.11c la compuerta es el cuerpo libre; las fuerzas F_x y F_y son las componentes horizontal y vertical, respectivamente de la fuerza que actúa sobre la bisagra. Al sumar momentos con respecto a un eje que pasa por la bisagra, podemos determinar la fuerza P que actúa sobre el tope.

Si la superficie curva es un cuarto de círculo, el problema se puede simplificar en gran medida. Esto se observa si sólo se considera el diagrama de cuerpo libre de la compuerta (figura 2.11c). La fuerza horizontal F_H que actúa sobre la compuerta es igual a F_1 de la figura 2.11b, y la componente F_V es igual a la fuerza combinada $F_2 + F_W$ de la figura 2.11b. Ahora, F_H y F_V se deben a las fuerzas de presión diferencial que actúan sobre el arco circular; cada fuerza de presión diferencial actúa a través del centro del arco circular. Por tanto, la fuerza resultante $\mathbf{F}_H + \mathbf{F}_V$ (ésta es una suma vectorial) debe actuar a través del centro. En consecuencia, podemos localizar las componentes F_H y F_V en el centro del cuarto de círculo, resultando en un problema mucho más sencillo. El ejemplo 2.7 lo ilustrará.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza resultante $\mathbf{F}_H$ y $\mathbf{F}_V$ debe actuar a través del centro del arco circular.*

Si la presión sobre la superficie libre es p_0, podemos simplemente sumar una profundidad de líquido necesaria para obtener p_0 en el lugar de la superficie libre y, a continuación, resolver el problema resultante con una superficie libre ficticia ubicada a una distancia apropiada arriba de la superficie libre original. O bien, la fuerza de presión p_0A se suma a la fuerza F_2 de la figura 2.11b.

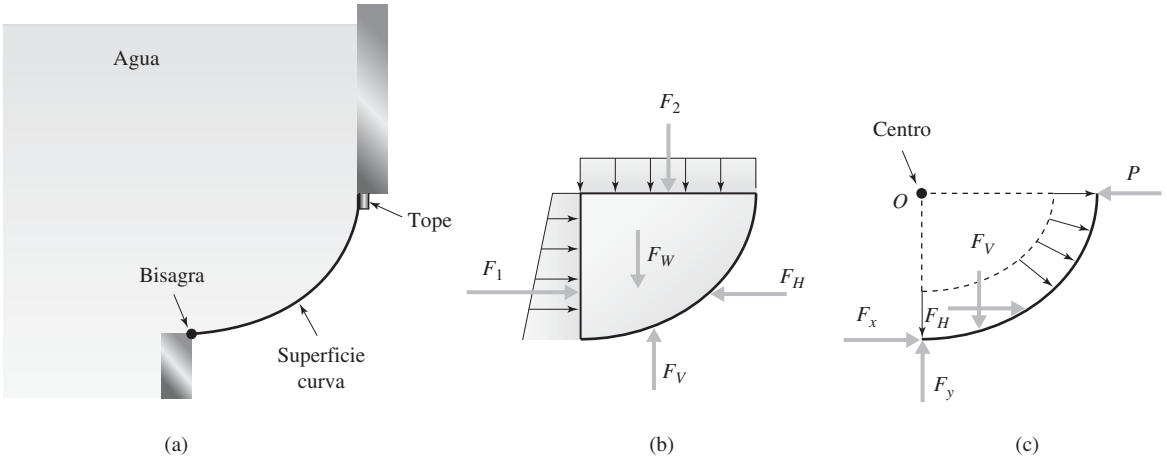


Fig. 2.11 Fuerzas que actúan sobre una superficie curva: (a) superficie curva; (b) diagrama de cuerpo libre del agua y la compuerta; (c) diagrama de cuerpo libre sólo de la compuerta.

Ejemplo 2.7

Calcule la fuerza P necesaria para mantener la compuerta de 4 m de ancho en la posición mostrada en la figura E2.7a. Desprecie el peso de la compuerta.

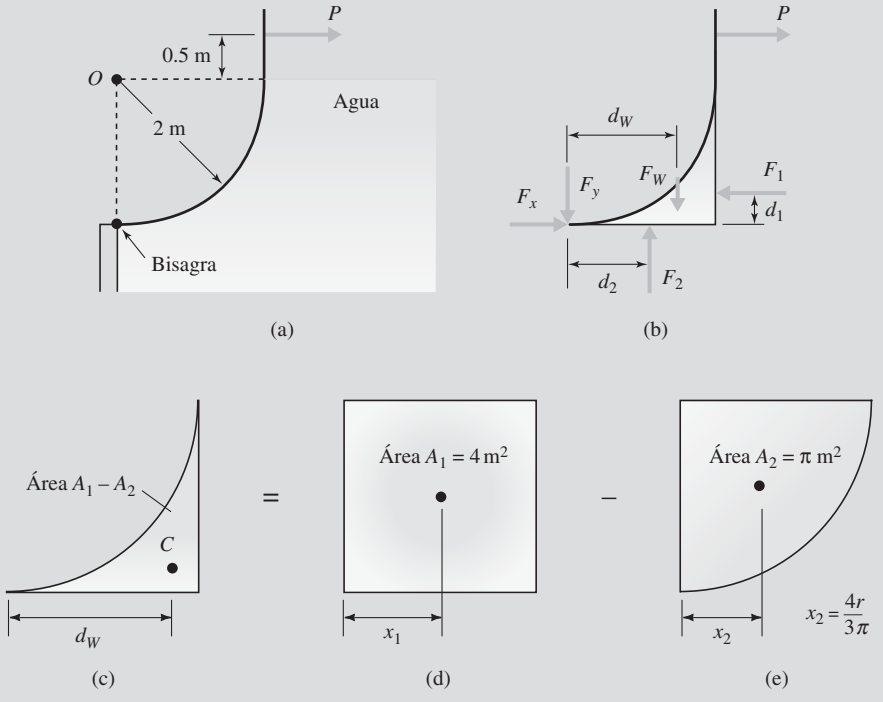


Fig. E2.7

Solución

El primer paso es trazar un diagrama de cuerpo libre. Una opción es seleccionar la compuerta y el agua directamente debajo de la compuerta, como se muestra en la figura E2.7b. Para calcular P, debemos determinar F_1, F_2, F_W, d_1, d_2 y d_W; entonces los momentos respecto a la bisagra nos permitirán hallar P. Las componentes de la fuerza están dadas por

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma \bar{h}_1 A_1 \\ &= 9810 \times 1 \times (2 \times 4) = 78\,480 \text{ N} \\ F_2 &= \gamma \bar{h}_2 A_2 \\ &= 9810 \times 2 \times (2 \times 4) = 156\,960 \text{ N} \\ F_W &= \gamma V_{\text{agua}} \\ &= 9810 \times 4\left(4 - \frac{\pi \times 2^2}{4}\right) = 33\,700 \text{ N} \end{aligned}$$

La distancia d_W es la distancia al centroide del volumen. Se puede determinar si se considera el área como la diferencia de un cuadrado y un cuarto de círculo como se muestra en la figura E2.7c–e. Los momentos de las áreas dan

$$\begin{aligned} d_W(A_1 - A_2) &= x_1 A_1 - x_2 A_2 \\ d_W &= \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} \\ &= \frac{1 \times 4 - (4 \times 2/3\pi) \times \pi}{4 - \pi} = 1.553 \text{ m} \end{aligned}$$

La distancia $d_2 = 1$ m. Como F_1 se debe a una distribución triangular de la presión (vea la figura 2.9), d_1 está dada por

$$d_1 = \frac{1}{3}(2) = 0.667 \text{ m}$$

Sumando momentos con respecto a la bisagra sin fricción tendremos

$$\begin{aligned} 2.5P &= d_1 F_1 + d_2 F_2 - d_W F_W \\ P &= \frac{0.667 \times 78.5 + 1 \times 157.0 - 1.553 \times 33.7}{2.5} = 62.8 \text{ kN} \end{aligned}$$

En lugar del tedioso procedimiento anterior, podríamos observar que todas las fuerzas infinitesimales que conforman la fuerza resultante ($\mathbf{F}_H + \mathbf{F}_V$) que actúan sobre el arco circular pasan por el centro O, como se observa en la figura 2.11c. Como cada fuerza infinitesimal pasa por el centro, la fuerza resultante también debe pasar por el centro. Por lo tanto, podríamos haber localizado la fuerza resultante ($\mathbf{F}_H + \mathbf{F}_V$) en el punto O. Si F_V y F_H estuvieran en O, F_V pasaría a través de la bisagra, sin producir un momento con respecto a la bisagra. Entonces, viendo que $F_H = F_1$ y sumando momentos con respecto a la bisagra, tendremos

$$2.5P = 2F_H$$

Por lo tanto,

$$P = 2 \times \frac{78.48}{2.5} = 62.8 \text{ kN}$$

Obviamente, esto fue mucho más sencillo. ¡Todo lo que necesitábamos hacer era calcular F_H y, a continuación, sumar los momentos!

Ejemplo 2.8

Encuentre la fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada en la figura E2.8a si P actúa a 3 m desde el eje y. La compuerta parabólica es de 150 cm de ancho.

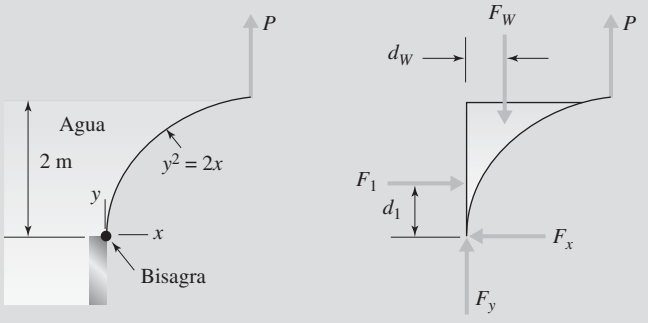


Fig. E2.8

Solución

En la figura E2.8b se ilustra un diagrama de cuerpo libre de la compuerta y del agua que está directamente arriba de la compuerta. Se encuentra que las fuerzas son

$$F_1 = \gamma \bar{h} A$$
$$= 9810 \times 1 \times (2 \times 1.5) = 29\,430 \text{ N}$$
$$F_W = \gamma \forall$$
$$= 9810 \int_0^2 1.5x \, dy = 14\,715 \int_0^2 \frac{y^2}{2} \, dy = 14\,715 \frac{2^3}{6} = 19\,620 \text{ N}$$

La distancia d_1 es $\frac{1}{3}(2) = 0.667$ m dado que el borde superior está en la superficie libre. La distancia d_W a través del centroide se encuentra usando una franja horizontal:

$$d_W = \frac{\int_0^2 x(x/2) \, dy}{\int^2 x \, dy} = \frac{\frac{1}{8}\int_0^2 y^4 \, dy}{\frac{1}{2}\int^2 y^2 \, dy} = \frac{1}{4}\frac{2^5/5}{2^3/3} = 0.6 \text{ m}$$

Sumemos momentos con respecto a la bisagra y encontremos P como sigue:

$$3P = d_1 F_1 + d_W F_W$$
$$= 0.667 \times 29\,430 + 0.6 \times 19\,620 \qquad \therefore P = 10\,470 \text{ N}$$

2.4.6 Flotabilidad

La ley de la flotabilidad, conocida como principio de Arquímedes, se remonta a unos 2 200 años y fue idea del filósofo griego Arquímedes. Dice la leyenda que Hiero, rey de Siracusa, sospechaba que su nueva corona de oro podría haber sido construida con materiales que no fueran oro puro, de modo que pidió a Arquímedes la probara. Es probable que Arquímedes hiciera un trozo de oro puro que pesaba igual que la corona; descubrió que el trozo de oro pesaba más en agua que lo que pesaba la corona en agua, dando así a Arquímedes la idea de que la corona no era de oro puro. El material falso poseía un volumen más grande para tener el mismo peso que el oro, por lo que desplazaba más agua. El *principio de Arquímedes* es: Existe una fuerza de flotación sobre un cuerpo que es igual al peso del líquido desplazado.

CONCEPTO CLAVE *El pricipio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación sobre un cuerpo es igual al peso del líquido desplazado.*

Para demostrar la ley de la flotabilidad, considere el cuerpo sumergido que se muestra en la figura 2.12a. En el inciso (b) se ilustra un diagrama de cuerpo libre cilíndrico que incluye el cuerpo sumergido con peso W y el líquido que pesa F_W; el área transversal A es la máxima área transversal del cuerpo. Del diagrama vemos que la fuerza vertical resultante que actúa en el diagrama de cuerpo libre debida sólo al agua (no incluya W) es igual a

$$\Sigma F = F_2 - F_1 - F_W \tag{2.4.33}$$

Esta fuerza resultante es por definición la *fuerza de flotación* F_B. Se puede expresar como

$$F_B = \gamma(h_2 A - h_1 A - \forall_W) \tag{2.4.34}$$

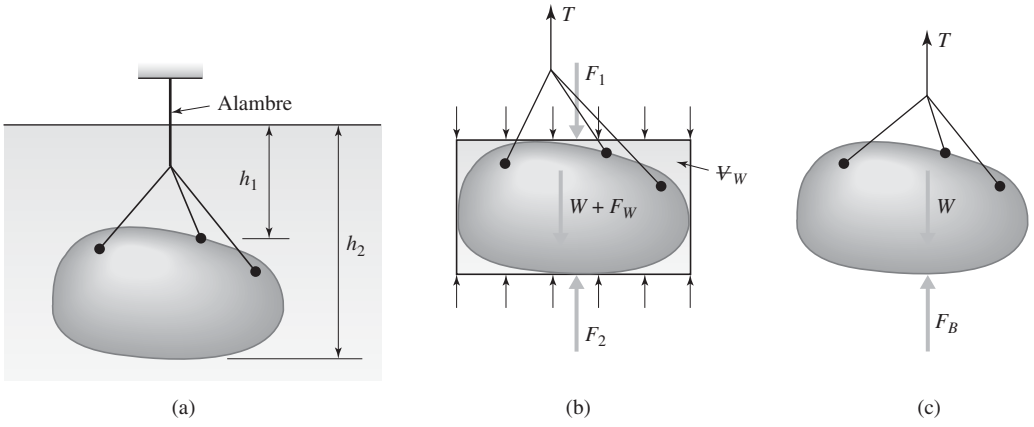


Fig. 2.12 Fuerzas sobre un cuerpo sumergido: (a) cuerpo sumergido; (b) diagrama de cuerpo libre; (c) cuerpo libre que muestra la fuerza de flotación F_B.

donde $\mathcal{V}_W$ es el volumen de líquido incluido en el diagrama de cuerpo libre. Reconociendo que el volumen del cuerpo sumergido es

$$\mathcal{V}_B = (h_2 - h_1)A - \mathcal{V}_W \tag{2.4.35}$$

vemos de la ecuación 2.4.34 que

$$F_B = \gamma \mathcal{V}_{\text{líquido desplazado}} \tag{2.4.36}$$

con lo cual se demuestra la ley de la flotabilidad.

La fuerza necesaria para mantener el cuerpo sumergido en su lugar (vea la figura 2.12c) es igual a

$$T = W - F_B \tag{2.4.37}$$

donde W es el peso del cuerpo sumergido.

Para un cuerpo flotante, como en la figura 2.13, la fuerza de flotación es

$$F_B = \gamma \mathcal{V}_{\text{líquido desplazado}} \tag{2.4.38}$$

Obviamente, $T = 0$, de modo que la ecuación 2.4.36 da

$$F_B = W \tag{2.4.39}$$

donde W es el peso del cuerpo flotante.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza de flotación actúa a través del centroide del volumen del líquido desplazado.*

Del análisis anterior es claro que la fuerza de flotación F_B actúa a través del centroide del volumen del líquido desplazado. Para el cuerpo flotante, el peso del objeto actúa a través de su centro de gravedad, de modo que el centro de gravedad del cuerpo debe estar en la misma línea vertical que el centroide del volumen de líquido.

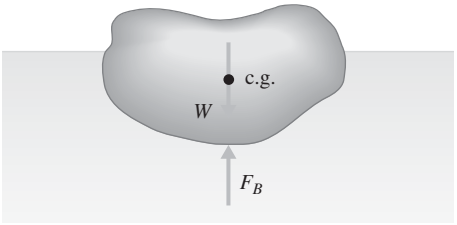


Fig. 2.13 Fuerzas en un cuerpo flotante.

Hidrómetro: *Un instrumento empleado para medir la gravedad específica de líquidos.*

Un **hidrómetro**, un instrumento empleado para medir la gravedad específica de líquidos, opera con base en el principio de flotabilidad. En la figura 2.14 se ve el bosquejo de un hidrómetro. La parte superior, el vástago, tiene un diámetro constante. Cuando se coloca en agua pura, la gravedad específica está marcada para indicar 1.0. El equilibrio de fuerzas es

$$W = \gamma_{\text{agua}} \forall \tag{2.4.40}$$

donde W es el peso del hidrómetro y $\forall$ es el volumen sumergido debajo de la línea $S = 1.0$. En un líquido desconocido de peso específico γ_x, un equilibrio de fuerzas sería

$$W = \gamma_x(\forall - A\Delta h) \tag{2.4.41}$$

donde A es el área transversal del vástago. Igualando estas dos ecuaciones tendremos

$$\Delta h = \frac{\forall}{A}\left(1 - \frac{1}{S_x}\right) \tag{2.4.42}$$

donde $S_x = \gamma_x/\gamma_{\text{agua}}$. Para un hidrómetro determinado, $\forall$ y A son fijos de modo que la cantidad Δh depende sólo de la gravedad específica S_x. Entonces el vástago se puede calibrar para indicar S_x directamente. Los hidrómetros se usan para medir la cantidad de anticongelante en el radiador de un automóvil, o la carga en una batería porque la densidad del fluido cambia cuando el H_2SO_4 se consume o se produce.

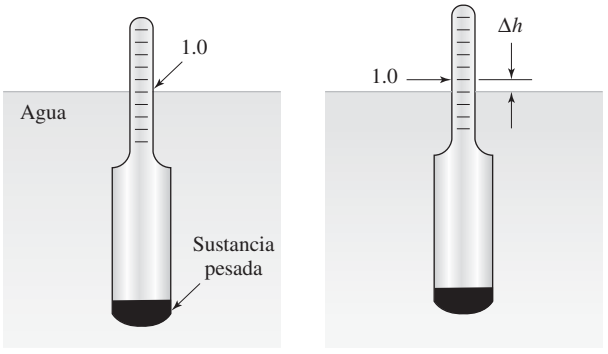


Fig. 2.14 Hidrómetro: (a) en agua; (b) en un líquido desconocido.

Ejemplo 2.9

Se desea conocer el peso específico y la gravedad específica de un cuerpo de composición desconocida. Se encuentra que su peso en el aire es de 200 lb y, en el agua, pesa 150 lb.

Solución

El volumen se determina, a partir del equilibrio de fuerzas cuando está sumergido, como sigue (vea la figura 2.12c):

$$T = W - F_B$$
$$150 = 200 - 62.4\forall \quad \therefore \forall = 0.801 \text{ ft}^3$$

El peso específico es entonces

$$\gamma = \frac{W}{\forall} = \frac{200}{0.801} = 250 \text{ lb/ft}^3$$

Se encuentra que la gravedad específica es

$$S = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{250}{62.4} = 4.01$$

2.4.7 Estabilidad

CONCEPTO CLAVE *Un cuerpo flotante tiene estabilidad vertical.*

La noción de estabilidad se puede demostrar al considerar la estabilidad vertical de un cuerpo flotante. Si el cuerpo se eleva una pequeña distancia, la fuerza de flotación disminuye y el peso del cuerpo regresa el cuerpo a su posición original. Por el contrario, si un cuerpo flotante se baja ligeramente, la fuerza de flotación aumenta y la fuerza de flotación mayor regresa el cuerpo a su posición original. Entonces, un cuerpo flotante tiene estabilidad vertical ya que una pequeña desviación del equilibrio resulta en una fuerza restauradora.

Centro de flotabilidad: *Centroide de un cuerpo flotante.*

Considere ahora la estabilidad rotacional de un cuerpo sumergido, mostrado en la figura 2.15. En el inciso (a) el centro de gravedad G del cuerpo está arriba del centroide C (también conocido como **centro de flotabilidad**) del volumen desplazado, y una pequeña rotación angular resulta en un momento que continuará aumentando la rotación; por lo tanto el cuerpo es inestable y se volcará. Si el centro de gravedad está abajo del centroide, como en el inciso (c), una pequeña rotación angular dará un momento restaurador y el cuerpo es estable. El inciso (b) muestra una estabilidad neutral para un cuerpo en el que coinciden el centro de gravedad y el centroide, situación que se encuentra siempre que la densidad sea constante en todo el cuerpo sumergido.

A continuación, considere la estabilidad rotacional de un cuerpo flotante. Si el centro de gravedad está abajo del centroide, el cuerpo es siempre estable, como en el caso del cuerpo sumergido de la figura 2.15c. El cuerpo puede ser estable, sin embargo, aun si el centro de gravedad está arriba del centroide, como se muestra en la figura 2.16a. Cuando el cuerpo gira, el centroide del volumen del líquido desplazado se mueve a la nueva ubicación C', mostrada en el inciso (b). Si el centroide C' se mueve lo suficientemente lejos, se desarrolla un momento restaurador y el cuerpo es estable, como se ilustra. Esto está determinado por la *altura metacéntrica* $\overline{GM}$ definida como la distancia de G al punto de intersección de la fuerza de flotación antes

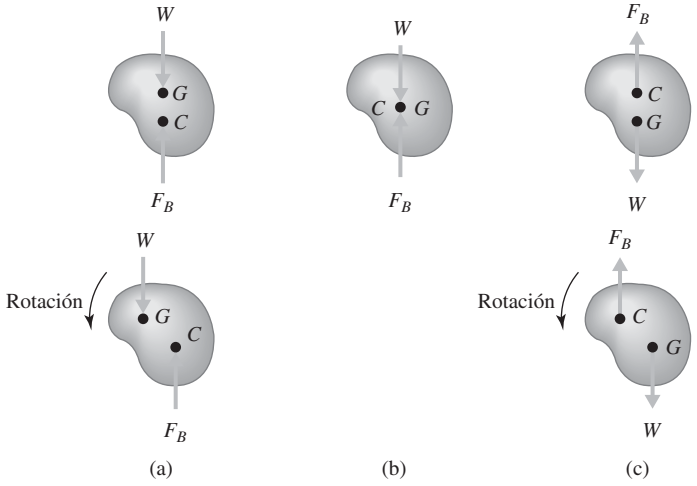


Fig. 2.15 Estabilidad de un cuerpo sumergido; (a) inestable; (b) neutral; (c) estable.

CONCEPTO CLAVE *Si GM es positiva, el cuerpo es estable.*

de la rotación con la fuerza de flotación después de la rotación. Si $\overline{GM}$ es positiva, como se muestra, el cuerpo es estable; si $\overline{GM}$ es negativa (M está debajo de G), el cuerpo es inestable.

Para determinar una relación cuantitativa para la distancia $\overline{GM}$ consulte el diagrama de la figura 2.17, que muestra una sección transversal uniforme. Busquemos una expresión para $\overline{x}$, la coordenada x del centroide del volumen del líquido desplazado. Se puede encontrar si se considera que el volumen es el original más la cuña agregada con área transversal DOE menos la cuña restada con área transversal AOB; para localizar el centroide de un volumen compuesto, tomamos momentos como sigue:

$$\overline{x}\,\forall = \overline{x}_0\forall_0 + \overline{x}_1\forall_1 - \overline{x}_2\forall_2 \tag{2.4.43}$$

donde $\forall_0$ es el volumen original debajo de la línea del agua, $\forall_1$ es el área DOE por la longitud $\overline{x}_1$, y $\forall_2$ es el área AOB por la longitud $\overline{x}_2$; se supone que la sección transversal es uniforme, de modo que la longitud l es constante para el cuerpo. La cantidad $\overline{x}_0$, la coordenada x del punto C, es cero. Los dos términos restantes pueden representarse mejor mediante integrales, de modo que

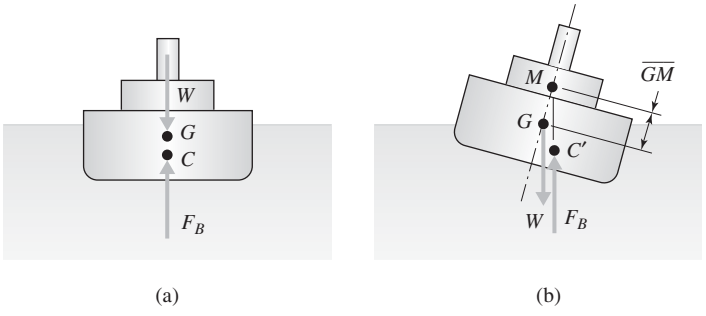


Fig. 2.16 Estabilidad de un cuerpo flotante: (a) posición de equilibrio; (b) posición girada.

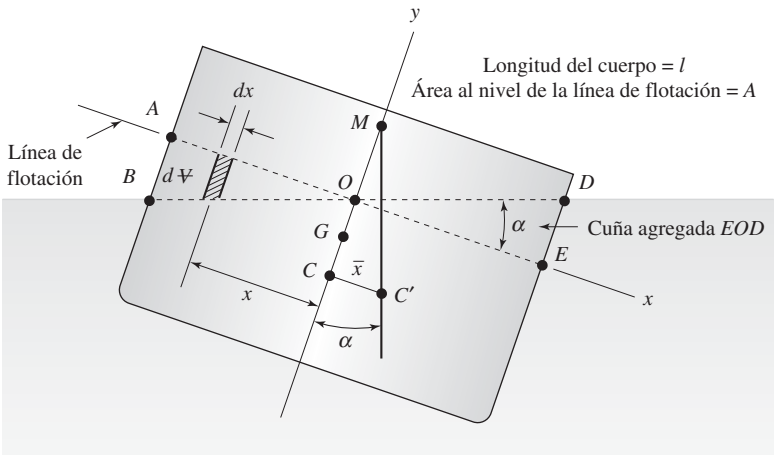


Fig. 2.17 Sección transversal uniforme de un cuerpo flotante.

$$\bar{x}\,\forall = \int_{\forall_1} x\,d\forall - \int_{\forall_2} x\,d\forall \tag{2.4.44}$$

Entonces $d\forall = x \tan \alpha\, dA$ en el volumen 1 y $d\forall = -x \tan \alpha\, dA$ en el volumen 2, donde $dA = l\,dx$, siendo l la longitud constante del cuerpo. La ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned}\bar{x}\,\forall &= \tan\alpha \int_{A_1} x^2\,dA + \tan\alpha \int_{A_2} x^2\,dA \\ &= \tan\alpha \int_{A} x^2\,dA \\ &= I_O \tan\alpha\end{aligned} \tag{2.4.45}$$

donde I_O es el segundo momento (momento de inercia) del área al nivel de la línea de flotación respecto a un eje que pasa por el origen O. El área al nivel de la línea de flotación sería la longitud $\overline{AE}$ por la longitud l del cuerpo si l fuera de longitud constante. Usando $\bar{x} = \overline{CM} \tan \alpha$, podemos escribir

$$\overline{CM}\,\forall = I_O \tag{2.4.46}$$

o bien, con $\overline{CG} + \overline{GM} = \overline{CM}$, tenemos

$$\overline{GM} = \frac{I_O}{\forall} - \overline{CG} \tag{2.4.47}$$

Para la orientación de un cuerpo dada, si $\overline{GM}$ es positiva, el cuerpo es estable. Aun cuando esta relación (2.4.47) se dedujo para un cuerpo flotante con sección transversal uniforme, es aplicable para cuerpos flotantes en general. La aplicaremos a un cilindro flotante en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10

Un cilindro de 0.25 m de diámetro mide 0.25 m de largo y está compuesto por material con un peso específico de 8000 N/m^3. ¿Flotará en agua con sus extremos en posición horizontal?

Solución

Con los extremos horizontales, I_O será el segundo momento de la sección transversal circular,

$$I_O = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.25^4}{64} = 0.000192 \text{ m}^4$$

El volumen desplazado será

$$\forall = \frac{W}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{8000 \times \pi/4 \times 0.25^2 \times 0.25}{9810} = 0.0100 \text{ m}^3$$

La profundidad a la que el cilindro se hunde en el agua es

$$\textit{profundidad} = \frac{\forall}{A} = \frac{0.01}{\pi \times 0.25^2/4} = 0.204 \text{ m}$$

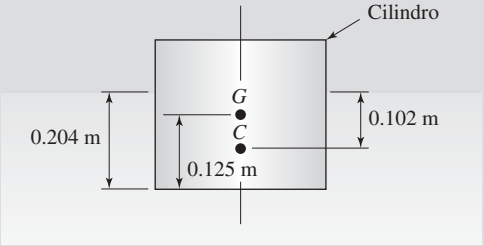


Fig. E2.10

Por lo tanto, la distancia $\overline{CG}$, como se muestra en la figura E2.10, es

$$\overline{CG} = 0.125 - \frac{0.204}{2} = 0.023 \text{ m}$$

Por último,

$$\overline{GM} = \frac{0.000192}{0.01} - 0.023 = -0.004 \text{ m}$$

Éste es un valor negativo que muestra que el cilindro no flotará con sus extremos en posición horizontal. Indudablemente que flotaría de costado.

2.5 RECIPIENTES LINEALMENTE ACELERADOS

En esta sección el fluido estará en reposo con relación a un marco de referencia que es linealmente acelerado con una componente horizontal a_x y una componente vertical a_z. Entonces la ecuación 2.3.6 se simplifica a

$$dp = -\rho a_x \, dx - \rho(g + a_z) \, dz \tag{2.5.1}$$

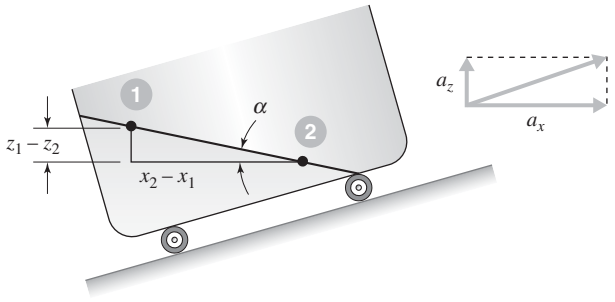


Fig. 2.18 Depósito linealmente acelerado.

Integrando entre dos puntos arbitrarios 1 y 2 tendremos

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) \tag{2.5.2}$$

Si los puntos 1 y 2 están en una línea de presión constante, por ejemplo la superficie libre de la figura 2.18, entonces $p_2 - p_1 = 0$ y tenemos

$$\frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \tan \alpha = \frac{a_x}{g + a_z} \tag{2.5.3}$$

donde α es el ángulo que la línea de presión constante forma con la horizontal.

CONCEPTO CLAVE *Con frecuencia utilizamos la conservación de la masa e igualamos los volúmenes antes y después de aplicar la aceleración.*

En la solución de problemas que comprenden líquidos, con frecuencia debemos utilizar la conservación de la masa e igualar los volúmenes antes y después de aplicar la aceleración. Después de que la aceleración se haya aplicado inicialmente, puede presentarse un chapoteo. Nuestro análisis supondrá que no ocurre tal chapoteo; o se permite que transcurra un tiempo suficiente para amortiguar los movimientos que dependen del tiempo o la aceleración se aplica en forma tal que esos movimientos sean mínimos.

Ejemplo 2.11

El tanque que se muestra en la figura E2.11a es acelerado hacia la derecha. Calcule la aceleración a_x necesaria para que la superficie libre, ilustrada en la figura E2.11b, toque el punto A. También, encuentre p_B y la fuerza total que actúa sobre el fondo del tanque si el ancho de éste es de 1 m.

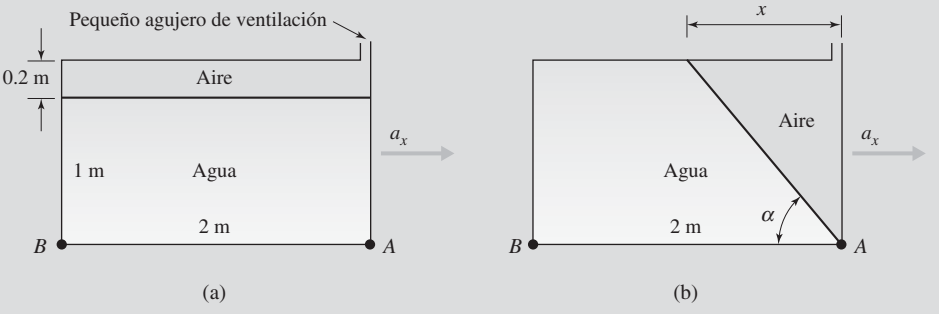


Fig. E2.11

Solución
El ángulo que forma la superficie libre se encuentra igualando el volumen de aire (en realidad, las áreas ya que el ancho es constante) antes y después dado que no se derrama agua:

$$0.2 \times 2 = \frac{1}{2}(1.2x)$$
$$x = 0.667 \text{ m}$$

Ahora se conoce la cantidad tan α. Es

$$\tan \alpha = \frac{1.2}{0.667} = 1.8$$

Con la ecuación 2.5.3 y haciendo $a_z = 0$ encontramos que a_x es

$$a_x = g \tan \alpha$$
$$= 9.81 \times 1.8 = 17.66 \text{ m/s}^2$$

Podemos hallar la presión en B si vemos que la presión depende de x. En A, la presión es cero. Por tanto, la ecuación 2.5.2 produce

$$p_B - \overset{0}{\cancel{p_A}} = -\rho a_x (x_B - x_A)$$
$$p_B = -1000 \times 17.66(-2)$$
$$= 35\,300 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 35.3 \text{ kPa}$$

Para hallar la fuerza total que actúa sobre el fondo del tanque, vemos que la distribución de la presión disminuye linealmente de $p = 35.3$ kPa en B a $p = 0$ kPa en A. En consecuencia, podemos usar la presión promedio sobre el fondo del tanque:

$$F = \frac{p_B + p_A}{2} \times \text{área}$$
$$= \frac{35\,300 + 0}{2} \times 2 \times 1 = 35\,300 \text{ N}$$

2.6 RECIPIENTES GIRATORIOS

En esta sección consideramos la situación de un líquido contenido en un recipiente giratorio, como el que se ilustra en la figura 2.19. Después de un lapso relativamente breve, el líquido alcanza un equilibrio estático respecto al recipiente y al marco de referencia giratorio rz. La rotación horizontal no altera la distribución de la presión en la dirección vertical. No habrá variación de presión respecto a la coordenada θ. Aplicando la segunda ley de Newton ($\sum F_r = ma_r$) en la dirección r al elemento que se muestra, usando $d\theta/2 \cong d\theta/2$ produce

CONCEPTO CLAVE *Una rotación horizontal no alterará la distribución de la presión en la dirección vertical.*

$$-\frac{\partial p}{\partial r} dr\, r d\theta\, dz - p r d\theta\, dz - p\, dr\, d\theta\, dz - \frac{\partial p}{\partial r}(dr)^2 d\theta\, dz$$

$$+ 2p \frac{d\theta}{2} dr\, dz + p r d\theta\, dz = -\rho\, r d\theta\, dr\, dz\, r\omega^2 \qquad (2.6.1)$$

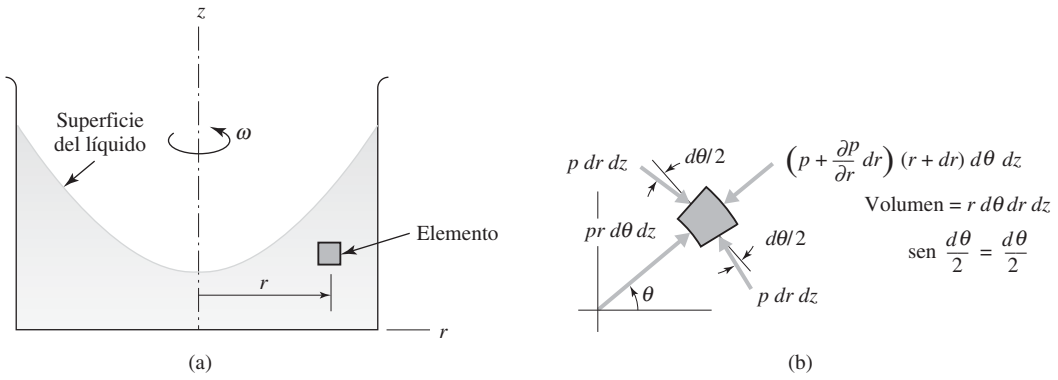


Fig. 2.19 Recipiente sometido a rotación: (a) sección transversal del líquido; (b) vista superior de un elemento.

donde la aceleración es $r\omega^2$ hacia el centro de rotación. Simplifique y divida entre el volumen $rd\theta\, dr\, dz$; entonces

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2 \tag{2.6.2}$$

donde hemos despreciado el término de orden superior que contiene la diferencial dr. La diferencial de presión se convierte entonces en

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \\ &= \rho r \omega^2 \, dr - \rho g \, dz \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

donde hemos usado la variación de presión estática dada por la ecuación 2.3.5 con $a_z = 0$. Ahora podemos integrar entre cualesquiera dos puntos (r_1, z_1) y (r_2, z_2) para obtener

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \rho g (z_2 - z_1) \tag{2.6.4}$$

Si los dos puntos están en una superficie de presión constante, tal como la superficie libre, localizar el punto 1 sobre el eje z de modo que $r_1 = 0$, resulta en

$$\frac{\omega^2 r_2^2}{2} = g(z_2 - z_1) \tag{2.6.5}$$

CONCEPTO CLAVE *La superficie libre es un paraboloide de revolución.*

que es la ecuación de una parábola. Por tanto, la superficie libre es un paraboloide de revolución. Ahora, con la conservación de la masa, las ecuaciones anteriores pueden usarse para resolver problemas de interés.

Ejemplo 2.12

El cilindro que se muestra en la figura E2.12 se gira respecto a su línea de centro. Calcule la velocidad rotacional que es necesaria para que el agua toque apenas el origen O. También, encuentre las presiones en A y B.

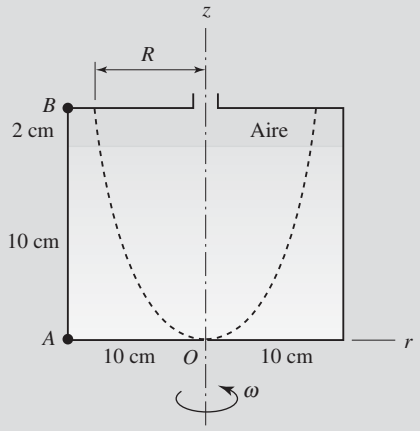


Fig. E2.12

Solución

Como no se derrama agua del recipiente, el volumen del aire permanece constante, es decir,

$$\pi \times 10^2 \times 2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \times 12$$

donde partimos del hecho de que el volumen de un paraboloide de revolución es la mitad del de un cilindro circular con la misma altura y mismo radio. Esto da el valor

$$R = 5.77 \text{ cm}$$

Usando la ecuación 2.6.5 con $r_2 = R$, tenemos

$$\frac{\omega^2 \times 0.0577^2}{2} = 9.81 \times 0.12$$

$$\therefore\ \omega = 26.6 \text{ rad/s}$$

Para hallar la presión en el punto A, simplemente calculamos la diferencia de presión entre A y O. Usando la ecuación 2.6.4 con $r_2 = r_A = 0.1$ m, $r_1 = r_0 = 0$, y $p_1 = p_0 = 0$, resulta

$$p_A = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_A^2 - r_0^2) = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \times 26.6^2 \text{ rad/s}^2}{2} \times 0.1^2 \text{ m}^2 = 3540 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 3.54 \text{ kPa}$$

usando kg = N • s^2/m. La presión en B se puede hallar aplicando la ecuación 2.6.4 a los puntos A y B. Esta ecuación se simplifica a

$$p_B - p_A = -\rho g(z_B - z_A)$$

En consecuencia,

$$p_B = 3540 - 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0.12 \text{ m} = 2360 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 2.36 \text{ kPa}$$

2.7 RESUMEN

La variación de la presión en la dirección z vertical en un fluido de densidad constante se encuentra usando

$$\Delta p = -\gamma \Delta z \tag{2.7.1}$$

Ésta se usa para interpretar manómetros y para establecer la fuerza en un plano como

$$F = \gamma \overline{h} A \tag{2.7.2}$$

donde $\overline{h}$ es la distancia vertical al centroide del área. La fuerza se localiza a una distancia desde la superficie libre al centro de presión paralela al área dada por

$$y_p = \overline{y} + \frac{\overline{I}}{A\overline{y}} \tag{2.7.3}$$

donde $\overline{I}$ es respecto al eje centroidal. Las fuerzas sobre superficies curvas se encuentran usando las relaciones anteriores y el peso del líquido contenido sobre la superficie.

Las presiones y fuerzas en recipientes linealmente acelerados se determinan usando el ángulo α de una línea de presión constante:

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{g + a_z} \tag{2.7.4}$$

Es muy frecuente que la aceleración a_z en la dirección vertical sea cero.

En un recipiente que gira con velocidad angular ω, una superficie de presión constante está descrita por

$$\frac{1}{2} \omega^2 r_2^2 = g(z_2 - z_1) \tag{2.7.5}$$

donde el punto 1 está sobre el eje de rotación y el punto 2 está en cualquier parte sobre la superficie de presión constante.

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

2.1 Un meteorólogo afirma que la presión barométrica es 28.5 pulgadas de mercurio. Convierta esta presión a kilopascales.

(A) 98.6 kPa **(B)** 97.2 kPa
(C) 96.5 kPa **(D)** 95.6 kPa

2.2 La presión al pie de las Montañas Rocallosas cerca de Boulder, Colorado, es 84 kPa. La presión, suponiendo una densidad constante de 1.00 kg/m^3, en lo alto de una montaña de 4 000 m de altitud colindante está más cercana a:

(A) 60 kPa **(B)** 55 kPa
(C) 50 kPa **(D)** 45 kPa

2.3 Calcule la presión en el tubo de agua que se muestra en la figura P2.3. El manómetro está abierto a la atmósfera.

(A) 10 kPa **(B)** 9 kPa
(C) 8 kPa **(D)** 7 kPa

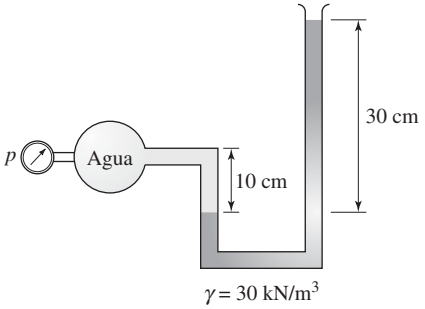


Fig. P2.3.

2.4 Si la presión en el aire indicada en la figura P2.4 aumenta en 10 kPa, la magnitud de H estará más cercana (inicialmente H = 16 cm) a:

(A) 8.5 cm **(B)** 10.5 cm
(C) 16 cm **(D)** 24.5 cm

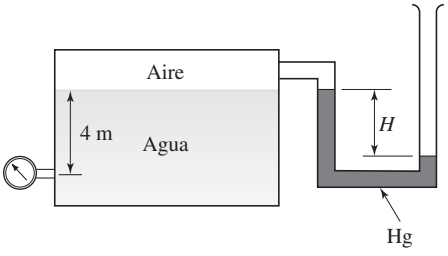


Fig. P2.4

2.5 La compuerta rectangular mostrada en la figura. P2.5 es de 3 m de ancho. La fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada está más cercana a:

(A) 24.5 kN **(B)** 32.7 kN
(C) 98 kN **(D)** 147 kN

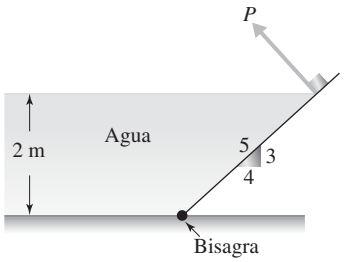


Fig. P2.5

2.6 La compuerta rígida abisagrada en un punto central como se muestra en la figura P2.6 se abre cuando H = 5 m. ¿A qué distancia está la bisagra del fondo del agua?

(A) 1.08 m **(B)** 1.10 m
(C) 1.12 m **(D)** 1.14 m

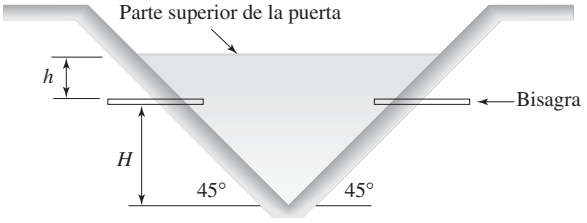


Fig. P2.6

2.7 Una fuerza P = 300 kN es necesaria para apenas abrir la compuerta de la figura P2.7 con R = 1.2 m y H = 4 m. ¿Cuál es el ancho de la compuerta?

(A) 2.98 m **(B)** 3.67 m
(C) 4.32 m **(D)** 5.16 m

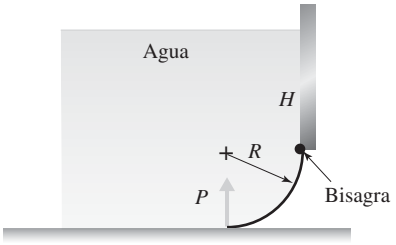


Fig. P2.7

2.8 Se sabe que la barcaza rectangular de la figura P2.8 mide 15 m de largo. Una carga que tiene una masa de 900 kg se agrega a la barcaza haciendo que ésta se hunda 10 mm. ¿Cuál es el ancho de la barcaza?

(A) 6 m **(B)** 9.2 m
(C) 7.5 m **(D)** 0.62 m

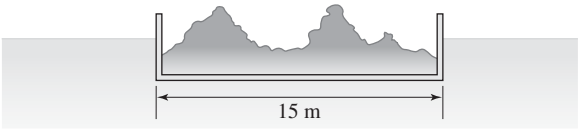


Fig. P.2.8

2.9 El tanque, con una presión inicial de $p = 20$ kPa, es acelerado como se indica en la figura P2.9 a razón de 5 m/s^2. La fuerza sobre el tapón de 4 cm de diámetro está más cercana a:

(A) 30 N **(B)** 50 N
(C) 130 N **(D)** 420 N

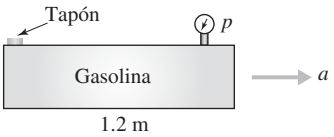


Fig. P2.9

PROBLEMAS

Presión

2.10 Suponga que el elemento de la figura 2.2 está en el plano yz con una profundidad unitaria en la dirección x. Encuentre un resultado similar al de la ecuación 2.2.4. Suponga que la gravedad actúa en la dirección z.

2.11 Calcule la presión a una profundidad de 10 m en un líquido con una gravedad específica de:

(a) 1.0 **(b)** 0.8
(c) 13.6 **(d)** 1.59
(e) 0.68

2.12 ¿Qué profundidad es necesaria en un líquido para producir una presión de 250 kPa si la gravedad específica es:

(a) 1.0? **(b)** 0.8? **(c)** 13.6?
(d) 1.59? **(e)** 0.68?

2.13 Se mide una presión de 20 psi a una profundidad de 20 ft. Calcule la gravedad específica y la densidad del líquido si $p = 0$ en la superficie.

2.14 ¿Cuántos metros de agua son equivalentes a:

(a) 760 mm Hg? **(b)** 75 cm Hg?
(c) 10 mm Hg?

2.15 Determine la presión en el fondo de un tanque abierto si contiene capas de:

(a) 20 cm de agua y 2 cm de mercurio
(b) 52 mm de agua y 26 mm de tetracloruro de carbono
(c) 3 m de aceite, 2 m de agua y 10 cm de mercurio

2.16 Suponiendo que la densidad del aire sea constante en 0.0024 slug/ft^3, calcule el cambio de presión desde lo alto de la montaña a su base si el cambio de elevación es 10 000 ft.

2.17 Suponga que la presión del aire es 100 kPa absoluta en lo alto de un muro de 3 metros. Suponiendo una densidad constante, calcule la diferencia en presión en la base del muro si en el exterior de éste la temperatura es de –20 ºC y dentro del muro es de 20 ºC. Esta diferencia de presión induce una infiltración aun cuando no haya viento.

2.18 La gravedad específica de un líquido varía linealmente de 1.0 en la superficie a 1.1 a una profundidad de 10 m. Calcule la presión en $h = 10$ m.

2.19 Si el gradiente de $p(x, y, z)$ en coordenadas rectangulares es $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$, escriba la expresión más sencilla para ∇p usando la ecuación 2.3.5, reconociendo que $\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$.

2.20 Use la ecuación 2.4.8 para determinar la presión en lo alto de un edificio de 300 m de altura. A continuación, suponga que la densidad es constante en el valor $z = 0$ y calcule p a 300 m; también calcule el error porcentual en este segundo cálculo. Utilice condiciones estándar en $z = 0$. Comente en cuanto a solicitar la asesoría de un ingeniero, suponiendo que la atmósfera es incompresible a alturas de hasta 300 metros.

2.21 Calcule el cambio de presión del aire sobre una altura de 20 m suponiendo condiciones estándar y usando la ecuación 2.4.8. Comente en cuanto a solicitar la asesoría de un ingeniero para ignorar por completo los cambios de presión hasta alturas de unos 20 m, en un gas como el aire.

2.22 Suponga que el módulo de volumen es constante y encuentre una expresión para la presión como una función de la profundidad h en el océano. Use esta expresión y calcule la presión suponiendo que $\rho_0 = 2.00$ slug/ft^3. A continuación, suponga una densidad constante de 2.00 slug/ft^3 y calcule la presión y el error porcentual, suponiendo que la estimación en el primer cálculo es correcta. Use profundidades de **(a)** 1500 ft, **(b)** 5000 ft, y **(c)** 15 000 ft.

2.23 Calcule la presión a 10 000 m suponiendo una atmósfera isotérmica con temperatura de:

(a) 0 ºC **(b)** 15 ºC **(c)** –15 ºC

2.24 La temperatura en la atmósfera se calcula de forma aproximada con la ecuación $T(z) = 15 - 0.0065z$ ºC para elevaciones menores que 11 000 metros. Calcule la presión a elevaciones de:

(a) 3 000 m **(b)** 6 000 m
(c) 9 000 m **(d)** 11 000 m

2.25 Determine la elevación donde $p = 0.001$ psia suponiendo una atmósfera isotérmica con $T = –5$ ºF.

Manómetros

2.26 Calcule la presión en un tubo que transporta aire si en un manómetro de tubo en U se miden 25 cm Hg. Observe que el peso del aire en el manómetro es insignificante.

2.27 Si la presión del aire en un tubo es 450 kPa, ¿cuál será la lectura en un manómetro de tubo en U con mercurio? Utilice $h = 1.5$ cm en la figura 2.7b.

(a) Desprecie el peso de la columna de aire.

(b) Incluya el peso de la columna de aire, suponiendo que $T_{aire} = 20$ °C, y calcule el error porcentual del inciso (a).

2.28 Un manómetro de tubo en U está conectado a un tubo que transporta un líquido. Se sabe que la presión en el tubo donde está el manómetro es 2.4 kPa. Seleccione el líquido de la tabla B.5 que sea más probable que sea transportado si el manómetro indica la siguiente altura del líquido arriba del tubo:

(a) 36.0 cm **(b)** 27.2 cm

(c) 24.5 cm **(d)** 15.4 cm

2.29 Se sabe que la presión en la nariz de un avión que vuela a una velocidad relativamente baja está relacionada con su velocidad mediante $p = \frac{1}{2}\rho V^2$, donde ρ es la densidad del aire. Determine la velocidad de un avión que vuela cerca de la superficie terrestre si un manómetro de tubo en U, que mide la presión en la nariz, indica:

(a) 6 cm de agua **(b)** 3 pulg de agua

(c) 10 cm de agua **(d)** 5 pulg de agua

2.30 Aceite con $S = 0.86$ se transporta en un tubo. Calcule la presión si un manómetro de tubo en U indica 9.5 pulg Hg. El aceite en el manómetro desciende 5 pulg por debajo de la línea central del tubo.

2.31 Varios líquidos están en capas dentro de un tanque con aire presurizado en la parte superior. Si la presión del aire es de 3.2 kPa, calcule la presión en el fondo del tanque si las capas incluyen 20 cm de aceite SAE 10, 10 cm de agua, 15 cm de glicerina y 18 cm de tetracloruro de carbono.

2.32 Para el arreglo que se muestra en la figura P2.32, calcule la lectura H en el manómetro.

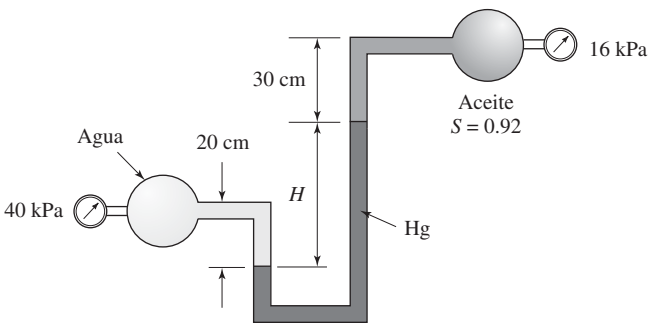


Fig. P2.32

2.33 Para el arreglo que se muestra en la figura P2.33, encuentre la diferencia de presión entre el tubo de aceite y el tubo de agua.

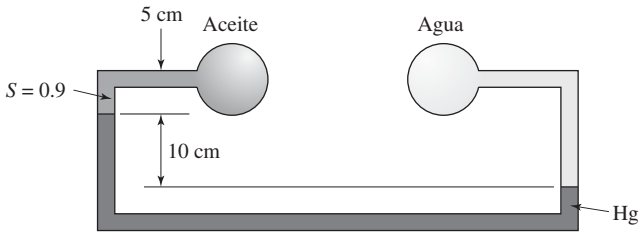


Fig. P2.33

2.34 ¿Cuál es la presión en el tubo que transporta agua que se ilustra en la figura P2.34?

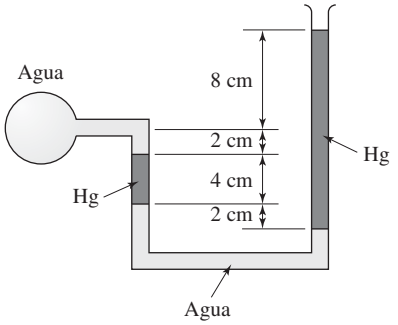


Fig. P2.34

2.35 Determine la diferencia de presión entre el tubo que transporta agua y el que transporta aceite que se ilustran en la figura P2.35.

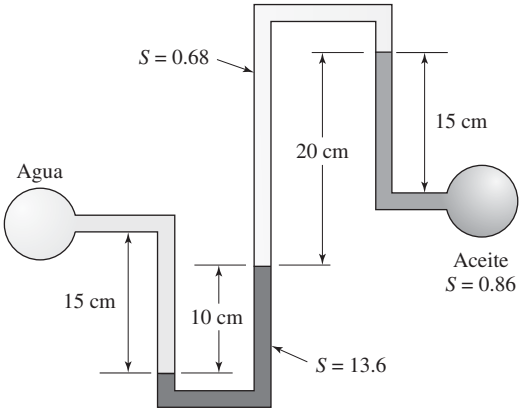


Fig. P2.35

2.36 ¿Cuál es la presión en el tubo que transporta aceite que se muestra en la figura P2.36 si la presión en el tubo que transporta agua es de 15 kPa?

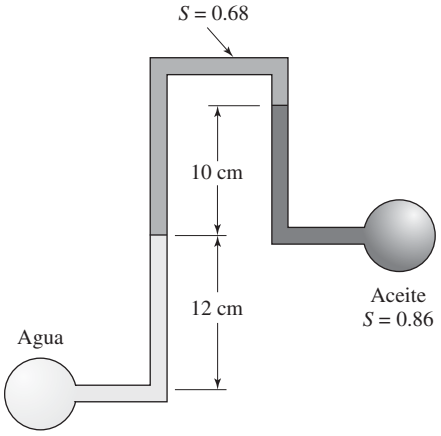


Fig. P2.36

2.37 Para el tanque de la figura P2.37, determine la lectura del manómetro de presión si:

(a) $H = 2$ m, $h = 10$ cm
(b) $H = 0.8$ m, $h = 20$ cm
(c) $H = 6$ ft, $h = 4$ in.
(d) $H = 2$ ft, $h = 8$ in.

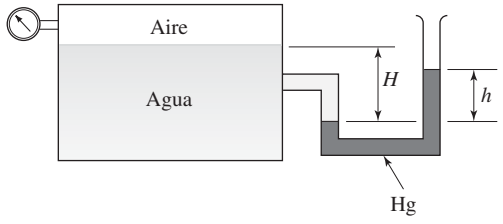


Fig. P2.37

2.38 Para el tanque de la figura P2.38, si $H = 16$ cm, ¿cuál será la lectura en el manómetro?

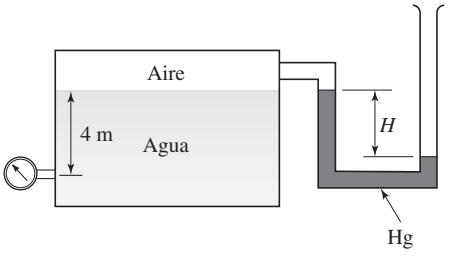


Fig. P2.38

2.39 La presión en el tubo que transporta agua de la figura 2.7b es 8.2 kPa, con $h = 25$ cm y $S_2 = 1.59$. Encuentre la presión en el tubo que transporta agua si la lectura H aumenta en 27.3 cm.

2.40 Encuentre la presión en el tubo que transporta agua de la figura P2.40.

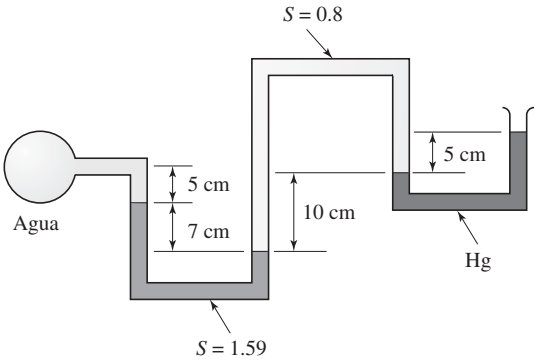


Fig. P2.40

2.41 Para el manómetro inclinado que contiene mercurio, que se muestra en la figura P2.41, determine la presión en el tubo B si la presión en el tubo A es 10 de kPa. Por el tubo A circula agua, y aceite por el tubo B.

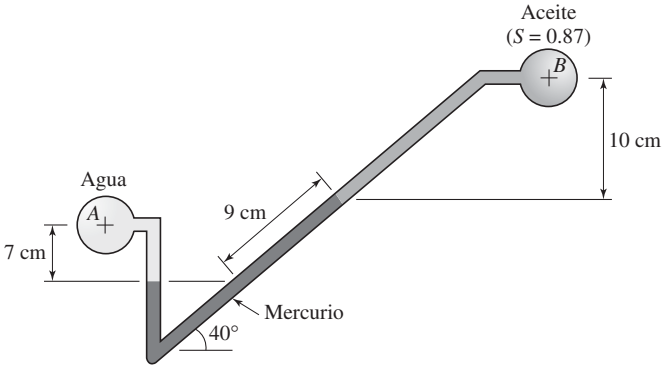


Fig. P2.41

2.42 La presión en el tubo B en el problema anterior se reduce ligeramente. Determine la nueva presión en el tubo B si la presión en el tubo A permanece igual y la lectura a lo largo del tramo inclinado del manómetro es 11 cm.

2.43 En la figura P2.43, con la parte superior del manómetro abierta, el nivel de mercurio es 8 in. debajo del tubo con aire; no hay presión en el tubo con aire. La parte superior del manómetro se sella entonces. Calcule la lectura H del manómetro para una presión de 30 psi en el tubo

con aire. Suponga un proceso isotérmico para el aire en el tubo sellado.

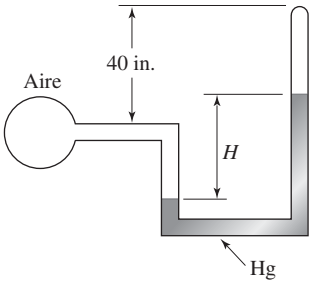


Fig. P2.43

2.44 Con referencia a la figura 2.7c, determine la lectura H del manómetro para las siguientes condiciones:

(a) $z_i = (22, 16, 10, z_4, 17)$ cm, $p_1 = 4$ kPa, $\gamma_i = (9800, 15\,600, 133\,400)$ N/m^3, $d = 5$ mm, $D = 100$ mm.

(b) $z_i = (10, 8, 6, z_4, 8.5)$ in., $p_1 = 0.6$ psi, $\gamma_i = (62.4, 99.5, 849)$ lb/ft^3, $d = 0.2$ in., $D = 4$ in.

2.45 Calcule el porcentaje de aumento en la lectura del manómetro si la presión p_1 se aumenta en 10% en:

(a) El problema 2.44a.

(b) El problema 2.44b.

2.46 La presión en el tubo que transporta agua del problema 2.36 se aumenta a 15.5 kPa, mientras que la presión en el tubo que transporta aceite permanece constante. ¿Cuál será la nueva lectura en el manómetro?

2.47 Determine la nueva lectura h en el manómetro si la presión de aire se aumenta en 10% en el:

(a) Problema 2.37a.

(b) Problema 2.37b.

(c) Problema 2.37c.

(d) Problema 2.37d.

Fuerzas sobre áreas planas

2.48 Calcule la fuerza que actúa sobre una claraboya de 30 cm de diámetro de un barco, si el centro de la claraboya está a 10 m abajo del nivel del agua.

2.49 Una piscina se llena con 2 m de agua. Su fondo es cuadrado y mide 4 m por lado. Dos lados opuestos son verticales; un extremo está a 45º y el otro forma un ángulo de 60º con la horizontal. Calcule la fuerza del agua sobre:

(a) El fondo

(b) Un lado vertical

(c) El extremo a 45º

(d) El extremo a 60º

2.50 Una bóveda rectangular cerrada hecha de concreto, con dimensiones externas de 2 m × 1m × 1.5 m y grosor de pared de 10 cm, está enterrada con la cara superior a ras del suelo. ¿Tenderá la bóveda a sobresalir del suelo si éste se satura completamente con agua? Use $S_{\text{concreto}} = 2.4$.

2.51 Se llena un tanque de 4 m de diámetro y 6 m de largo con gasolina. Calcule la fuerza que ejerce la gasolina sobre un extremo del tanque. Suponga que el tanque no está presurizado y que los extremos son verticales.

2.52 Los lados de un área triangular miden 2 m, 3 m y 3 m, respectivamente. Calcule la fuerza del agua en un lado del área si el lado de 2 m es horizontal, está 10 m debajo de la superficie y el triángulo está:

(a) Vertical

(b) Horizontal

(c) Sobre una pendiente de 60º hacia arriba

2.53 La compuerta triangular que se ilustra en la figura P2.53 tiene su lado de 6 ft paralelo y a 30 ft debajo de la superficie del agua. Calcule la magnitud y la ubicación de la fuerza que actúa sobre la compuerta si está:

(a) Vertical

(b) Horizontal

(c) Sobre una pendiente de 45º hacia arriba

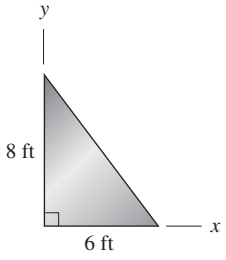


Fig. P2.53

2.54 La parte superior de cada una de las compuertas de la figura P2.54 está 4 m debajo de la superficie del agua. Encuentre la ubicación y la magnitud de la fuerza que actúa sobre un lado, suponiendo una orientación vertical.

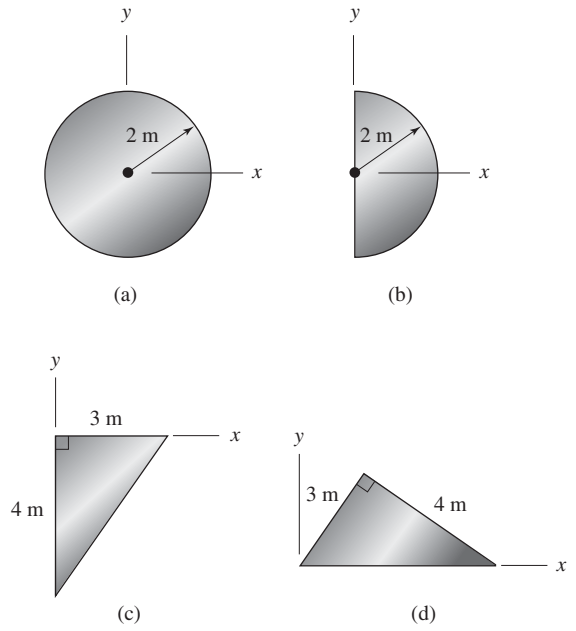


Fig. P2.54

2.55 Una compuerta rectangular vertical de 6 ft de ancho y 10 ft de alto tiene su borde superior a 6 ft debajo del nivel del agua. Está abisagrada a lo largo de su borde inferior. ¿Qué fuerza, que actúe sobre el borde superior, es necesaria para mantener cerrada la compuerta?

2.56 Determine la fuerza P necesaria para mantener la compuerta de 4 m de ancho en la posición mostrada en la figura P2.56.

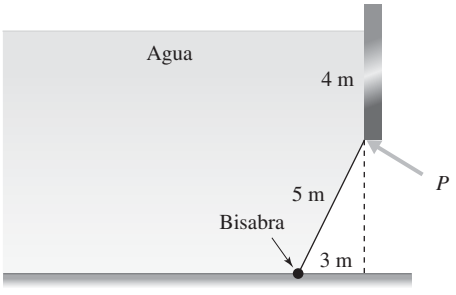


Fig. P2.56

2.57 Calcule la fuerza P necesaria para mantener la compuerta de 4 m de ancho en la posición mostrada en la figura P2.57 si:

(a) $H = 6$ m

(b) $H = 8$ m

(c) $H = 10$ m

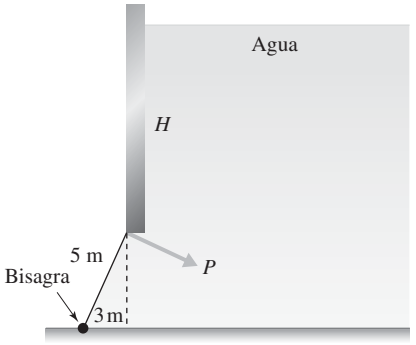


Fig. P2.57

2.58 Use la ecuación 2.4.28 y demuestre que la fuerza F en la figura 2.9 actúa a un tercio de la distancia hacia arriba sobre un área rectangular vertical y también sobre un área rectangular con pendiente. Suponga que la compuerta inclinada está a un ángulo α respecto a la horizontal.

2.59 Encuentre la fuerza P necesaria para mantener la compuerta rectangular de 3 m de ancho como se muestra en la figura P2.59 si:

(a) $l = 2$ m

(b) $l = 4$ m

(c) $l = 5$ m

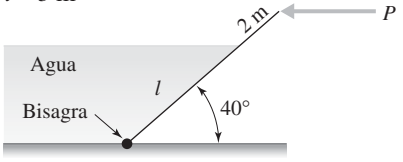


Fig. P2.59

2.60 Un canal trapezoidal, con una sección transversal como se muestra en la figura P2.60, tiene una compuerta en un extremo. ¿Cuál es la fuerza mínima P necesaria para mantener cerrada la compuerta vertical si tiene una bisagra en el fondo? La compuerta tiene las mismas dimensiones que el canal y la fuerza P actúa sobre la superficie del agua.

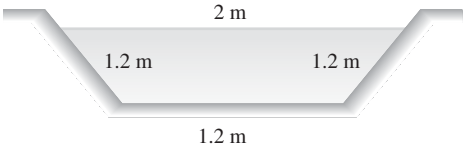


Fig. P2.60

2.61 Una compuerta vertical en el extremo de un canal (figura P2.61) se abre cuando el agua sobre la bisagra

produce un momento mayor que el momento del agua que está debajo de la bisagra. ¿Qué altura h del agua es necesaria para abrir la compuerta si:

(a) $H = 0.9$ cm?
(b) $H = 1.2$ m?
(c) $H = 1.5$ m?

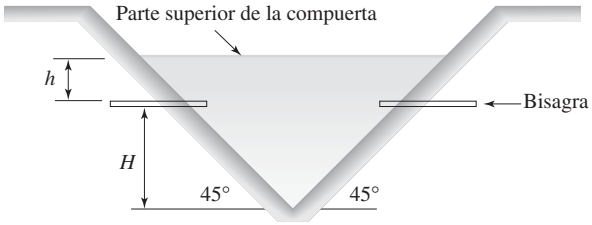


Fig. P2.61

2.62 ¿A qué altura H se abrirá la compuerta rígida, abisagrada en un punto central como se muestra en la figura P2.62, si h mide:

(a) 0.6 m?
(b) 0.8 m?
(c) 1.0 m?

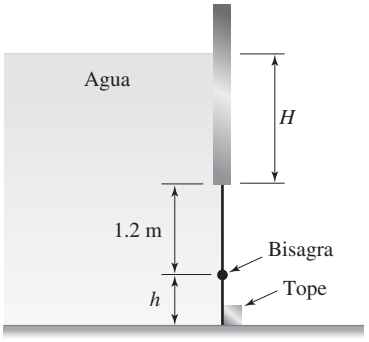


Fig. P2.62

2.63 Para la compuerta que se muestra en la figura P2.63, calcule la altura H que resultará en que la compuerta se abra automáticamente si (despreciando el peso de la compuerta):

(a) $l = 2$ m **(b)** $l = 1$ m
(c) $l = 6$ ft **(d)** $l = 3$ ft

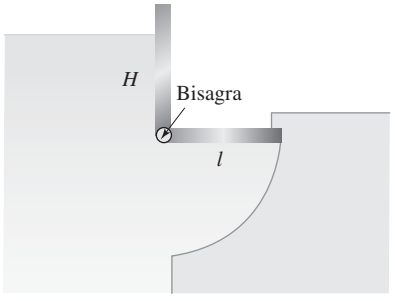


Fig. P2.63

2.64 Una compuerta rectangular con 2 m de ancho está abisagrada en el fondo, como se muestra en la figura P2.64. Está unida a un bloque cilíndrico de 70 kN y 1 m de diámetro por medio de un cable. Determine la altura H necesaria si la compuerta apenas toca el tope.

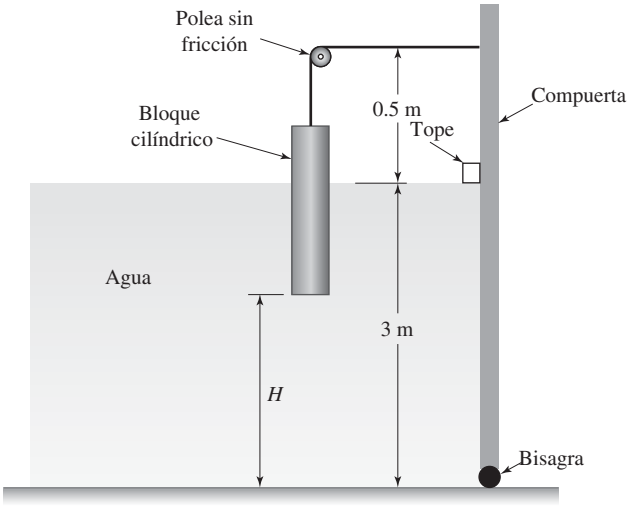


Fig. P2.64

2.65 La distribución de la presión sobre la base de una represa de concreto ($S = 2.4$) varía linealmente, como se muestra en la figura P2.65, produciendo un *levantamiento*. ¿Se volcará la presa (sume momentos de todas las fuerzas respecto a la esquina inferior derecha)? Use:

(a) $H = 45$ m
(b) $H = 60$ m
(c) $H = 75$ m

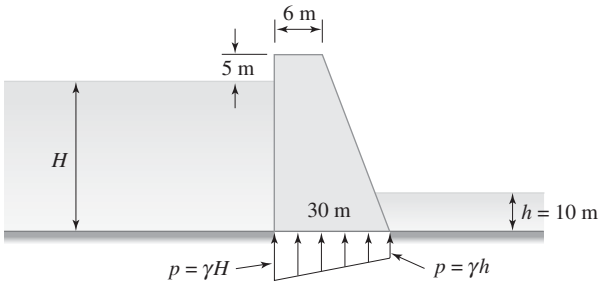


Fig. P2.65

2.66 Suponga una distribución lineal de presión sobre la base de la represa de concreto ($S = 2.4$) que se muestra en la figura P2.66. ¿Se volcará la represa (sume momentos respecto a la esquina inferior derecha)? Use:

(a) $H = 40$ ft

(b) $H = 60$ ft

(c) $H = 80$ ft

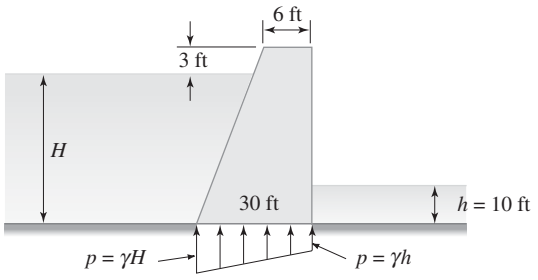


Fig. P2.66

Fuerzas sobre superficies curvas

2.67 En el ejemplo 2.7 suponga que el agua está arriba de la compuerta en lugar de estar debajo de ésta. El agua arriba de la compuerta producirá la misma distribución de presión (excepto que las fuerzas serán en direcciones opuestas). En consecuencia, la fuerza P será numéricamente igual (actuará hacia la izquierda). Con agua arriba de la compuerta, trace un diagrama de cuerpo libre y calcule P. Compare con los detalles del primer método del ejemplo 2.7.

2.68 Encuentre la fuerza P necesaria para mantener el cuerpo cilíndrico de 10 m de largo en la posición como se muestra en la figura P2.68.

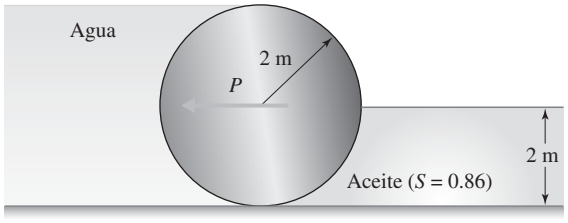


Fig. P2.68

2.69 Encuentre la fuerza P necesaria para apenas abrir la compuerta mostrada en la figura P2.69 si:

(a) $H = 6$ m, $R = 2$ m, y la compuerta es de 4 m de ancho.

(b) $H = 20$ ft, $R = 6$ ft, y la compuerta es de 12 ft de ancho.

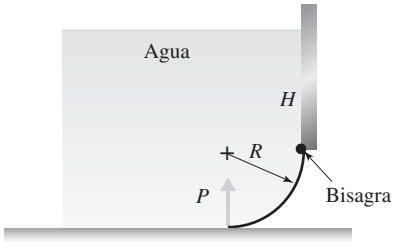


Fig. P2.69

2.70 (a) Determine la magnitud, dirección y línea de acción de las componentes horizontales y verticales de la fuerza hidrostática que actúa sobre la superficie curva AB mostrada en la figura P2.70, que tiene un radio de 2 m y un ancho de 4 metros.

(b) Suponga que el agua sale por el lado opuesto de la barrera vertical (la superficie AB permanece como se indica con el punto A a 8 m bajo el nivel de la superficie). Determine la información pedida en el inciso (a).

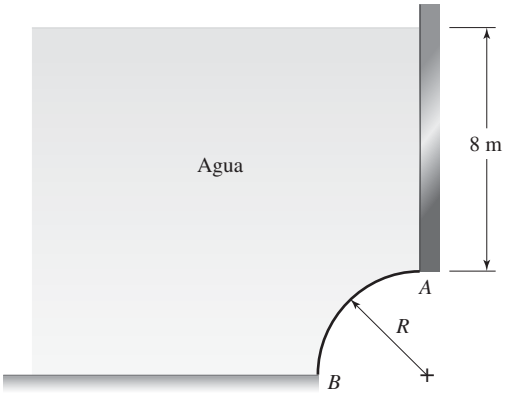


Fig. P2.70

2.71 ¿Qué P es necesaria para mantener cerrada la compuerta de 4 m de ancho que se muestra en la figura P2.71?

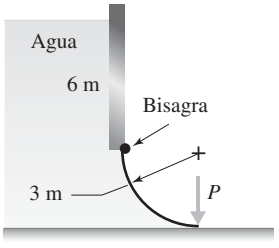


Fig. P2.71

2.72 Encuentre la fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada en la figura P2.72. La compuerta es de 5 m de ancho.

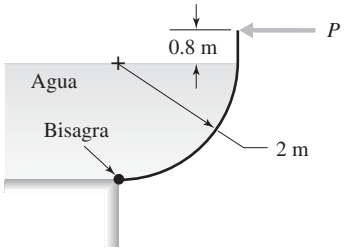


Fig. P2.72

2.73 La compuerta circular de 3 m de ancho mostrada en la figura P2.73 pesa 400 N con centro de gravedad a 0.9 m a la izquierda de la bisagra. Calcule la fuerza P necesaria para abrir la compuerta.

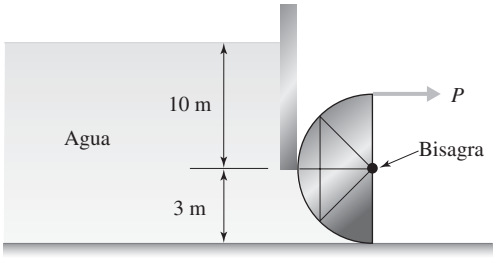


Fig. P2.73

2.74 La compuerta cilíndrica de un cuarto de círculo (figura P2.74, $S = 0.2$) está en equilibrio, como se muestra. Calcule el valor de γ_x usando:

(a) Unidades SI

(b) Unidades inglesas

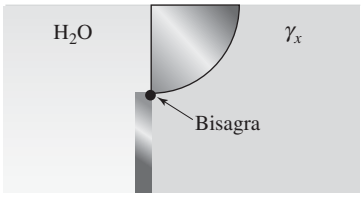


Fig. P2.74

2.75 Un tronco está en equilibrio, como se muestra en la figura P2.75. Calcule la fuerza que lo empuja contra la presa y la gravedad específica del tronco si:

(a) Su longitud es de 6 m y $R = 0.6$ m

(b) Su longitud es de 20 ft y $R = 2$ ft

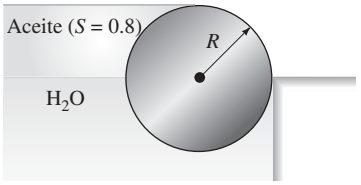


Fig. P2.75

2.76 Encuentre la fuerza sobre la soldadura mostrada en la figura P2.76 si:

(a) El hemisferio está lleno de aire

(b) El hemisferio está lleno de aceite

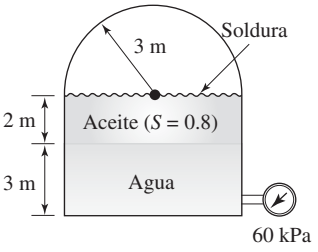


Fig. P2.76

2.77 Encuentre la fuerza P si la compuerta parabólica mostrada en la figura P2.77 mide:

(a) 2 m de ancho y $H = 2$ m

(b) 4 ft de ancho y $H = 8$ ft

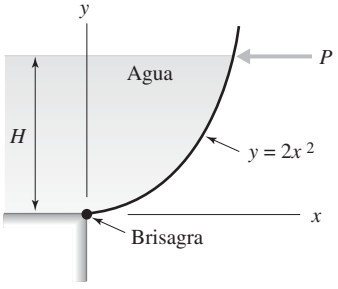


Fig. P2.77

Flotabilidad

2.78 La barcaza de 3 m de ancho que se muestra en la figura P2.78 pesa 20 kN vacía. Está propuesto que lleve una carga de 250 kN. Prediga el calado en:

(a) Agua dulce

(b) Agua salada ($S = 1.03$)

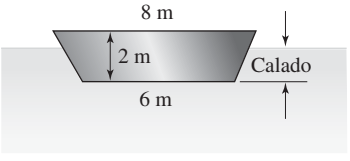


Fig. P2.78

2.79 Un cuerpo pesa 100 N en el aire y 25 N cuando está sumergido en agua. Calcule su volumen y peso específico.

2.80 Un transbordador de automóviles es esencialmente rectangular con dimensiones de 25 ft de ancho y 300 ft de largo. Si 60 autos, con un peso promedio de 3 000 lb por auto, se cargan en el transbordador, ¿cuánto se hundirá en el agua?

2.81 Una embarcación de 30 m de largo, con sección transversal como se muestra en la figura P2.81, lleva una carga de 6 000 kN. ¿A qué distancia estará el nivel del agua de la parte superior de la embarcación si su masa es de 100 000 kg?

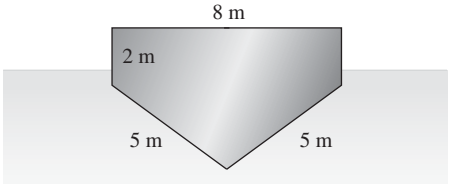


Fig. P2.81

2.82 Un cuerpo, con volumen de 2 m^3, pesa 40 kN. Determine su peso cuando se encuentre sumergido en un líquido con $S = 1.59$.

2.83 Un globo de aire caliente lleva una carga de 1 000 N, incluyendo su propio peso. Si mide 10 m de diámetro, calcule la temperatura promedio del aire en su interior si el aire exterior está a 20 ºC.

2.84 Un dirigible grande está propuesto para viajar cerca de la superficie terrestre. Si el dirigible se asemeja a un gran cilindro de 1 500 m de largo con diámetro de 300 m, calcule la carga útil si su propio peso es 10% de la carga útil. ¿Cuántas personas de 800 N podría llevar? El dirigible está lleno de helio y prevalecen condiciones estándar. (¡Este vehículo no causará mareos y las puestas de sol son espectaculares!)

2.85 Un objeto está construido de un material más ligero que el agua. Pesa 50 N en el aire y se requiere una fuerza de 10 N para mantenerlo bajo el agua. ¿Cuál es su densidad, peso específico y gravedad específica?

2.86 El tapón y el cilindro vacío que se muestran en la figura P2.86 pesan 1500 lb. Calcule la altura h necesaria para levantar el tapón si el radio R del cilindro de 10 ft de longitud es:

(a) 12 in.

(b) 16 in.

(c) 20 in.

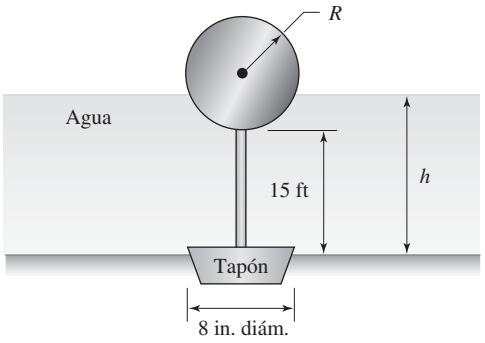


Fig. P2.86

2.87 El hidrómetro que se ilustra en la figura P2.87 sin mercurio tiene una masa de 0.01 kg. Está diseñado para flotar en el punto medio del vástago de 12 cm en agua pura.

(a) Calcule la masa de mercurio requerida.

(b) ¿Cuál es la gravedad específica del líquido si el hidrómetro está apenas sumergido?

(c) ¿Cuál es la gravedad específica del líquido si el vástago del hidrómetro está completamente expuesto?

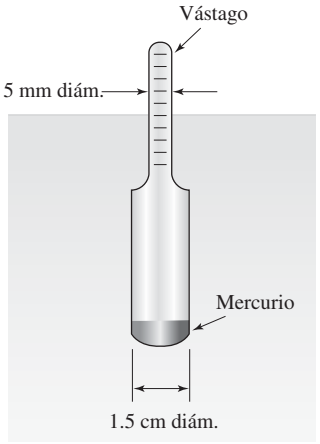


Fig. P2.87

2.88 Al hidrómetro del problema 2.87 se le coloca un peso para que en agua dulce el vástago apenas se sumerja.

(a) ¿Cuál es la gravedad específica máxima que se puede leer?

(b) ¿Qué masa de mercurio se requiere?

Estabilidad

2.89 Un cilindro de 10 pulg de diámetro está compuesto de material con gravedad específica de 0.8. ¿Flotará en agua con los extremos horizontales si su longitud es:
(a) 12 pulg?
(b) 10 pulg?
(c) 8 pulg?

2.90 ¿Entre qué límites de pesos específicos flotará en agua un cilindro circular con peso específico uniforme γ_x, con sus extremos horizontales si su altura es igual a su diámetro?

2.91 ¿Entre qué intervalo de pesos específicos flotará un cubo homogéneo con sus lados en posición horizontal y vertical?

2.92 Para el cuerpo que se ilustra en la figura P2.92, calcule S_A para que tenga una estabilidad neutra cuando se sumerja.

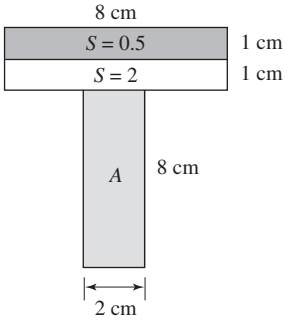


Fig. P2.92

2.93 Oriente el objeto que se muestra en la figura P2.93 para que tenga una estabilidad rotacional cuando se sumerja si:
(a) $t = 2$ cm **(b)** $t = 1.0$ pulg

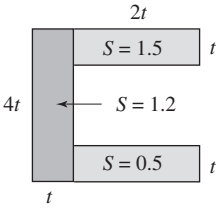


Fig. P2.93

2.94 La barcaza que se muestra en la figura P2.94 se carga en forma tal que su centro de gravedad y la carga están en la línea de flotación. ¿Es estable la barcaza?

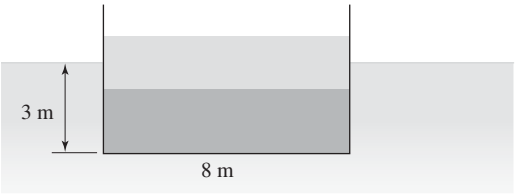


Fig. P2.94

2.95 La barcaza que se muestra en la figura P2.95, cargada simétricamente, ¿es estable? El centro de gravedad de la barcaza y la carga están localizados como se muestra.

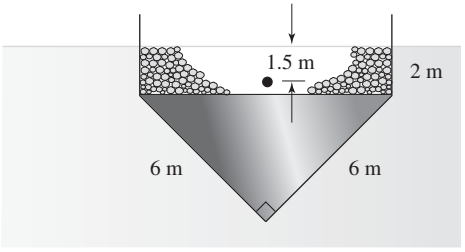


Fig. P2.95

Recipientes linealmente acelerados

2.96 El tanque que se ilustra en la figura P2.96 está completamente lleno de agua y se acelera. Calcule la máxima presión en el tanque si:
(a) $a_x = 20$ m/s^2, $a_z = 0$, $L = 2$ m
(b) $a_x = 0$, $a_z = 20$ m/s^2, $L = 2$ m
(c) $a_x = 60$ ft/s^2, $a_z = 60$ ft/s^2, $L = 6$ ft
(d) $a_x = 0$, $a_z = 60$ ft/s^2, $L = 6$ ft

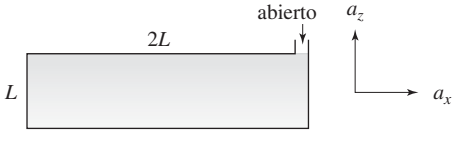


Fig. P2.96

2.97 El tanque que se ilustra en la figura P2.97 se acelera a la derecha a 10 m/s^2. Encuentre:

(a) p_A **(b)** p_B **(c)** p_C

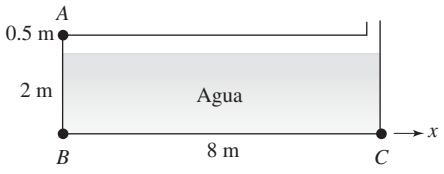


Fig. P2.97

2.98 El tanque del problema 2.97 es acelerado de modo que $p_B = 60$ kPa. Encuentre a_x suponiendo que:

(a) $a_z = 0$

(b) $a_z = 10$ m/s^2

(c) $a_z = 5$ m/s^2

2.99 El tanque del problema 2.99 está lleno de agua y se acelera. Encuentre la presión en A si:

(a) $a = 20$ m/s^2, $L = 1$ m

(b) $a = 10$ m/s^2, $L = 1.5$ m

(c) $a = 60$ ft/s^2, $L = 3$ ft

(d) $a = 30$ ft/s^2, $L = 4$ ft

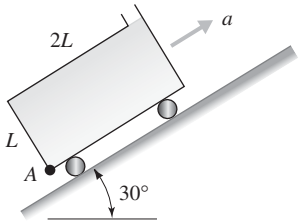


Fig. P2.99

2.100 El tanque del problema 2.97 mide 4 m de ancho. Encuentre la fuerza que actúa sobre:

(a) El extremo AB

(b) El fondo

(c) La parte superior

2.101 El tanque del problema 2.98(a) mide 1.5 m de ancho. Calcule la fuerza en:

(a) El fondo

(b) La parte superior

(c) El extremo izquierdo

2.102 Para el tubo en U que se muestra en la figura P2.102, determine la presión en los puntos A, B y C si:

(a) $a_x = 0, a_z = 10$ m/s^2, $L = 60$ cm

(b) $a_x = 20$ m/s^2, $a_z = 0$, $L = 60$ cm

(c) $a_x = 20$ m/s^2, $a_z = 10$ m/s^2, $L = 60$ cm

(d) $a_x = 0, a_z = -60$ ft/s^2, $L = 25$ in

(e) $a_x = 60$ ft/s^2, $a_z = 0$, $L = 25$ in

(f) $a_x = -30$ ft/s^2, $a_z = 30$ ft/s^2, $L = 25$ in

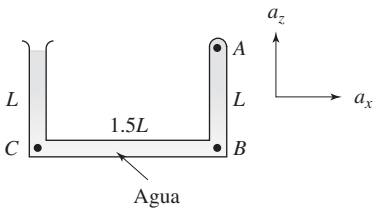


Fig. P2.102

Recipientes giratorios

2.103 El tubo en U del problema 2.102 se hace girar con respecto al tramo izquierdo a 50 rpm. Encuentre p_A, p_B y p_C si:

(a) $L = 60$ cm **(b)** $L = 40$ cm

(c) $L = 25$ in **(d)** $L = 15$ in

2.104 El tubo en U del problema 2.102 se hace girar con respecto al tramo derecho a 10 rad/s. Encuentre las presiones en los puntos A, B y C si:

(a) $L = 60$ cm **(b)** $L = 40$ cm

(c) $L = 25$ in **(d)** $L = 15$ in

2.105 El tubo en U del problema 2.102 se hace girar con respecto al eje vertical que pasa por el centro del tramo horizontal, de modo que la presión en el centro de este tramo es cero. Calcule ω si:

(a) $L = 60$ cm **(b)** $L = 40$ cm

(c) $L = 25$ in **(d)** $L =$15 in

2.106 Para el cilindro que se ilustra en la figura P2.106, determine la presión en el punto A para una velocidad rotacional de:

(a) 5 rad/s **(b)** 7 rad/s

(c) 10 rad/s **(d)** 20 rad/s

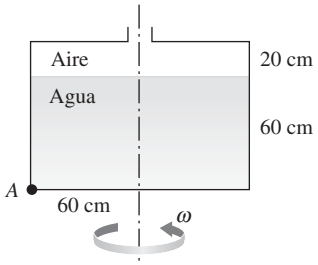


Fig. P2.106

2.107 El agujero en el cilindro del problema 2.106 se cierra y el aire se presuriza a 25 kPa. Encuentre la presión en el punto *A* si la velocidad rotacional es:

(a) 5 rad/s **(b)** 7 rad/s

(c) 10 rad/s **(d)** 20 rad/s

2.108 Encuentre la fuerza en el fondo del cilindro del:

(a) Problema 2.106a

(b) Problema 2.106b

(c) Problema 2.106c

(d) Problema 2.106d

Las excursiones en balsa para navegar en aguas rápidas es un deporte popular en América del Norte. Representa la emoción de viajar en aguas turbulentas en una balsa, lo que demanda de acciones rápidas y de habilidades para manipular los remos. (ArmannWitte/Sutterstock)

3

Introducción al movimiento de fluidos

Esquema

3.1 Introducción
3.2 Descripción del movimiento de fluidos
  3.2.1 Descripciones lagrangianas y eulerianas del movimiento
  3.2.2 Líneas de trayectoria, líneas fugaces y líneas de corriente
  3.2.3 Aceleración
  3.2.4 Velocidad angular y vorticidad
3.3 Clasificación de los flujos de fluido
  3.3.1 Flujos en una, dos y tres dimensiones
  3.3.2 Flujos viscosos e inviscidos
  3.3.3 Flujos laminares y turbulentos
  3.3.4 Flujos incompresibles y compresibles
3.4 La ecuación de Bernoulli
3.5 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Matemáticamente describir el movimiento de un fluido.
- Expresar la aceleración y la vorticidad de una partícula de fluido dadas las componentes de su velocidad.
- Describir la deformación de una partícula de fluido.
- Clasificar varios flujos de fluido. ¿Un fluido es viscoso, turbulento, incompresible o uniforme?
- Deducir la ecuación de Bernoulli e identificar sus restricciones.
- Presentar varios ejemplos y numerosos problemas que demuestren cómo se describen los flujos de fluido, cómo se clasifican los flujos y cómo se usa la ecuación de Bernoulli para calcular las variables de flujo.

3.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo sirve como introducción para todos los siguientes capítulos que se refieren al movimiento de fluidos. Los movimientos de fluidos se manifiestan en numerosas formas diferentes. Algunos pueden describirse muy fácilmente, en tanto que otros requieren de un completo conocimiento de las leyes de la física. En aplicaciones en ingeniería, es importante describir los movimientos de fluidos en una forma tan sencilla como se pueda justificar que, en general, depende de la precisión requerida. Es frecuente que una precisión de ±10% sea aceptable, aun cuando en algunas aplicaciones deben obtenerse una mayor precisión. Las ecuaciones generales de movimiento son muy difíciles de resolver; en consecuencia, es responsabilidad del ingeniero conocer cuáles suposiciones de simplificación se pueden hacer. Esto, por supuesto, requiere de experiencia y, lo que es más importante, del conocimiento de la física implicada.

CONCEPTOS CLAVE *Bajo ciertas condiciones, se pueden despreciar los efectos viscosos.*

Algunas suposiciones comunes que se usan para simplificar una situación de flujo están relacionadas con las propiedades del fluido. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones, la viscosidad puede afectar el flujo de manera significativa; en otras, los efectos viscosos se pueden despreciar, simplificando en gran medida las ecuaciones sin alterar considerablemente las predicciones. Es bien sabido que la compresibilidad de un gas en movimiento debe tomarse en cuenta si las velocidades son muy altas. Pero, los efectos de la compresibilidad no tienen que ser tomados en cuenta para predecir las fuerzas de vientos sobre edificios o para pronosticar cualquier otra cantidad física que sea un efecto directo del viento. Las velocidades del viento simplemente no son lo suficientemente altas . Podrían citarse numerosos ejemplos. Después de nuestro estudio de movimientos de fluidos, las suposiciones apropiadas deberán ser más que obvias.

Este capítulo tiene tres secciones. En la primera, introducimos al lector a algunos métodos generales importantes que se usan para analizar problemas de mecánica de fluidos. En la segunda sección damos un breve repaso de los diferentes tipos de flujo, por ejemplo flujos compresibles e incompresibles, así como flujos viscosos e inviscidos. En capítulos siguientes se darán detalladas exposiciones de cada uno de estos tipos de flujo. La tercera sección introduce al lector a la ecuación de Bernoulli, que es de uso común y establece la forma en que varían las presiones y las velocidades en un campo de flujo. El uso de esta ecuación, no obstante, requiere de muchas suposiciones de simplificación y su aplicación está, por tanto, limitada.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO DE FLUIDOS

Es frecuente que el análisis de complejos problemas de flujo de fluidos sea auxiliado mediante la visualización de patrones de flujo, lo cual permite el desarrollo de una mejor comprensión intuitiva y ayuda a formular el problema matemático. El flujo en una lavadora es un buen ejemplo. Un problema más fácil, y a la vez difícil, es el flujo cercano donde un ala se conecta a un fuselaje, o donde la cimentación de un puente interactúa con el agua en el fondo de un río. En la sección 3.2.1 estudiamos la descripción de cantidades físicas como una función de coordenadas espaciales y del tiempo. El segundo tema de esta sección introduce las diferentes líneas de flujo que son útiles en nuestro objetivo de describir un flujo de fluido. Por último, se presenta la descripción matemática del movimiento.

3.2.1 Descripciones lagrangianas y eulerianas del movimiento

En la descripción de un campo de flujo es conveniente considerar partículas individuales, cada una de las cuales se representa como una pequeña masa de fluido, for-

mada por un gran número de moléculas, que ocupa un pequeño volumen $\Delta\mathcal{V}$ que se mueve con el flujo. Si el fluido es incompresible, el volumen no cambia en magnitud pero puede deformarse. Si el fluido es compresible, como el volumen se deforma, también cambia su magnitud. En ambos casos se considera que las partículas se mueven por un campo de flujo como una entidad.

En el estudio de la mecánica de partículas, donde la atención se centra en partículas individuales, el movimiento se observa como una función del tiempo. La posición, la velocidad y la aceleración de cada partícula se expresan como $\mathbf{s}(x_0, y_0, z_0, t)$, $\mathbf{V}(x_0, y_0, z_0, t)$ y $\mathbf{a}(x_0, y_0, z_0, t)$, y se pueden calcular las cantidades de interés. El punto (x_0, y_0, z_0) localiza el punto inicial, es decir el nombre, de cada partícula. Ésta es la descripción **lagrangiana**, llamada así en honor de Joseph L. Lagrange (1736-1813), del movimiento que se usa en un curso de dinámica. En la descripción lagrangiana, puede darse seguimiento a numerosas partículas y observar su influencia entre ellas. No obstante, lo anterior se hace una tarea difícil cuando el número de partículas es extremadamente grande incluso en el flujo de fluido más simple.

Lagrangiana: *Descripción del movimiento donde se observan partículas como una función del tiempo.*

Una alternativa a seguir por separado cada partícula de fluido es identificar puntos en el espacio y, a continuación, observar la velocidad de las partículas que pasan por cada punto; podemos observar la razón de cambio de la velocidad conforme pasan las partículas por cada punto, es decir, $\partial\mathbf{V}/\partial x$, $\partial\mathbf{V}/\partial y$, y $\partial\mathbf{V}/\partial z$, y podemos observar si la velocidad está cambiando con el tiempo en cada punto en particular, esto es, $\partial\mathbf{V}/\partial t$. En esta descripción **euleriana** del movimiento, que recibe ese nombre en honor a Leonhard Euler (1707-1783), las propiedades del flujo, por ejemplo la velocidad, son funciones del espacio y del tiempo. En coordenadas cartesianas la velocidad se expresa como $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$. La región del flujo considerada se denomina **campo de flujo**.

Euleriana: *Descripción del movimiento donde las propiedades del flujo son funciones del espacio y del tiempo.*

Campo de flujo: *Región de interés en un flujo.*

Un ejemplo puede aclarar estas dos formas de describir el movimiento. Una compañía de ingeniería es contratada para hacer recomendaciones que mejoren el flujo de tránsito en una gran ciudad. La compañía de ingeniería tiene dos alternativas: contratar estudiantes universitarios para que viajen en automóviles por toda la ciudad registrando las observaciones apropiadas (el método lagrangiano), o contratar estudiantes universitarios para estar de pie en los cruceros y registrar la información requerida (el método euleriano). Una interpretación correcta de cada uno de los conjuntos de datos llevaría al mismo conjunto de recomendaciones, es decir, a la misma solución. En este ejemplo puede no ser obvio cuál método se preferiría; en un curso introductorio de fluidos, no obstante, la descripción euleriana se usa exclusivamente porque las leyes físicas empleando la descripción euleriana son más fáciles de aplicar a situaciones reales. Sin embargo, hay ejemplos donde se hace necesaria la descripción lagrangiana, por ejemplo las boyas a la deriva que se usan para estudiar las corrientes oceánicas.

Euleriana contra lagrangiana, 31-33

Si las cantidades de interés no dependen del tiempo, es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$, se dice que el flujo es un **flujo permanente**. La mayoría de los flujos de interés en este texto introductorio son flujos permanentes. Para un flujo permanente, todas las cantidades del flujo en un punto particular son independientes del tiempo, es decir,

Flujo permanente: *Donde las cantidades del flujo no dependen del tiempo.*

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.2.1}$$

para citar algunas. Se implica que x, y y z se mantienen fijas en las expresiones anteriores. Observe que las propiedades de una partícula de fluido, en general, varían con el tiempo; la velocidad y la presión varían con el tiempo a medida que una partícula en especial de fluido avanza a lo largo de su trayectoria en un flujo, incluso en un flujo permanente. En un flujo permanente, sin embargo, las propiedades no varían con el tiempo en un punto fijo.

3.2.2 Líneas de trayectoria, líneas fugaces y líneas de corriente

Línea de trayectoria: *Historia de las ubicaciones de una partícula.*

Líneas de trayectoria, 91

Tres líneas diferentes nos ayudan a describir un campo de flujo. Una **línea de trayectoria** es el lugar geométrico de los puntos recorridos por una partícula determinada cuando se desplaza en un campo de flujo; la línea de trayectoria nos da una "historia" de las ubicaciones de la partícula. Una fotografía de una línea de trayectoria requeriría una exposición de tiempo de una partícula iluminada. Una fotografía que muestra líneas de trayectoria de partículas bajo una superficie de agua con oleaje se muestra en la figura 3.1.

Línea fugaz: *Línea instantánea.*

Una **línea fugaz** se define como una línea instantánea cuyos puntos están ocupados por todas las partículas que se originan en algún punto especificado en el campo de flujo. Las líneas fugaces nos dicen en dónde están las partículas "en este momento". Una fotografía de una línea fugaz sería una toma instantánea del conjunto de partículas iluminadas que pasaron por un cierto punto. La figura 3.2 muestra líneas fugaces producidas por la continua liberación de una corriente de humo de pequeño diámetro a medida que se mueve alrededor de un cilindro.

Líneas fugaces, 122

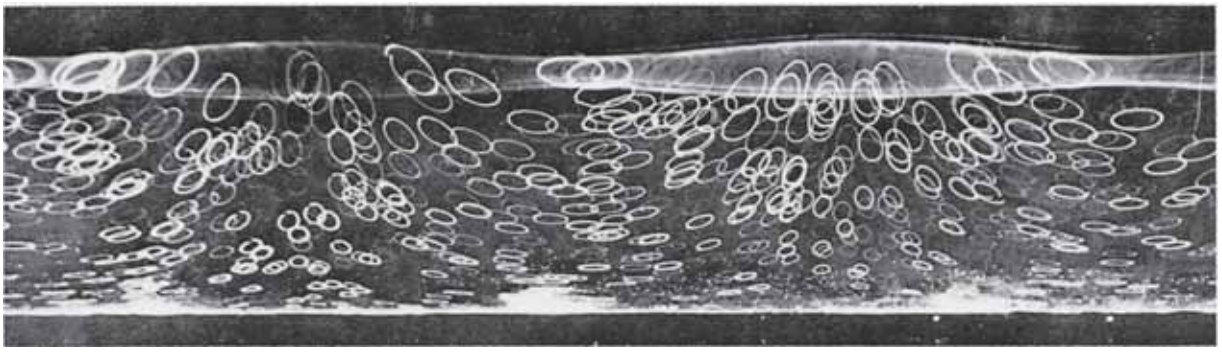


Fig. 3.1 Líneas de trayectoria bajo una ola en un tanque de agua. (Fotografía de A. Wallet y F. Ruellan. Cortesía de M. C. Vasseur.)

Líneas fugaces, 122

Fig. 3.2 Líneas fugaces en un flujo no permanente alrededor de un cilindro. (Fotografía de Sadatoshi Taneda. De Album of Fluid Motion, 1982, The Parabolic Press, Stanford, California.)

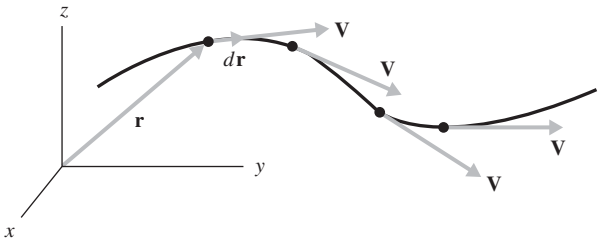


Fig. 3.3 Línea de corriente en un campo de flujo.

Una **línea de corriente** es una línea del flujo que posee la siguiente propiedad: el vector velocidad de cada partícula que ocupa un punto en la línea de corriente es tangente a la línea de corriente. Esto se muestra gráficamente en la figura 3.3. Una ecuación que expresa que el vector velocidad es tangente a la línea de corriente es

Línea de corriente: *El vector velocidad es tangente a la línea de corriente.*

$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0 \tag{3.2.2}$$

puesto que **V** y $d\mathbf{r}$ están en la misma dirección, como se muestra en la figura; recuerde que el producto cruz de dos vectores en la misma dirección es cero. Esta ecuación se usará en capítulos posteriores como la expresión matemática de una línea de corriente. Una fotografía de una línea de corriente no se puede tomar directamente. Para un flujo general no permanente las líneas de corriente se pueden inferir a partir de fotografías de líneas de trayectoria cortas de un gran número de partículas.

Un **tubo de corriente** es un tubo cuyas paredes son líneas de corriente. Como la velocidad es tangente a una línea de corriente, no hay fluido que cruce las paredes de un tubo de corriente. El tubo de corriente es de particular interés en la mecánica de fluidos. Un tubo es un tubo de corriente porque sus paredes son líneas de corriente; un canal abierto es un tubo de corriente porque no hay fluido que cruce las paredes del canal. Con frecuencia trazamos un tubo de corriente con una pequeña sección transversal en el interior de un flujo para fines de demostración.

Tubo de corriente: *Tubo cuyas paredes son líneas de corriente.*

En un flujo permanente, las líneas de trayectoria, las líneas fugaces y las líneas de corriente todas coinciden. Todas las partículas que pasan por un punto determinado seguirán la misma trayectoria porque la velocidad en nuestro sistema euleriano no cambia con el tiempo; en consecuencia, las líneas de trayectoria y las líneas fugaces coindicen. Además, el vector velocidad de una partícula en un punto determinado será tangente a la línea por la cual se mueve la partícula; entonces la línea es también una línea de corriente. Como los flujos que observamos en laboratorios son invariablemente flujos permanentes, a las líneas que observamos las llamamos líneas de corriente aun cuando puedan ser en realidad líneas fugaces, o para el caso considerando al tiempo, líneas de trayectoria.

CONCEPTO CLAVE *En un flujo permanente, las líneas de trayectoria, las líneas fugaces y las líneas de corriente coinciden.*

3.2.3 Aceleración

La aceleración de una partícula de fluido se encuentra al considerar la partícula específica que se muestra en la figura 3.4. Su velocidad cambia de $\mathbf{V}(t)$ en el instante t a $\mathbf{V}(t + dt)$ en el instante $t + dt$. La aceleración es, por definición,

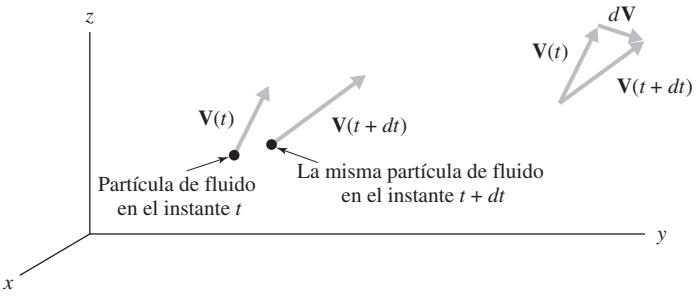


Fig. 3.4 Velocidad de una partícula de fluido

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{3.2.3}$$

donde $d\mathbf{V}$ se muestra en la figura 3.4. El vector velocidad $\mathbf{V}$ está dado en forma de componentes como

$$\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}} \tag{3.2.4}$$

donde (u, v, w) son las componentes de la velocidad en las direcciones x, y y z, respectivamente, e $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios. La cantidad $d\mathbf{V}$ es, usando la regla de la cadena del cálculo diferencial con $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$,

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\,dt \tag{3.2.5}$$

Esto da la aceleración usando la ecuación 3.2.3 como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \tag{3.2.6}$$

Como hemos seguido una partícula específica, como se ilustra en la figura 3.4, reconocemos que

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{dz}{dt} = w \tag{3.2.7}$$

La aceleración se expresa entonces como

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \tag{3.2.8}$$

Las ecuaciones de las componentes escalares de la ecuación vectorial anterior, para coordenadas cartesianas, se escriben como

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (3.2.9)$$
$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Con frecuencia regresamos a la ecuación 3.2.3 y escribimos la ecuación 3.2.8 en una forma simplificada como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \qquad (3.2.10)$$

donde, en coordenadas cartesianas,

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \qquad (3.2.11)$$

Esta derivada recibe el nombre de **derivada sustancial**, o **derivada material**. Se le da un nombre y símbolo especiales (D/Dt en lugar de d/dt) porque seguimos una partícula de fluido específica, es decir, seguimos la sustancia (o material). Representa la relación entre una derivada lagrangiana en la que una cantidad depende del tiempo t y una derivada euleriana en la que una cantidad depende de la posición (x, y, z) y el tiempo t. La derivada sustancial se puede usar con otras variables dependientes; por ejemplo, DT/Dt representaría la rapidez de cambio de la temperatura de una partícula de fluido a medida que la seguimos.

Derivada sustancial o material: *Es la derivada D/Dt.*

La derivada sustancial y las componentes de la aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas se presentan en la tabla 3.1 en la página 96.

El término de la derivada con respecto al tiempo en el lado derecho de las ecuaciones 3.2.8 y 3.2.9 para la aceleración recibe el nombre de **aceleración local** y los términos restantes en el lado derecho en cada una de las ecuaciones forman la **aceleración convectiva**. Por lo tanto, la aceleración de una partícula de fluido es la suma de la aceleración local y la aceleración convectiva. En un tubo, se tendrá aceleración local si, por ejemplo, una válvula se abre o se cierra; y la aceleración convectiva ocurre cerca de un cambio en la geometría del tubo, por ejemplo en una reducción del diámetro en un tubo o en un codo. En ambos casos las partículas de fluido cambian su velocidad, pero por razones muy diferentes.

Aceleración local: *Término de la derivada con respecto al tiempo $\delta V/\delta t$ para la aceleración.*

Aceleración convectiva: *Todos los términos que no sean el término de la aceleración local.*

CONCEPTO CLAVE *La aceleración convectiva ocurre cerca de un cambio en la geometría.*

Debemos observar que las expresiones previas para la aceleración dan ésta sólo con respecto al marco de referencia de un observador. En ciertas situaciones el marco de referencia del observador puede estar acelerando; entonces puede ser

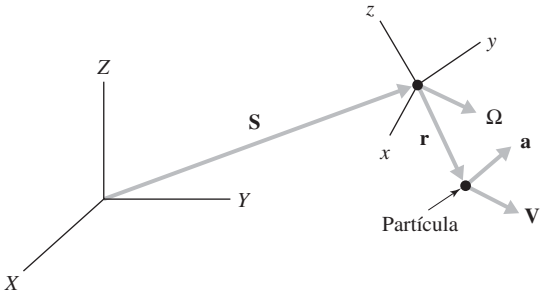


Fig. 3.5 Movimiento relativo a un marco de referencia no inercial.

necesario conocer la aceleración de una partícula respecto a un marco de referencia fijo y está dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \tag{3.2.12}$$

aceleración del marco de referencia; aceleración de Coriolis; aceleración normal; aceleración angular

donde **a** está dada por la ecuación 3.2.8, $d^2\mathbf{S}/dt^2$ es la aceleración del marco de referencia del observador, **V** y **r** son los vectores velocidad y posición de la partícula, respectivamente en el marco de referencia del observador, y Ω es la velocidad angular del marco de referencia del observador (vea la figura 3.5). Observe que todos los vectores están escritos usando los vectores unitarios del marco de referencia *XYZ*. Para la mayoría de aplicaciones en ingeniería, los marcos de referencia fijos a la Tierra dan **A** = **a**, porque los otros términos de la ecuación 3.2.12 con frecuencia son insignificantes con respecto a **a**. No obstante, podemos decidir unir el marco de referencia *xyz* a un dispositivo acelerando (un cohete) o a un dispositivo giratorio (el brazo de un aspersor); entonces ciertos términos de la ecuación 3.2.12 deben incluirse junto con **a** de la ecuación 3.2.8.

Si la aceleración de todas las partículas de fluido está dada por **A** = **a** en un marco de referencia seleccionado, es un marco de referencia *inercial*. Si **A** ≠ **a**, es un marco de referencia *no inercial*. Un marco de referencia que se mueve con una velocidad constante sin girar es un marco de referencia inercial. Cuando se analice un flujo, por ejemplo, respecto a una superficie aerodinámica en movimiento a una velocidad constante, fijamos el marco de referencia a la superficie aerodinámica de modo que se observe flujo permanente en ese marco de referencia.

3.2.4 Velocidad angular y vorticidad

Un flujo de fluido puede ser considerado como el movimiento de un conjunto de partículas de fluido. A medida que una partícula se desplaza a lo largo de un fluido, puede girar o deformarse. La rotación y deformación de las partículas de fluido son de particular interés en nuestro estudio de la mecánica de fluidos. Hay ciertos flujos, o regiones de un flujo, en los que las partículas de fluido no giran; estos flujos son de especial importancia, particularmente en flujos alrededor de objetos, y se conocen como **flujos irrotacionales**. Un flujo fuera de una delgada capa límite en superficies aerodinámicas, fuera de la región de flujo separado alrededor de automóviles y

Flujos irrotacionales: *Flujos en los que las partículas de fluido no giran.*

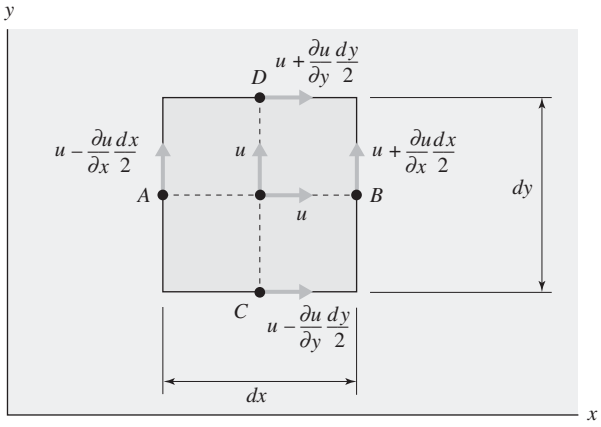


Fig. 3.6 Partícula de fluido que ocupa un paralelepípedo infinitesimal en un instante particular.

Vorticidad, 134

otros vehículos en movimiento, en el flujo alrededor de cuerpos sumergidos, y muchos otros flujos son ejemplos de flujos irrotacionales. Los flujos irrotacionales son extremadamente importantes.

Consideremos una pequeña partícula de fluido que ocupa un volumen infinitesimal que tiene la cara xy como se muestra en la figura 3.6. La **velocidad angular** Ω_z respecto al eje z es el promedio de la velocidad angular del segmento de recta AB y del segmento de recta CD. Las dos velocidades angulares, positivas en el mismo sentido de las manecillas del reloj, son

Velocidad angular: *Velocidad promedio de dos segmentos de recta perpendiculares de una partícula de fluido.*

$$\Omega_{AB} = \frac{v_B - v_A}{dx} = \left[v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2} - \left(v - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right]\Big/dx = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.2.13}$$

$$\Omega_{CD} = -\frac{u_D - u_C}{dy} = -\left[u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2} - \left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\right]\Big/dy = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.2.14}$$

En consecuencia, la velocidad angular Ω_z de la partícula de fluido es

$$\Omega_z = \frac{1}{2}(\Omega_{AB} + \Omega_{CD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.2.15}$$

Si hubiéramos considerado la cara xz, habríamos encontrado que la velocidad angular respecto al eje y es

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.2.16}$$

Tabla 3.1 Derivada sustancial, aceleración y vorticidad en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas

Derivada sustancial

Cartesianas

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Cilíndricas

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Esféricas

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Aceleración

Cartesianas

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Cilíndricas

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Esféricas

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\phi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2\cot\theta}{r}$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi + v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}$$

Vorticidad

Cartesianas

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cilíndricas

$$\omega_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \qquad \omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad \omega_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

Esféricas

$$\omega_r = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] \qquad \omega_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]$$

y la cara yz nos daría la velocidad angular respecto al eje x:

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.2.17}$$

Éstas son las tres componentes del vector velocidad angular. Un corcho colocado en un flujo de agua en un canal ancho (el plano xy) giraría con una velocidad angular respecto al eje z, dada por la ecuación 3.2.15.

Vorticidad: *Dos veces la velocidad angular.*

Es común definir la **vorticidad** ω como el doble de la velocidad angular; sus tres componentes son entonces

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.2.18}$$

Las componentes de la vorticidad en coordenadas cilíndricas y esféricas están incluidas en la tabla 3.1.

Un flujo irrotacional no posee vorticidad; el corcho mencionado antes no giraría en un flujo irrotacional. Consideramos este flujo especial en la sección 8.5.

La deformación de la partícula de la figura 3.6 es la rapidez de cambio del ángulo que forma el segmento de recta AB con el segmento de recta CD. Si AB está girando con una velocidad angular diferente que la de CD, la partícula se está deformando. La deformación está representada por el **tensor velocidad de deformación**; su componente ϵ_{xy} en el plano xy está dada por

Tensor velocidad de deformación: *Velocidad a la que ocurre la deformación.*

$$\begin{aligned}\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\Omega_{AB} - \Omega_{CD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Para el plano xz y el plano yz tenemos

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.2.20}$$

Observe que $\epsilon_{xy}=\epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz}=\epsilon_{zx}$, y $\epsilon_{yz}=\epsilon_{zy}$. Por observación, vemos que el tensor velocidad de deformación es simétrico.

La partícula de fluido podría también deformarse si se estira o se comprime en una dirección en particular. Por ejemplo, si el punto B de la figura 3.6 se mueve con más rapidez que el punto A, la partícula se estiraría en la dirección x. Esta velocidad de deformación normal se mide con

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{u_B - u_A}{dx} \\ &= \left[u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2} - \left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right] \Big/ dx = \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

De forma similar, en las direcciones y y z encontraríamos que

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.2.22}$$

El tensor simétrico velocidad de deformación se puede representar como

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.2.23}$$

donde los subíndices i y j toman valores numéricos 1,2 o 3. Entonces ϵ_{12} representa ϵ_{xy} en la fila 1 columna 2.

Veremos en el capítulo 5 que las componentes del esfuerzo normal y cortante en un flujo están relacionadas con las componentes de la velocidad de deformación anteriores. De hecho, en el flujo unidimensional de la figura 1.6, el esfuerzo cortante estaba relacionado con $\partial u/\partial y$ con la ecuación 1.5.5; observe que $\partial u/\partial y$ es el doble de la componente de la velocidad de deformación dada por la ecuación 3.2.19 con $v = 0$.

Ejemplo 3.1

El campo de velocidad está dado por $\mathbf{V} = 2x\hat{\mathbf{i}} - yt\hat{\mathbf{j}}$ m/s, donde x y y están en metros y t en segundos. Encuentre la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto (2,–1) y un vector unitario normal a la línea de corriente en el punto (2,–1) cuando $t = 4$ s.

Solución

El vector velocidad es tangente a una línea de corriente de modo que $\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$ (el producto cruz de dos vectores paralelos es cero). Para el vector velocidad dado tenemos, cuando $t = 4$ s,

$$(2x\hat{\mathbf{i}} - 4y\hat{\mathbf{j}}) \times (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}) = (2x\,dy + 4y\,dx)\hat{\mathbf{k}} = 0$$

donde hemos empleado $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{k}, \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\mathbf{k}$, e $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0$. En consecuencia,

$$2x\,dy = -4y\,dx \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

Integre ambos lados:

$$\ln y = -2 \ln x + \ln C$$

donde hemos usado $\ln C$ por comodidad. Esto se escribe como

$$\ln y = \ln x^{-2} + \ln C = \ln(Cx^{-2})$$

En consecuencia,

$$x^2 y = C$$

En (2,–1)C = –4, de modo que la línea de corriente que pasa por el punto (2,–1) tiene la ecuación

$$x^2 y = -4$$

Un vector normal es perpendicular a la línea de corriente, de aquí al vector velocidad, de modo que usando $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}}$ tenemos en el punto (2,–1) y $t = 4$ s

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) \cdot (n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}}) = 0$$

Usando $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1$ e $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$, esto se convierte en

$$4n_x + 4n_y = 0 \qquad \therefore n_x = -n_y$$

Entonces, como $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario, $n_x^2 + n_y^2 = 1$ y encontramos que

$$n_x^2 = 1 - n_x^2 \qquad \therefore n_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El vector unitario normal a la línea de corriente se escribe como

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

Ejemplo 3.2

Un campo de velocidad en un flujo particular está dado por $\mathbf{V} = 20y^2\hat{\mathbf{i}} - 20xy\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Calcule la aceleración, la velocidad angular, el vector vorticidad, y cualesquiera componentes de la velocidad de deformación diferentes de cero en el punto (1, –1, 2).

Solución

Podríamos usar la ecuación 3.2.9 y hallar cada una de las componentes de la aceleración, o usar la ecuación 3.2.8 y hallar una expresión vectorial. Usando la ecuación 3.2.8 tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}^{0} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}^{0} \\ &= 20y^2(-20y\hat{\mathbf{j}}) - 20xy(40y\hat{\mathbf{i}} - 20x\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -800xy^2\hat{\mathbf{i}} - 400(y^3 - x^2y)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

donde hemos usado $u = 20y^2$ y $v = -20xy$, dadas por el vector velocidad. Todas las partículas que pasan por el punto (1,–1, 2) tienen la aceleración

$$\mathbf{a} = -800\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

La velocidad angular tiene dos componentes iguales a cero:

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}^{0} - \frac{\partial v}{\partial z}^{0}\right) = 0, \quad \Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}^{0} - \frac{\partial w}{\partial x}^{0}\right) = 0$$

La componente z diferente de cero es, en el punto (1, –1, 2),

$$\begin{aligned}\Omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-20y - 40y) = 30\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

El vector vorticidad es el doble del vector velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\Omega_z\hat{\mathbf{k}} = 60\hat{\mathbf{k}}\ \text{rad/s}$$

Las componentes de la velocidad de deformación diferentes de cero son

$$\begin{aligned}\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-20y + 40y) = -10\ \text{rad/s} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -20x = -20\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

Todas las otras componentes de la velocidad de deformación son cero.

3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS FLUJOS DE FLUIDO

En esta sección damos un análisis general de algunos de los aspectos de la mecánica de fluidos que son considerados en más profundidad en secciones y capítulos subsiguientes. Aun cuando la mayor parte de las nociones presentadas aquí se redefinen y estudian en más detalle más adelante, será útil en este punto introducir la clasificación general de los flujos de fluido.

3.3.1 Flujos en una, dos y tres dimensiones

Flujo tridimensional: *El vector velocidad depende de tres variables espaciales.*

En la descripción euleriana del movimiento, el vector velocidad, en general, depende de tres variables espaciales y del tiempo, es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$. Dicho flujo es un **flujo tridimensional**, porque el vector velocidad depende de tres coordenadas espaciales. Las soluciones a problemas en tales flujos son muy difíciles y están fuera del campo de un curso introductorio. Aun en el caso de que pudiera suponerse que el flujo es permanente es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, t)$, podría seguir siendo flujo tridimensional. En la figura 3.7 se ilustra un flujo particular que es normal a una superficie plana; el fluido se desacelera y se detiene en el **punto de estancamiento**. Las componentes de la velocidad, u, v y w dependen de x, y y z; esto es, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ y $w = w(x, y, z)$.

Punto de estancamiento: *Punto donde el fluido se detiene.*

Con frecuencia un flujo tridimensional puede representarse como un flujo bidimensional. Por ejemplo, el flujo sobre una represa ancha es tridimensional debido a las condiciones en sus extremos, pero el flujo en la parte central alejada de sus extremos puede tratarse como bidimensional. En general, un **flujo bidimensional** es un flujo en el que el vector velocidad depende sólo de dos variables espaciales. Un ejemplo es un **flujo plano,** en el que el vector velocidad depende de dos coordenadas espaciales, x y y, pero no de z, es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$. En un flujo axisimétrico, el vector velocidad dependería de r y θ, es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, \theta)$; el flujo en la figura 3.7 será considerado bidimensional si se describe en un sistema de coordenadas cilíndricas.

Flujo bidimensional: *El vector velocidad depende de sólo dos variables espaciales.*

Flujo plano: *El vector velocidad depende de las dos coordenadas x y y.*

Un **flujo unidimensional** es un flujo en el que el vector velocidad depende de sólo una variable espacial. Estos flujos se presentan lejos de cambios de geometría

Flujo unidimensional: *El vector velocidad depende de sólo una variable espacial.*

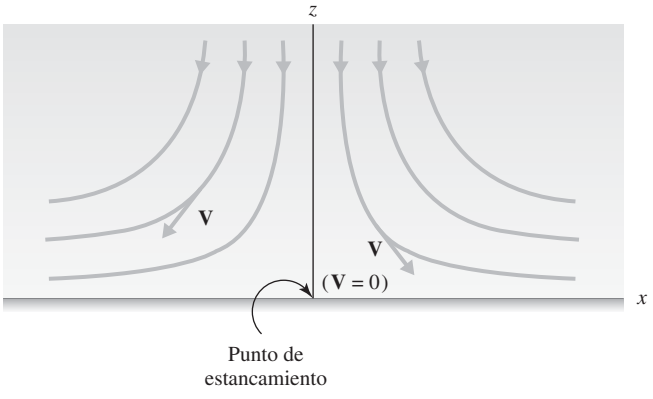


Fig. 3.7 Flujo en un punto de estancamiento.

en tubos largos, rectos, o entre placas paralelas, como se muestra en la figura 3.8. La velocidad en el tubo varía sólo con r, es decir, $u = u(r)$. La velocidad entre placas paralelas varía sólo con la coordenada y, es decir, $u = u(y)$. Aun cuando el flujo sea permanente de modo que $u = u(y, t)$, como sería la situación durante la puesta en funcionamiento, el flujo es en unidimensional.

Los flujos que se muestran en la figura 3.8 también puede ser vistos como **flujos desarrollados**; esto es, el perfil de velocidad no varía con respecto a la coordenada espacial en la dirección del flujo. Esto demanda que la región de intersección esté a una distancia considerable a partir de una entrada o de un repentino cambio de geometría.

Flujos desarrollados: *El perfil de la velocidad no varía con respecto a la coordenada espacial en la dirección del flujo.*

Hay muchos problemas de ingeniería de mecánica de fluidos en los que un campo de flujo es simplificado a un **flujo permanente:** la velocidad, y otras propiedades del flujo, son constantes en toda el área, como en la figura 3.9. Esta simplificación se hace cuando la velocidad es esencialmente constante, lo cual es un caso bastante común. Ejemplos de estos flujos son el flujo a velocidad relativamente alta por una sección de un tubo, y flujo en una corriente. La velocidad promedio puede cambiar de una sección a otra; las condiciones de flujo dependen sólo de la variable espacial en la dirección del flujo. Para conductos grandes, no obstante, puede ser necesario considerar la variación hidrostática en la presión normal a las líneas de corriente.

Flujo uniforme: *Las propiedades del fluido son constantes en toda el área.*

3.3.2 Flujos viscosos e inviscidos

Un flujo de fluido puede clasificarse en términos generales ya sea como flujo viscoso o bien como flujo inviscido. Un **flujo inviscido** es aquel en el que los efectos viscosos no influyen de manera significativa en el flujo y por tanto se desprecian. En un **flujo viscoso** los efectos de la viscosidad son importantes y no pueden ignorarse.

Flujo inviscido: *Los efectos viscosos no influyen de manera significativa en el flujo.*

Flujo viscoso: *Los efectos de la viscosidad son importantes.*

Para modelar analíticamente un flujo inviscido, simplemente podemos hacer que la viscosidad sea cero; es obvio que esto hará que sean cero todos los efectos viscosos. Es más difícil crear un crear un flujo inviscido experimentalmente, porque

Fig. 3.8 Flujo unidimensional: (a) flujo en un tubo; (b) flujo entre placas paralelas.

Fig. 3.9 Perfiles de velocidad uniforme.

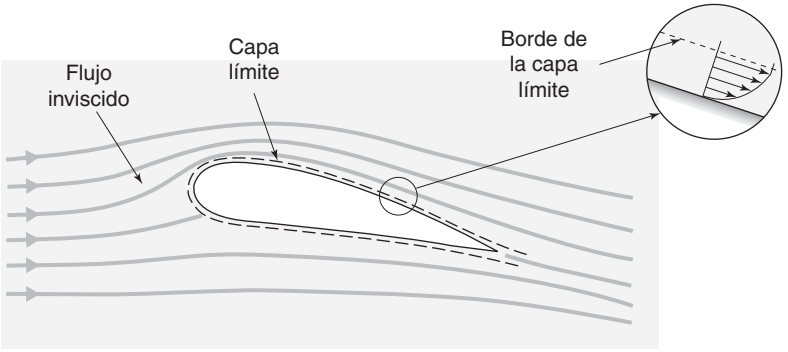


Fig. 3.10 Flujo alrededor de una superficie aerodinámica.

Flujo inviscido, 164

todos los fluidos de interés (por ejemplo el agua y el aire) tienen viscosidad. La pregunta entonces es: ¿hay flujos de interés en los que los efectos viscosos sean tan pequeños que se desprecien? La respuesta es "sí, si los esfuerzos cortantes en el flujo son pequeños y actúan sobre áreas tan pequeñas que no afectan considerablemente el campo de flujo." Esta afirmación es muy general, por supuesto, y requerirá de un análisis considerable para justificar la suposición de flujo inviscido.

Flujos externos: *Flujos que existen en el exterior de un cuerpo.*

Capa límite: *Delgada capa unida al límite en el que se concentran los efectos viscosos.*

Con base en la experiencia, se ha determinado que la principal clase de flujos, que se pueden modelar como flujos inviscidos, es la de los **flujos externos,** es decir, los flujos que existen en el exterior de los cuerpos. Los flujos inviscidos son de la mayor importancia en flujos alrededor de cuerpos de aerodinámicos, por ejemplo el flujo alrededor de una superficie aerodinámica o de una superficie hidrodinámica. Cualesquiera efectos viscosos que puedan existir están confinados a una capa delgada, llamada **capa límite**, que está unida al límite como se muestra en la figura 3.10; la velocidad en una capa límite siempre es cero en una pared fija, resultado de la viscosidad. Para muchas situaciones de flujo, las capas límite son tan delgadas que simplemente pueden ignorarse cuando se estudian las características generales de un flujo alrededor de un cuerpo aerodinámico. Por ejemplo, la solución de un flujo inviscido proporciona una excelente predicción para el flujo alrededor de una superficie aerodinámica, excepto dentro de la capa límite y posiblemente cerca del borde de salida. Un flujo inviscido se encuentra también en contracciones dentro de sistemas de tuberías y en regiones cortas de flujos internos donde los efectos viscosos son insignificantes.

CONCEPTO CLAVE *El flujo inviscido da una excelente predicción del flujo alrededor de una superficie aerodinámica.*

Movimiento cerca de un límite, 159

Los flujos viscosos incluyen la clase general de flujos internos, por ejemplo flujos en tubos y conductos y en canales abiertos. En tales flujos los efectos viscosos causan considerables "pérdidas" y explican las enormes cantidades de energía que deben usarse para transportar petróleo y gas en oleoductos y gasoductos. La condición sin deslizamiento que resulta en velocidad cero en la pared y los esfuerzos cortantes resultantes llevan directamente a estas pérdidas.

3.3.3 Flujos laminar y turbulento

Flujo laminar: *Flujo sin mezclado significativo de las partículas pero con importantes esfuerzos cortantes viscosos.*

Un flujo viscoso se puede clasificar ya sea como flujo laminar o bien como flujo turbulento. En un **flujo laminar** el fluido fluye sin mezclado significativo de partículas de fluido circundantes. Si se inyectara un colorante en el flujo, no se mezclaría con el fluido circundante excepto por la actividad molecular; retendría su identidad durante un lapso relativamente largo. Los esfuerzos cortantes viscosos siempre influyen en un flujo laminar. El flujo puede ser altamente dependiente del tiempo, debido al movimiento errático de un pistón como lo muestra la salida de una sonda de velocidad de la figura 3.11a, o puede ser permanente, como se ilustra en la figura 3.11b.

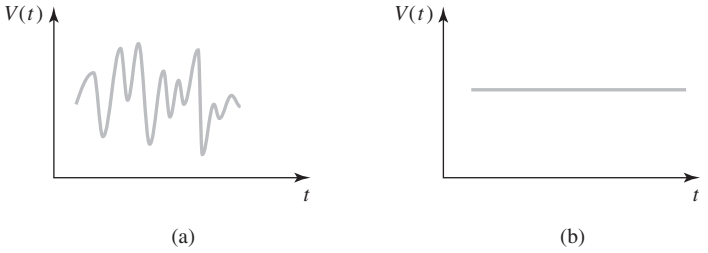


Fig. 3.11 Velocidad como una función del tiempo en un flujo laminar: (a) flujo no permanente; (b) flujo permanente.

En un **flujo turbulento** los movimientos del fluido varían irregularmente, de manera que sus cantidades tales como la velocidad y la presión muestran una variación aleatoria el tiempo y las coordenadas espaciales. Es frecuente que las cantidades físicas sean descritas mediante promedios estadísticos. En este sentido podemos definir un flujo turbulento "permanente" como un flujo en el que las cantidades físicas promedio dependen del tiempo pero no cambian con éste. La figura 3.12 muestra mediciones instantáneas de la velocidad en un flujo turbulento no permanente y uno permanente. Un colorante inyectado en un flujo turbulento se mezclaría de inmediato por la acción de las partículas de fluido que se mueven al azar; rápidamente perdería su identidad en este proceso de difusión.

Flujo turbulento: *El flujo varía irregularmente de modo que sus cantidades de flujo muestran una variación aleatoria.*

CONCEPTO CLAVE *Un colorante inyectado en un flujo turbulento se mezclaría inmediatamente.*

Pueden observarse un flujo laminar y un flujo turbulento si se realiza un experimento sencillo con una llave de agua. Abra la llave para que salga el agua muy lentamente como una corriente silenciosa. Éste es un flujo laminar. Lentamente demos más vuelta a la llave y veamos que el flujo se hace turbulento. Observe que un flujo turbulento se desarrolla con un gasto relativamente pequeño.

La razón por la que un flujo puede ser laminar o turbulento tiene que ver con lo que le ocurre a una pequeña alteración al flujo, una perturbación a las componentes de velocidad. Una perturbación del flujo puede aumentar o disminuir en tamaño. Si aumenta una alteración del flujo en un flujo laminar (es decir, el flujo es inestable), el flujo puede hacerse turbulento; si disminuye la alteración, el flujo sigue siendo laminar. En ciertas situaciones el flujo puede desarrollarse en un flujo laminar diferente, como es el caso entre los cilindros concéntricamente giratorios que se muestran en la figura 3.13. A baja velocidad rotacional el flujo sería en círculos simples. Pero a una velocidad lo suficientemente alta el flujo se hace inestable y de pronto aparecen vórtices; es un flujo laminar mucho más complejo llamado flujo de Taylor-Conette.

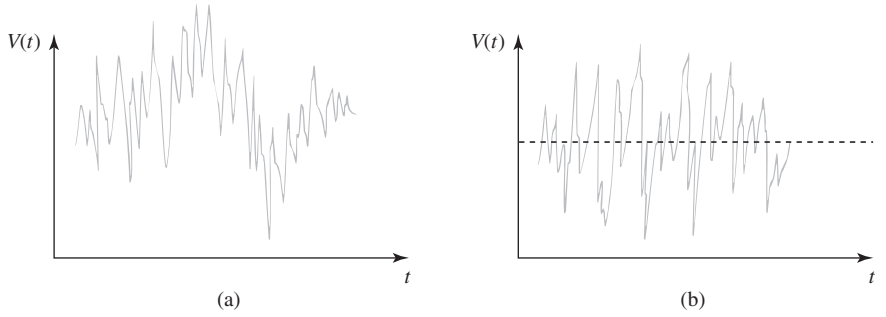


Fig. 3.12 Velocidad como una función del tiempo en un flujo turbulento: (a) flujo no permanente; (b) flujo "permanente".

Fig. 3.13 Flujo laminar entre cilindros giratorios. Se presenta un flujo secundario como vórtices toroidales regularmente espaciados. ("Steady supercritical Taylor vortex flow," de Burkhalter y Koschmieder. De Journal of Fluid Mechanics vol. 58, pp. 547-560 (1973). 2006 © Cambridge Journals, reproducido con permiso.)

Celdas de Taylor, 24

Número de Reynolds: *Parámetro que combina una escala de longitud, una escala de velocidad, y la viscosidad cinemática en*

$$\mathrm{Re} = VL/\nu$$

Número de Reynolds crítico: *Número arriba del cual deja de existir un flujo laminar primario.*

Si un flujo es laminar o turbulento depende de tres parámetros físicos que describen las condiciones del flujo. El primer parámetro es una escala de longitud del campo de flujo, como el grosor de una capa límite o el diámetro de un tubo. Si esta escala de longitud es lo suficientemente grande, un flujo puede ser turbulento. El segundo parámetro es una escala de velocidad como un promedio espacial de la velocidad; para una velocidad lo suficientemente alta el flujo puede ser turbulento. El tercer parámetro es la viscosidad cinemática; para una viscosidad lo suficientemente pequeña , el flujo puede ser turbulento.

Los tres parámetros pueden combinarse en uno solo que puede servir como herramienta para predecir el régimen de flujo. Esta cantidad es el **número de Reynolds**, denominado así en honor a Osborne Reynolds (1842-1912), un parámetro adimensional, definido como

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} \tag{3.3.1}$$

donde L y V son una longitud característica y una velocidad característica, respectivamente, y ν es la viscosidad cinemática; por ejemplo, en el flujo por un tubo, L sería el diámetro del tubo y V sería la velocidad promedio. Si el número de Reynolds es relativamente pequeño, el flujo es laminar como se muestra en las figuras 3.13 y 3.14; si es grande, el flujo es turbulento. Esto se expresa en forma más precisa al definir un **número de Reynolds crítico**, $\mathrm{Re}_{crít}$, de modo que el flujo es laminar si $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{crít}$. Por ejemplo, en un flujo dentro de un tubo de paredes rugosas se encuentra que $\mathrm{Re}_{crít} \approx 2000$. Éste es el número de Reynolds crítico mínimo y se usa en la mayoría de aplicaciones en ingeniería. Si la pared del tubo es extremadamente lisa y libre de vibraciones, el número de Reynolds crítico puede aumentarse a medida que se

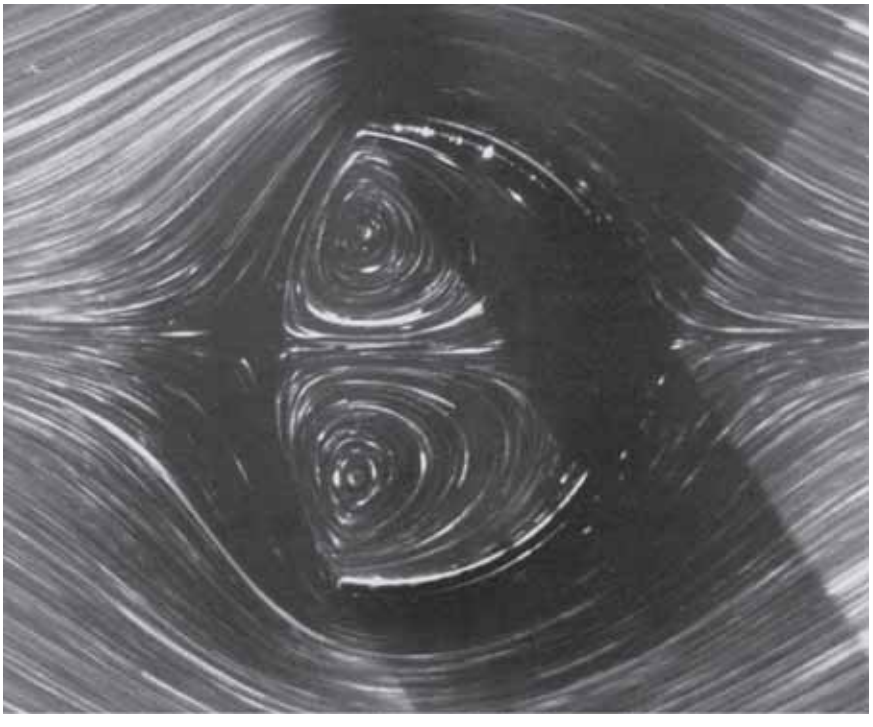


Fig. 3.14 Líneas de corriente alrededor de un arco semicircular. Con este número de Reynolds de 0.031 los centros del par de remolinos en la cavidad están separados una distancia de 0.52 del diámetro, de acuerdo con una solución analítica. Polvo de aluminio dispersado en glicerina es iluminado por una hendidura de luz. (Fotografía de Sadatoshi Taneda. De Album of Fluid Motion, 1982, The Parabolic Press, Stanford, California).

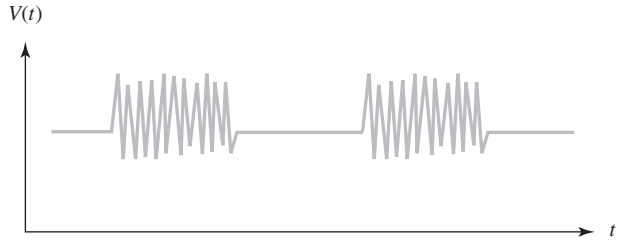


Fig. 3.15 Gráfica de velocidad contra señal de tiempo de una sonda de velocidad en un flujo intermitente.

reduce el nivel de fluctuación en el flujo; se han medido valores de más de 40 000. El número de Reynolds crítico es diferente para cada geometría, por ejemplo, es de 1 500 para flujo entre placas paralelas usando la velocidad promedio y la distancia entre las placas.

Número de Reynolds, 524

El flujo también puede ser laminar y turbulento en forma intermitente; esto recibe el nombre de *flujo intermitente.* Este fenómeno puede ocurrir cuando el número de Reynolds es cercano a $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}}$. La figura 3.15 muestra los datos de salida de una sonda de velocidad para dicho flujo.

Flujo en tubo, 202

En una capa límite que existe en una placa plana, debida a una corriente de fluido a velocidad constante, como se ve en la figura 3.16, la escala de longitud cambia con la distancia desde el borde aguas arriba. Se calcula un número de Reynolds usando la longitud x como la longitud característica. Para una cierta x_T, Re se convierte en $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}}$ y el flujo experimenta una transición de laminar a turbulento. Para una placa rígida lisa en un flujo uniforme con un bajo nivel de fluctuación de corriente libre, se han observado valores de hasta $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 10^6$. En la mayoría de aplicaciones de ingeniería suponemos una pared rugosa, o alto nivel de fluctuación de corriente libre, con un número de Reynolds crítico asociado de aproximadamente 3×10^5.

CONCEPTO CLAVE *En la mayoría de las aplicaciones, suponemos un número de Reynolds crítico de 3×10^5 en un flujo sobre una placa plana.*

No es apropiado referirse a un flujo inviscido como laminar o turbulento. Es frecuente que el flujo inviscido de la figura 3.10 reciba el nombre de **corriente libre**. La corriente libre puede ser irrotacional o puede poseer vorticidad; la mayoría de las veces es irrotacional.

Corriente libre: *Flujo inviscido fuera de la capa límite en un flujo externo.*

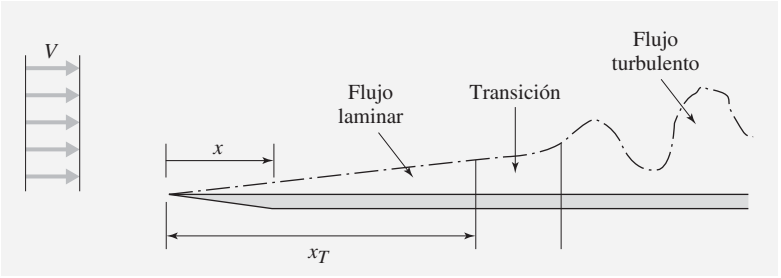


Fig. 3.16 Flujo de capa límite sobre una placa plana.

Ejemplo 3.3

El tubo de 2 cm de diámetro de la figura E3.3 se usa para transportar agua a 20 ºC. ¿Cuál es la velocidad promedio máxima que puede existir en el tubo para con la cual se garantiza un flujo laminar?

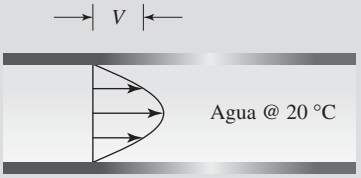


Fig. E3.3

Solución

Se encuentra que la viscosidad cinemática en el apéndice B es de $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. Usando un número de Reynolds de 2 000 de modo que se garantice un flujo laminar, encontramos que

$$V = \frac{2000\nu}{D}$$

$$= \frac{2000 \times 10^{-6}}{0.02} = 0.1 \text{ m/s}$$

Esta velocidad promedio es bastante pequeña. Velocidades así de pequeñas no suelen hallarse en situaciones reales; por tanto, el flujo laminar es raras veces de interés en ingeniería excepto para temas especializados como es el caso de la lubricación. Casi todos los flujos internos son flujos turbulentos, por lo que el estudio de la turbulencia gana mucha atención.

3.3.4 Flujos incompresibles y compresibles

Flujo incompresible: *La densidad de cada partícula de fluido permanece constante.*

La última clasificación importante de los flujos de fluido a ser considerada en este capítulo separa los flujos en flujos incompresibles y compresibles. Un **flujo incompresible** existe si la densidad de cada partícula de fluido permanece relativamente constante cuando se mueve por el campo de fluido, es decir,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{3.3.2}$$

CONCEPTO CLAVE *La densidad constante es más restrictiva que la incompresibilidad.*

Esto no exige que la densidad sea constante en todas partes. Si la densidad es constante, entonces, obviamente, el flujo es incompresible pero esa sería una condición más restrictiva. El flujo atmosférico, en el que $\rho = \rho(z)$, donde z es vertical, y los flujos donde hay capas adyacentes de agua dulce o salada, como ocurre cuando los ríos entran en el océano, son ejemplos de flujos incompresibles en los que varía la densidad.

Número de Mach: *Parámetro en un flujo de gas definido como M = V/c.*

Además de flujos líquidos, los flujos de gas a baja velocidad tales como el flujo atmosférico citado líneas antes, también son considerados como flujos incompresibles. El **número de Mach**, denominado así en honor a Ernst Mach (1838-1916), se define como

$$\mathrm{M} = \frac{V}{c} \tag{3.3.3}$$

donde V es la velocidad del gas y la velocidad de la onda $c = \sqrt{kRT}$. La ecuación 3.3.3 es útil para determinar si un flujo particular de gas puede ser estudiado como flujo incompresible. Si M < 0.3, las variaciones de densidad son a lo sumo 3% y se supone que el flujo es incompresible; para aire estándar esto corresponde a una velocidad abajo de unos 100 m/s o 300 ft/s. Si M > 0.3, las variaciones de la densidad influyen en el flujo y deben tomarse en cuenta los efectos de la compresibilidad; estos flujos son **flujos compresibles** y se consideran en el capítulo 9.

Flujo compresible: *Las variaciones de la densidad influyen en el flujo.*

Los flujos incompresibles de gas incluyen los flujos atmosféricos, la aerodinámica del despegue y aterrizaje de aviones comerciales, flujos de aire en calefacción y acondicionamiento de aire, flujo alrededor de automóviles y a través de radiadores, y el flujo de aire alrededor de edificios, para citar sólo algunos. Los flujos compresibles incluyen la aerodinámica de aviones de alta velocidad, el flujo de aire a través de motores de reacción, el flujo de vapor por la turbina en una planta generadora de energía eléctrica, el flujo de aire en un compresor y el flujo de la mezcla de aire y gas en un motor de combustión interna.

3.4 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

En esta sección presentamos una ecuación que es probable que se use con más frecuencia en aplicaciones de flujo de fluidos que cualquiera otra. Con frecuencia también es la que más mal se usa; por tanto, es importante entender sus limitaciones. Sus limitaciones son un resultado de varias suposiciones hechas en su deducción. Una de las suposiciones es que los efectos viscosos no se toman en cuenta. En otras palabras, de acuerdo con la ecuación 1.5.5, los esfuerzos cortantes introducidos por gradientes de velocidad no se toman en consideración. Estos esfuerzos son con frecuencia muy pequeños en comparación con las diferencias de presión en el campo de flujo. Localmente, estos esfuerzos tienen pequeños efectos en el campo de flujo y la suposición se justifica. No obstante, en grandes distancias o en regiones de gradientes de alta velocidad, estos esfuerzos pueden afectar las condiciones de flujo de modo que los efectos viscosos deben incluirse.

CONCEPTO CLAVE *Los esfuerzos cortantes son con frecuencia muy pequeños en comparación con las diferencias de presión.*

La deducción de esta importante ecuación, la ecuación de Bernoulli, empieza con la aplicación de la segunda ley de Newton a una partícula de fluido. Usemos una partícula cilíndrica infinitesimal colocada como se indica en la figura 3.17, con longitud ds y área de sección transversal dA. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son las fuerzas de presión y el peso, como se muestra. Sumando fuerzas en la dirección del movimiento, la dirección s, resulta.

$$p\,dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right) dA - \rho g\,ds\,dA\cos\theta = \rho\,ds\,dA\,a_s \tag{3.4.1}$$

donde a_s es la aceleración de la partícula en la dirección s. Está dada por[1]

$$a_s = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{3.4.2}$$

donde $\partial V/\partial t = 0$ dado que supondremos un flujo permanente. También, vemos que

$$dh = ds\cos\theta = \frac{\partial h}{\partial s}\,ds \tag{3.4.3}$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{\partial h}{\partial s} \tag{3.4.4}$$

[1]Esto puede ser verificado considerando la ecuación. 3.2.9a, suponiendo que $v = w = 0$. Considere que la dirección x es tangente a la línea de corriente en el instante mostrado, de modo que $u = V$.

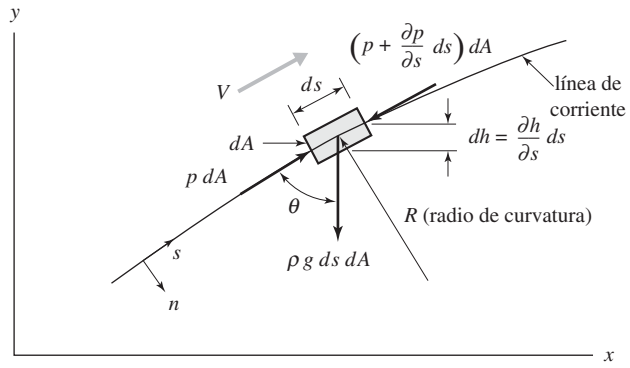


Fig. 3.17 Partícula en movimiento a lo largo de una línea de corriente.

Entonces, después de dividir entre $ds\, dA$, y usando las ecuaciones anteriores para a_s y cos θ, la ecuación 3.4.1 toma la forma

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} \tag{3.4.5}$$

Ahora, suponemos una densidad constante y observamos que $V\partial V/\partial s = \partial(V^2/2)/\partial s$; entonces podemos escribir la ecuación 3.4.5 como

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0 \tag{3.4.6}$$

Ecuación de Bernoulli, 910

Ésta se satisface si, a lo largo de la línea de corriente,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \text{constante} \tag{3.4.7}$$

donde la constante puede tener un valor diferente en una línea de corriente diferente. Entre dos puntos en la misma línea de corriente,

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 \tag{3.4.8}$$

Ésta es la bien conocida *ecuación de Bernoulli*, llamada así en honor a Daniel Bernoulli (1700-1782). Observe las cinco suposiciones:

- Flujo inviscido (sin esfuerzos cortantes)
- Flujo permanente ($\partial V/\partial t = 0$)
- A lo largo de una línea de corriente ($a_s = V\partial V/\partial s$)
- Densidad constante ($\partial\rho/\partial s = 0$)
- Marco de referencia inercial (**A** = **a** como en la ecuación 3.2.12)

Si la ecuación 3.4.8 se divide entre g, la dimensión de cada uno de los términos es una longitud y la ecuación de Bernoulli toma la forma alterna.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 \tag{3.4.9}$$

CONCEPTO CLAVE *La presión total es $p + \rho V^2/2$.*

La suma de los dos términos ($p/\gamma + h$) se denomina *carga hidráulica* y la suma de los tres términos es la *altura total*. Es frecuente que a la presión p se le refiere como **presión estática**, y la suma de los dos términos

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = p_T \tag{3.4.10}$$

reciba el nombre de *presión total* p_T o **presión de estancamiento**, que es la presión en un punto de estancamiento (vea la figura 3.7) en el flujo.

Presión estática: *La presión p, generalmente expresada como presión manométrica.*

Presión de estancamiento: *Presión que existe en un punto de estancamiento.*

Piezómetro: *Manómetro diseñado para medir la presión estática.*

Sonda Pitot: *Manómetro diseñado para medir la presión total.*

Sonda estática Pitot: *Manómetro diseñado para medir la diferencia entre la presión total y la estática.*

La presión estática en un tubo se puede medir simplemente al instalar un **piezómetro**, que se ilustra[2] en la figura 3.18a. Un dispositivo, conocido como **sonda Pitot**, que se muestra en la figura 3.18b, se usa para medir la presión total en el flujo de un fluido. El punto 2 justo dentro del tubo Pitot es un punto de estancamiento; la velocidad allí es cero. La diferencia entre las lecturas se puede usar para determinar la velocidad en el punto 1. Una **sonda estática Pitot** también se usa para medir la diferencia entre la presión total y la estática con una sonda (figura 3.18c). La velocidad en el punto 1 (usando las lecturas del piezómetro y sondas Pitot, o la lectura de la sonda estática Pitot) puede determinarse si se aplica la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} \tag{3.4.11}$$

donde hemos supuesto que el punto 2 es un punto de estancamiento para que $V_2 = 0$. Esto da

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)} \tag{3.4.12}$$

Encontraremos numerosos usos para la ecuación de Bernoulli en nuestro estudio de los fluidos. No obstante, debemos tener cuidado de nunca usarla en un flujo no permanente o si los efectos viscosos son importantes (las razones principales para hacer inaplicable la ecuación de Bernoulli). Tampoco debemos confundir nunca la ecuación de Bernoulli con la ecuación de la energía; son ecuaciones independientes como lo ilustra el ejemplo 3.6.

CONCEPTO CLAVE *Nunca confundir las ecuaciones de Bernoulli con la ecuación de la energía.*

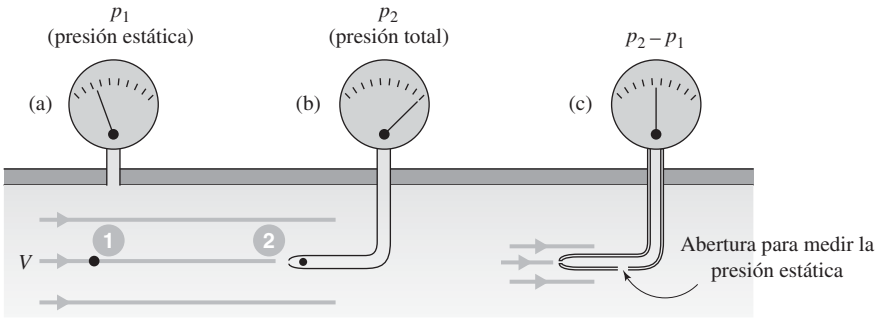


Fig. 3.18 Sondas de presión: (a) piezómetro; (b) sonda Pitot; (c) sonda estática Pitot.

[2] Cuando se perfora el agujero en la pared necesario para el piezómetro, a menudo se forman rebabas en la superficie interna. Es importante que dichas rebabas se eliminen, ya que pueden causar errores hasta de 30% en las lecturas de la presión.

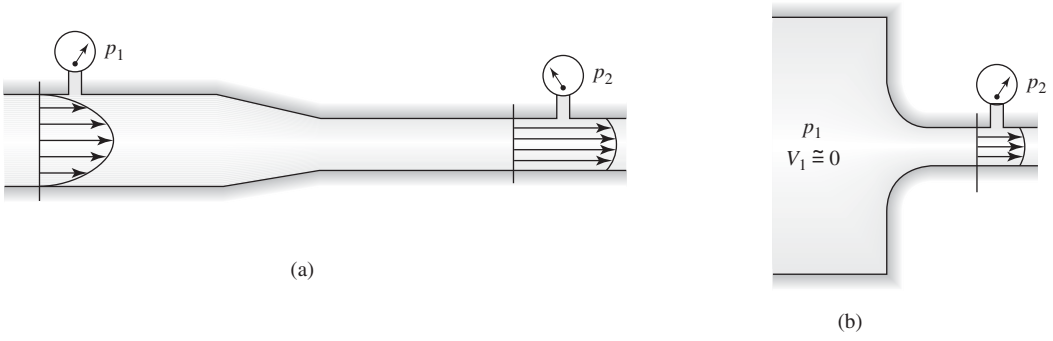


Fig. 3.19 Flujos inviscidos internos: (a) flujo a través de una contracción; (b) flujo desde un pleno.

La ecuación de Bernoulli se puede usar para determinar a qué altura llegará el agua de la manguera de un bombero, para hallar la presión sobre la superficie de una superficie aerodinámica[3] a baja velocidad y para hallar la fuerza del viento sobre la ventana de una casa. Todos estos ejemplos son flujos externos, flujos alrededor de cuerpos sumergidos en el fluido.

CONCEPTO CLAVE *Los efectos viscosos requieren áreas considerables para que sean importantes.*

Otra clase de problemas donde se puede suponer un flujo inviscido y donde la ecuación de Bernoulli encuentra una frecuente aplicación es la de los flujos internos sobre distancias relativamente cortas, por ejemplo el flujo a través de una contracción, como se muestra en la figura 3.19a, o el flujo desde un pleno, como se ilustra en la figura 3.19b. Para un perfil de velocidad determinado que entra a una contracción corta, la caída de presión $(p_1 - p_2)$ y el perfil de velocidad en la sección 2 pueden determinarse suponiendo un flujo inviscido. Los efectos viscosos son comúnmente muy pequeños y requieren de distancias y áreas considerables sobre las cuales operar para que sean importantes; entonces, en situaciones como las ilustradas en la figura 3.19, con frecuencia los efectos viscosos pueden despreciarse.

Flujo sobre un cilindro, 95

Flujo sobre un cilindro, 190

Un flujo inviscido no siempre da una buena aproximación del flujo real que existe alrededor de un cuerpo. Considere el flujo inviscido alrededor de la esfera (o cilindro) mostrado en la figura 3.20. Un punto de estancamiento donde $V = 0$ existe tanto en frente como en la parte posterior de la esfera. La ecuación de Bernoulli predice una máxima presión en los puntos de estancamiento A y C porque la velocidad es cero en esos puntos. Una velocidad máxima, y por tanto una presión

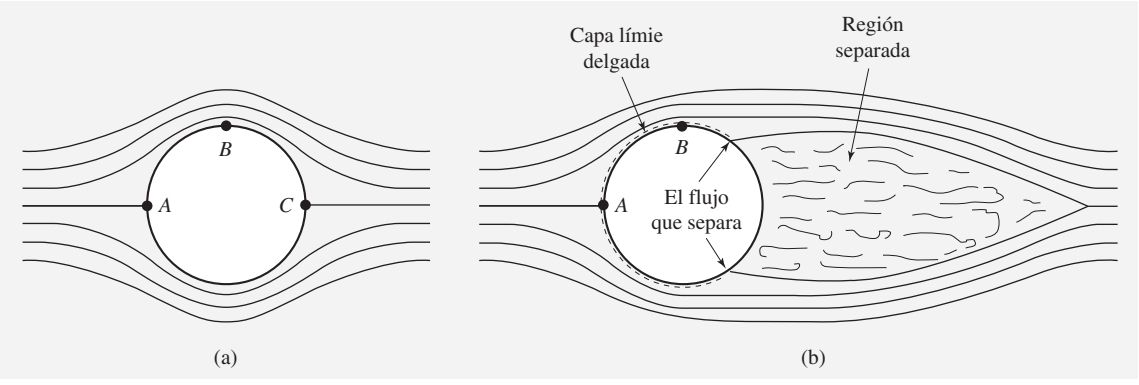


Fig. 3.20 Flujo alrededor de una esfera: (a) flujo inviscido; (b) flujo real.

[3] Para considerar el flujo alrededor de una aeronave como un flujo permanente, simplemente detenemos el avión y movemos el aire, como se hace en los estudios de modelos utilizando un túnel de viento. Las presiones y las fuerzas permanecen sin cambios.

mínima, existirían en el punto *B*. En el flujo inviscido de la parte (a), el fluido que fluye de *B* a *C* debe fluir desde la región de baja presión cercana a *B* hasta la región de alta presión cerca de *C*. En el flujo real existe una capa límite delgada en la que la velocidad se reduce a cero en la superficie de la esfera. Este fluido de movimiento lento cerca del límite no tiene una cantidad de movimiento suficiente para entrar en la región de presión más alta cerca de *C*; el resultado es que el fluido se *separa* del límite, es decir, la línea de corriente límite pierde contacto con éste, creando una **región separada**, una región de flujo que vuelve a circular, como se ve en el flujo real representado en la parte (b). La presión no aumenta sino que permanece relativamente lenta en la parte posterior de la esfera. La alta presión que existe cerca del punto delantero de estancamiento nunca se recupera en la parte posterior de la esfera, resultando en una fuerza de arrastre relativamente grande en la dirección del flujo. Se presenta una situación semejante en el flujo alrededor de un automóvil.

Flujo frente a un cilindro, 166

Región separada: *Una región de flujo que vuelve a circular debido al fluido que se separa del límite.*

CONCEPTO CLAVE *La presión continúa relativamente baja sobre la parte posterior de una esfera.*

El flujo en el frente de la esfera puede aproximarse bien por medio de un flujo inviscido, pero es obvio que el flujo sobre la parte posterior de la esfera se desvía radicalmente de un flujo inviscido. Los efectos viscosos en la capa límite han conducido a un flujo separado, fenómeno que a menudo es indeseable. Por ejemplo, un flujo separado en una superficie aerodinámica se denomina **pérdida de sustentación** y nunca debe ocurrir, excepto en las alas de aviones especiales para acrobacias. En los álabes de una turbina los flujos separados resultan a una eficiencia considerablemente reducida. El deflector de aire en el techo de la cabina de un camión de doble caja reduce la región separada, reduciendo de este modo la resistencia al avance y el consumo de combustible.

CONCEPTO CLAVE *El flujo en el frente de una esfera es aproximado por un flujo inviscido.*

Pérdida de sustentación: *Flujo separado en una superficie aerodinámica.*

Si los efectos viscosos son insignificantes en un flujo líquido permanente, podemos usar la ecuación de Bernoulli para localizar puntos de posible *cavitación*. Esta condición se presenta cuando la presión local se hace igual a la presión de vapor del líquido. Debe evitarse, si posible, por el daño que provoca en superficies sólidas o porque el líquido vaporizado puede hacer que los dispositivos no operen con eficiencia. La figura 3.21 muestra un flujo cavitante a muy corta distancia corriente abajo en una contracción en un tubo. En el punto donde ocurre la cavitación, se generan pequeñas burbujas de vapor que colapsan cuando entran a una región de presión más alta. El colapso es acompañado por presiones locales muy grandes que duran sólo una fracción de segundo. Estos picos de presión pueden llegar a una pared en donde, después de repetidas aplicaciones, resultan en daños considerables.

CONCEPTO CLAVE *Ocurre cavitación cuando la presión local es igual a la presión de vapor.*

Es necesario hacer una observación importante respecto a los cambios de presión en un fluido en lo que se refiere a entradas y salidas de un tubo o conducto. Considere el flujo de un depósito a través de un tubo, como se muestra en la figura 3.22. En la entrada, las líneas de corriente son curvas y la presión no es constante a través de la sección 1, de modo que no se puede suponer que la presión en la

CONCEPTO CLAVE *A la entrada de un tubo, las líneas de corriente son curvas y la presión no es constante a través del área de entrada.*

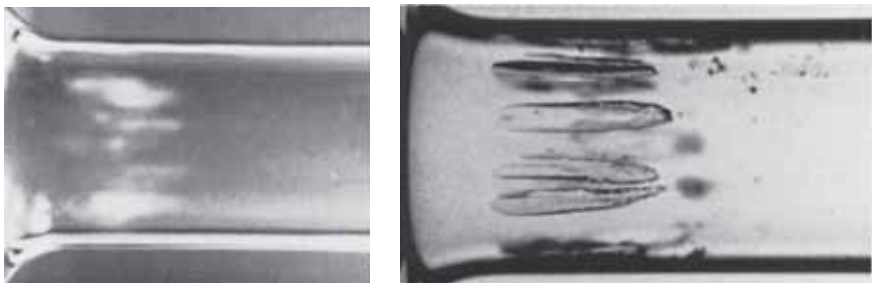


Fig. 3.21 Cavitación en una tobera, con agua circulando a una velocidad de 15 m/s; (a) lámpara incandescente, tiempo de exposición $\frac{1}{30}$ s; (b) tiempo de exposición 5 μs con luz estroboscópica. (Fotografía cortesía de la Japan Society of Mechanical Engineers and Pergamon Press.)

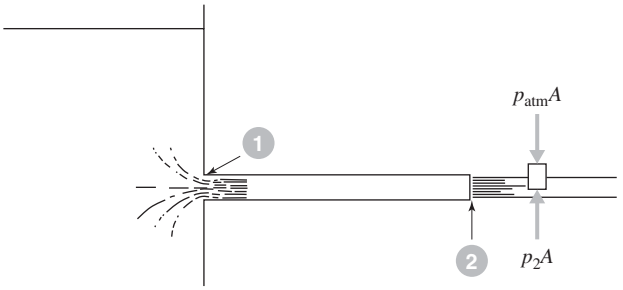


Fig. 3.22 Flujo de salida a la atmósfera.

sección 1 es uniforme. A la salida, sin embargo, las líneas de corriente son rectas, de manera que no existe aceleración normal a estas líneas de corriente; en consecuencia, las fuerzas de presión que actúan sobre los extremos del pequeño volumen cilíndrico de control deben ser iguales. Escribimos esto como $p_2 = p_{atm}$ o $p_2 = 0$ presión manométrica.

En la figura 3.17 sumamos fuerzas en el elemento fluido a lo largo de la línea de corriente y derivamos la ecuación de Bernoulli. Podemos entender mejor el campo de presión si sumamos fuerzas normales a la línea de corriente. Consideremos que la partícula de fluido es un paralelepípedo con grosor dn en la dirección n y área dA_s en el lado con longitud ds. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección n resulta en

$$pdA_s - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\,dn\right)dA_s = \rho dA_s dn\,\frac{V^2}{R} \tag{3.4.13}$$

donde hemos despreciado el peso dado que no tratamos de integrar sobre distancias grandes. Hemos supuesto que la aceleración en la dirección normal es V^2/R, donde R es el radio de curvatura en este flujo plano (en un flujo tridimensional habría un radio de curvatura principal y un radio de curvatura binormal). La ecuación (3.4.13) se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho\,\frac{V^2}{R} \tag{3.4.14}$$

De esta ecuación podemos cualitativamente describir cómo cambia la presión normal a una línea de corriente (la ecuación de Bernoulli predice los cambios de presión a lo largo de una línea de corriente). Si sustituimos $\partial p/\partial n$ con $\Delta p/\Delta n$, el cambio de presión incremental Δp sobre la corta distancia Δn normal a la línea de corriente está dado por

$$\Delta p = -\rho\,\frac{V^2}{R}\,\Delta n \tag{3.4.15}$$

CONCEPTO CLAVE *La presión disminuye en la dirección n.*

Esto dice que la presión disminuye en la dirección n; esta disminución es directamente proporcional a ρ y a V^2 e inversamente proporcional a R. En consecuencia, un tornado, con $p = 0$ en su exterior, tendrá una presión muy baja en su centro donde R es relativamente pequeño y V es bastante grande.

En la figura 3.22 la presión sería relativamente baja en la esquina de la sección 1 y relativamente alta en el centro de la misma. Estas descripciones cualitativas pueden ser muy útiles para entender el comportamiento de un flujo de fluido.

Ejemplo 3.4

El viento alcanza una velocidad de 90 mph en una tormenta. Calcule la fuerza que actúa sobre la ventana de 3 ft × 6 ft de la figura E3.4 de cara a la tormenta. La ventana está en un edificio alto, de modo que la velocidad del viento no se reduce debido a los efectos del suelo. Use $\rho = 0.0024$ slug/ft^3.

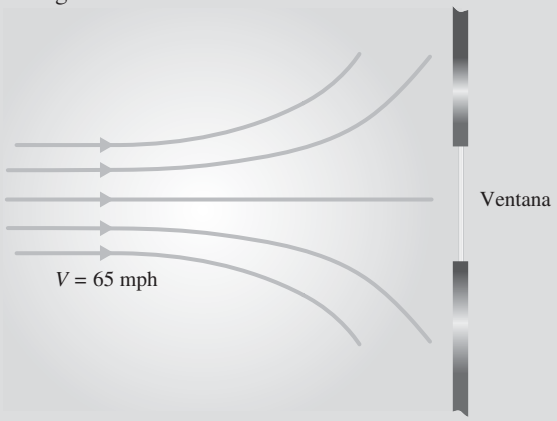


Fig. E3.4

Solución

La ventana de cara a la tormenta estará en una región de estancamiento donde la velocidad del viento se reduce a cero. Trabajando con presiones manométricas, la presión p corriente arriba en el viento es cero. La velocidad V debe tener unidades de ft/s. Es decir,

$$V = 90\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} \times \frac{5280\text{ ft}}{1\text{ mi}} = 132\text{ ft/s}$$

La ecuación de Bernoulli se puede usar en esta situación porque podemos despreciar los efectos viscosos, además de que se presenta un flujo permanente a lo largo de una línea de corriente a densidad constante (el aire es incompresible a velocidades menores que 220 mph). Calculamos la presión en la ventana seleccionando el estado 1 en la corriente libre y el estado 2 en la ventana, como sigue:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \underbrace{\frac{p_1}{\gamma}}_{0} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \underbrace{\frac{p_2}{\gamma}}_{0} + h_2$$

$$\therefore p_2 = \frac{\rho V_1^2}{2}$$

$$= \frac{0.0024\text{ slug/ft}^3 \times 13.2^2\text{ ft}^2/\text{s}^2}{2} = 20.9\text{ lb/ft}^2$$

donde hemos usado $\gamma = \rho g, h_2 = h_1, p_1 = 0$, y $V_2 = 0$. Multiplicamos por el área y encontramos que la fuerza es

$$F = pA$$
$$= 20.9 \times 3 \times 6 = 376\text{ lb}$$

Recomendamos verificar las unidades de lb/ft^2 en el cálculo anterior de la presión. Para hacer esto, usamos $F = ma$ que da slug = lb · s^2/ft. Cuando se usen unidades inglesas, siempre debe usarse la masa en slugs, la longitud en pies, la fuerza en libras y el tiempo en segundos.

Ejemplo 3.5

La carga de presión estática en un tubo de aire (Fig. E3.5) se mide con un piezómetro como 16 mm de agua. Una sonda Pitot indica 24 mm de agua. Calcule la velocidad del aire a 20 °C. También, calcule el número de Mach y comente en cuanto a la compresibilidad del flujo.

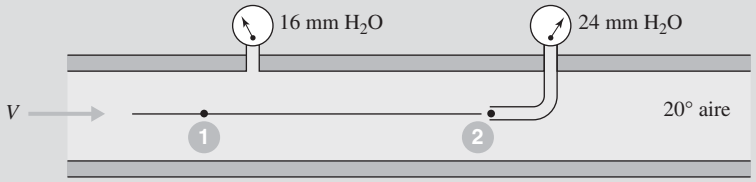


Fig. E3.5

Solución

Se aplica la ecuación de Bernoulli entre dos puntos en la línea de corriente que termina en el punto de estancamiento de la sonda Pitot. El punto 1 está corriente arriba y p_2 es la presión total en el punto 2; entonces, sin un cambio de elevación,

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_T}{\gamma}$$

La presión medida con el piezómetro es $p_1 = \gamma h = 9810 \times 0.016 = 157$ Pa. Usamos la ley de un gas ideal para calcular la densidad:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(157 + 101\,000)\text{Pa}}{287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K} \times (273 + 20)\text{K}} = 1.203\ \text{kg/m}^3$$

donde la presión atmosférica estándar, que es 101 000 Pa (si no se da la elevación, se suponen condiciones estándar), se suma dado que es necesaria la presión absoluta en la ley de un gas ideal. Las unidades se comprueban usando Pa = N/m^2 and J = N·m. La velocidad es entonces

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T - p_1)} = \sqrt{\frac{2(0.024 \times 9810 - 157)\ \text{Pa}}{1.203\ \text{kg/m}^3}} = 11.42\ \text{m/s}$$

donde las unidades pueden verificarse usando kg = $\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$. Para hallar el número de Mach, debemos calcular la velocidad del sonido. De la ecuación 1.7.17 tenemos que es

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1.4 \times 287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K} \times 293\ \text{K}} = 343\ \text{m/s}$$

El número de Mach es entonces

$$\text{M} = \frac{V}{c} = \frac{11.44}{343} = 0.0334$$

Obviamente, puede suponerse que el flujo es incompresible porque M < 0.3. La velocidad tendría que ser mucho más alta para que la compresibilidad sea de importancia.

Ejemplo 3.6

La ecuación de Bernoulli, en la forma de la ecuación 3.4.8, se ve muy semejante a la ecuación de la energía desarrollada en termodinámica para un volumen de control. Analice las diferencias entre las dos ecuaciones.

Solución

De la termodinámica recordamos que la ecuación de la energía para flujo permanente para un volumen de control, con una entrada y una salida, toma la forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + \tilde{u}_2 + gz_2\right) - \dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + \tilde{u}_1 + gz_1\right)$$

Esto se convierte, después de dividir todo entre g,

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1$$

donde hemos hecho las siguientes suposiciones:

No hay transferencia de calor ($\dot{Q} = 0$)
No hay trabajo en eje ($\dot{W}_s = 0$)
No hay cambio de temperatura ($\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1$, es decir, no hay pérdidas debidas a esfuerzos cortantes)
Perfiles de velocidad uniformes en las dos secciones
Flujo permanente
Densidad constante ($\gamma_2 = \gamma_1$)

Aun cuando varias de estas suposiciones son iguales a las hechas en la deducción de la ecuación de Bernoulli (flujo permanente, densidad constante y que no hay esfuerzo cortante), no debemos confundir las dos ecuaciones; la ecuación de Bernoulli se deriva de la segunda ley de Newton y es válida a lo largo de una línea de corriente, mientras que la ecuación de la energía se deriva de la primera ley de la termodinámica y es válida entre dos secciones en un flujo de fluido. La ecuación de la energía se puede usar a través de una bomba para determinar la potencia necesaria para obtener una elevación de presión particular; la ecuación de Bernoulli se puede usar a lo largo de a una línea de corriente de estancamiento para determinar la presión en el punto de estancamiento, punto donde la velocidad es cero. Las ecuaciones son bastante diferentes, y sólo porque la ecuación de la energía degenera en la ecuación de Bernoulli para situaciones particulares, las dos no deben usarse fuera de contexto.

Ejemplo 3.7

Explique por qué una rebaba en el lado corriente arriba de la abertura del piezómetro de la figura 3.18a resultará en una baja lectura de la presión.

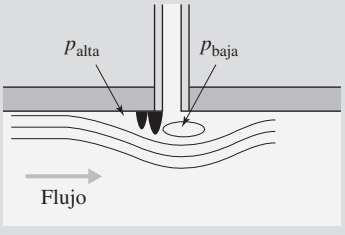


Fig. E3.7

(continúa)

Solución

Una rebaba en el lado corriente arriba de la abertura del piezómetro resulta en un flujo en la cercanía de la rebaba, un poco como el que se muestra en la figura E3.7. Se formaría un patrón de líneas de corriente de modo que se presentaría una presión relativamente alta en el lado corriente arriba de la rebaba y una presión relativamente baja en el lado corriente abajo en la abertura del piezómetro. En consecuencia, como el centro de curvatura de la línea de corriente está en la cercanía de la abertura, se registraría una lectura más baja de la presión. Si la rebaba estuviera en el lado corriente abajo de la abertura, se registraría una lectura de alta presión.

3.5 RESUMEN

La descripción euleriana del movimiento se utilizó para expresar la aceleración como

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \tag{3.5.1}$$

El movimiento de un fluido puede provocar que sus partículas giren y/o se deformen. Para un flujo en el plano xy una partícula giraría con una velocidad angular

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.5.2}$$

y se deformaría con

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.5.3}$$

Los flujos de fluido se clasifican como permanentes o no permanentes; viscosos o inviscidos; laminares, turbulentos o de corriente libre; incompresibles o compresibles. Cualesquiera de éstos pueden ser flujos uniformes, en una, dos o tres dimensiones. Se requiere de experiencia y práctica para clasificar apropiadamente un flujo particular de interés. Es sólo para los flujos más simples (es decir, un flujo permanente, laminar, incompresible, en una dimensión) que esperamos obtener una solución relativamente sencilla.

Por último, la famosa ecuación de Bernoulli

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 \tag{3.5.4}$$

se presentó para un flujo permanente, inviscido, de densidad constante a lo largo de una línea de corriente en un marco de referencia inercial. También se obtuvo la estimación del cambio de presión normal a una línea de corriente:

$$\Delta p = -\rho\frac{V^2}{R}\Delta n \tag{3.5.5}$$

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

3.1 Determine el vector unitario normal a la línea de corriente en un punto donde $\mathbf{V} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ en un flujo plano.

(A) $0.6\hat{\mathbf{i}} + 0.8\hat{\mathbf{j}}$ **(B)** $-0.6\hat{\mathbf{i}} + 0.8\hat{\mathbf{j}}$
(C) $0.8\hat{\mathbf{i}} - 0.6\hat{\mathbf{j}}$ **(D)** $0.8\hat{\mathbf{i}} + 0.6\hat{\mathbf{j}}$

3.2 Un campo de velocidad está dado por $\mathbf{V} = 2xy\hat{\mathbf{i}} - y^2\hat{\mathbf{j}}$ m/s. La magnitud de la aceleración en (–1 m, 2 m) está más cercana a:

(A) 11.21 m/s^2 **(B)** 14.69 m/s^2
(C) 17.89 m/s^2 **(D)** 1.2 m/s^2

3.3 La velocidad mostrada en la figura P3.3 está dada por $V(x) = 10/(4 - x)^2$ m/s. La aceleración en $x = 2$ m está más cercana a:

(A) 52.5 m/s^2 **(B)** 42.5 m/s^2
(C) 25 m/s^2 **(D)** 6.25 m/s^2

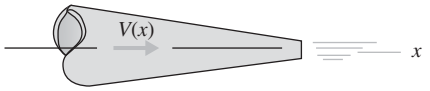


Fig. P3.3

3.4 El flujo en una sección del conducto mostrado en la figura P3.3 es un:

(A) flujo desarrollado
(B) flujo uniforme
(C) flujo unidimensional
(D) flujo bidimensional

3.5 La velocidad de un avión se mide con un tubo Pitot. Si el tubo Pitot mide 800 mm de agua, calcule la velocidad del avión. Use $\rho_{aire} = 1.23$ kg/m^3.

(A) 125 m/s **(B)** 113 m/s
(C) 80 m/s **(D)** 36 m/s

3.6 Un tubo Pitot mide 600 mm de agua en un tubo que transporta agua. Una sonda de presión estática en el mismo lugar mide 200 mm de agua. La velocidad del agua en el tubo está más cercana a:

(A) 1.10 m/s **(B)** 1.98 m/s
(C) 2.8 m/s **(D)** 3.43 m/s

3.7 Un manómetro, que utiliza una sonda Pitot, mide 10 mm de mercurio. Si se desea conocer la velocidad en un tubo que transporta agua al que el manómetro está conectado, ¿cuál información adicional de la siguiente lista es necesaria?

I. La temperatura del agua
II. La presión en el tubo
III. La densidad del mercurio
IV. El diámetro del tubo

(A) I y II **(B)** II y III **(C)** III y IV **(D)** III y IV

3.8 Una manguera de agua está presurizada a 800 kPa con su boquilla en la posición cerrada. Si la boquilla se abre un poco, como se muestra en la figura P3.8, calcule la velocidad de salida del agua. Suponga que la velocidad dentro de la manguera es insignificante.

(A) 40 m/s **(B)** 30 m/s
(C) 20 m/s **(D)** 10 m/s

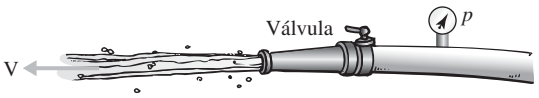


Fig. P3.8

3.9 A través de los discos que se ilustran en la figura P3.9, fluye benceno. Si $V_2 = 30$ m/s, la presión p_1, está más cercana a:

(A) 150 kPa **(B)** 200 kPa
(C) 250 kPa **(D)** 300 kPa

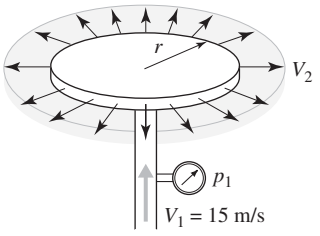


Fig. P3.9

PROBLEMAS

Campos de flujo

3.10 Se inicia un incendio y el humo de la chimenea sube directamente hacia arriba; no hay viento. Después de unos minutos, el viento empieza a soplar pero el humo sigue subiendo lentamente. Trace la línea fugaz del humo, las líneas de trayectoria de las primeras partículas que salen de la chimenea, y unas pocas líneas de corriente, suponiendo que el viento sopla paralelo al suelo en una dirección constante.

3.11 Una investigadora tiene un gran número de pequeños dispositivos de flotación, cada uno de los cuales está equipado con una batería y una bombilla. Explique cómo determinaría ella las líneas de trayectoria y las líneas fugaces cerca de la superficie de un arroyo, con algunas corrientes desconocidas que varían con el tiempo.

3.12 Un niño pequeño persigue a su papá alrededor del patio con la manguera de agua de la figura P3.12. Trace

una línea de trayectoria y una línea fugaz si el niño está corriendo perpendicularmente al chorro de agua.

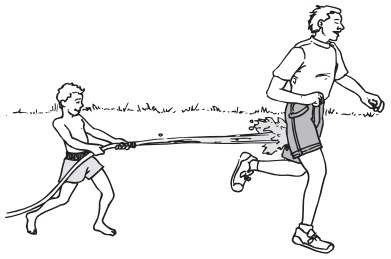


Fig. P3.12

3.13 El globo de aire caliente de la figura P3.13 se desplaza con el viento. El vector velocidad del viento es $\mathbf{V} = 6\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}}$ ft/s durante la primera hora y, a continuación, es $10\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ ft/s durante dos horas. En coordenadas xy, trace la línea de trayectoria del globo y líneas de corriente en $t = 2$ horas. Si varios globos de aire caliente partieron desde el mismo lugar, trace la línea fugaz formada por los globos en $t = 3$. Los globos partieron en el origen.

Fig. P3.13

3.14 Un campo de velocidad está dado por $\mathbf{V} = (2t + 2)\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Trace las líneas de trayectoria de dos partículas hasta $t = 5$ s, una que se origina del origen en $t = 0$, y otra que se genera desde el origen en $t = 2$ s. También, trace las líneas de corriente en $t = 5$ s.

3.15 Usando coordenadas rectangulares, exprese la componente z de la ecuación 3.2.2.

3.16 Se estudiará la situación del tránsito en la isla Mackinac, Michigan, donde no se permiten automóviles (pero sí bicicletas). Comente sobre cómo el estudio podría realizarse usando un método lagrangiano y un método euleriano.

3.17 Determine la velocidad de una partícula de fluido en el origen y en el punto (1, –2, 0) para cada uno de los campos de velocidad cuando $t = 2$ s. Todas las distancias son están pies y t está en segundos.

(a) $\mathbf{V} = (x + 2)\hat{\mathbf{i}} + xt\hat{\mathbf{j}} - z\hat{\mathbf{k}}$ ft/s
(b) $\mathbf{V} = xy\hat{\mathbf{i}} - 2y^2\hat{\mathbf{j}} + tyz\hat{\mathbf{k}}$ ft/s
(c) $\mathbf{V} = x^2t\hat{\mathbf{i}} - (xz + 2t)\hat{\mathbf{j}} + xyt\hat{\mathbf{k}}$ ft/s

3.18 Calcule el ángulo que forma el vector velocidad con el eje x y un vector unitario normal a la línea de corriente en (1, –2), para los siguientes campos de velocidad cuando $t = 2$ s. Todas las distancias están en metros y t está en segundos.

(a) $\mathbf{V} = (x + 2)\hat{\mathbf{i}} + xt\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(b) $\mathbf{V} = xy\hat{\mathbf{i}} - 2y^2\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(c) $\mathbf{V} = (x^2 + 4)\hat{\mathbf{i}} - y^2t\hat{\mathbf{j}}$ m/s

3.19 Encuentre la ecuación de la línea de corriente que pasa por (1, –2) en $t = 2$ s para el flujo del:

(a) Problema 3.18a
(b) Problema 3.18b
(c) Problema 3.18c

3.20 Encuentre el campo del vector aceleración para un flujo de fluido que posee el siguiente campo de velocidad donde x, y y z están en metros. Evalúe la aceleración en (2, –1, 3) en $t = 2$ s.

(a) $\mathbf{V} = 20\,(1 - y^2)\hat{\mathbf{i}}$ m/s
(b) $\mathbf{V} = 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(c) $\mathbf{V} = x^2\,t\hat{\mathbf{i}} + 2xyt\hat{\mathbf{j}} + 2yzt\hat{\mathbf{k}}$ m/s
(d) $\mathbf{V} = x\hat{\mathbf{i}} - 2xyz\hat{\mathbf{j}} + tz\hat{\mathbf{k}}$ m/s

3.21 Encuentre el vector velocidad angular para los siguientes campos de flujo. Evalúe la velocidad angular en (2, –1, 3) en $t = 2$ s.

(a) Problema 3.20a
(b) Problema 3.20b
(c) Problema 3.20c
(d) Problema 3.20d

3.22 Encuentre el vector vorticidad para los siguientes campos de flujo. Evalúe la vorticidad en (2, –1, 3) en $t = 2$ s. En el

(a) Problema 3.20a
(b) Problema 3.20b
(c) Problema 3.20c
(d) Problema 3.20d

3.23 Determine las componentes del tensor velocidad de deformación para el campo de velocidad de lo siguiente en (2, –1, 3) en $t = 2$ s. En el

(a) Problema 3.20a
(b) Problema 3.20b
(c) Problema 3.20c
(d) Problema 3.20d

3.24 Las componentes de la velocidad, en m/s, en coordenadas cilíndricas están dadas por

$$v_r = \left(10 - \frac{40}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad v_\theta = -\left(10 + \frac{40}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

(a) Calcule la aceleración de una partícula de fluido que ocupa el punto (4 m, 180º).

(b) Calcule la componente de la vorticidad en (4 m, 180º).

3.25 Las componentes de la velocidad, en m/s, en coordenadas esféricas, están dadas por

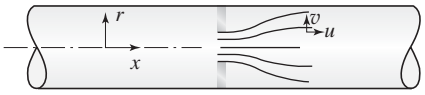
$$v_r = \left(10 - \frac{80}{r^3}\right)\cos\theta, \qquad v_\theta = -\left(10 + \frac{80}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta$$

(a) Calcule la aceleración de una partícula de fluido que ocupa el punto (4 m, 180º).

(b) Calcule la componente de la vorticidad en (4 m, 180º).

3.26 Se presenta un flujo no permanente entre placas paralelas tal que $u = u(y, \text{t})$, $v = 0$, y $w = 0$. Escriba una expresión para la aceleración. ¿Cuál es la aceleración si el flujo es permanente, es decir, $u = u(y)$, $v = 0$ y $w = 0$?

3.27 Considere un flujo permanente simétrico en un tubo con las componentes de velocidad axiales y radiales designadas $u(r,x)$ y $v(r,x)$, respectivamente. Escriba las ecuaciones para las dos componentes de la aceleración a_r y a_x. Use ecuaciones de la tabla 3.1. Vea las coordenadas en la figura. P3.27.



(a)

Fig. P3.27

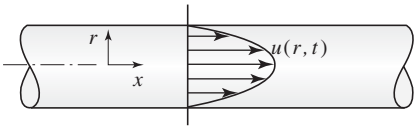
3.28 La velocidad en el tubo de 2 cm de diámetro de la figura P3.28 tiene sólo una componente de la velocidad diferente de cero dada por $u(r, t) = 2(1 - r^2/r_0^2)\,(1 - e^{-t/10})$ m/s, donde r_0 es el radio del tubo y t está en segundos. Calcule la máxima velocidad y la máxima aceleración:

(a) A lo largo de la línea centro del tubo

(b) A lo largo de una línea de corriente en $r = 0.5$ cm

(c) A lo largo de una línea de corriente precisamente junto a la pared del tubo

Sugerencia: Sea $v_z = u(r,t)$, $v_r = 0$ y $v_0 = 0$ en las ecuaciones apropiadas de la tabla 3.1.



(a)

Fig. P3.28

3.29 La temperatura cambia periódicamente en un flujo de acuerdo con $T(y, t) = 20\,(1 - y^2)\cos \pi t/100$ °C. Si la velocidad está dada por $u = 2(1 - y^2)$ m/s, determine la rapidez de cambio de la temperatura de una partícula de fluido ubicada en $y = 0$ si $t = 20$ s.

3.30 La densidad del aire en la atmósfera varía de acuerdo con $\rho(z) = 1.23e^{-10^{-4}z}$ kg/m^3. El aire que sopla sobre la montaña de la figura P3.30 tiene un vector velocidad $\mathbf{V} = 20\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ m/s en un lugar de interés donde $z =$ 3000 m. Encuentre la rapidez con la que la densidad de la partícula está cambiando en ese lugar.

Fig. P3.30

3.31 La variación de densidad con la elevación está dada por $\rho(z) = 1000\,(1 - z/4)$ kg/m^3. En un lugar donde $\mathbf{V} = 10\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ m/s, encuentre $D\rho/Dt$.

3.32 Se agrega lentamente sal al agua que circula por un tubo de modo que $\partial\rho/\partial x = 0.01$ kg/m^4. Determine $D\rho/Dt$ si la velocidad es uniforme a 4 m/s.

3.33 Exprese la derivada sustancial en términos del gradiente $\boldsymbol{\nabla}$ y del vector velocidad $\mathbf{V}$. Recuerde del cálculo diferencial que, en coordenadas rectangulares,

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

3.34 Podemos escribir las ecuaciones 3.2.9 en una forma vectorial simplificada. El gradiente es un operador vectorial expresado en coordenadas rectangulares como $\boldsymbol{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$.

Escriba el producto punto del vector velocidad $\boldsymbol{\nabla}$ y el gradiente **a** y, a continuación, escriba las ecuaciones 3.2.9 como una ecuación vectorial que exprese la aceleración **a** como la suma de la aceleración local y la aceleración convectiva.

3.35 Para el flujo que se muestra en la figura P3.35, respecto a un marco de referencia fijo, encuentre la aceleración de una partícula de fluido en:

(a) El punto A

(b) El punto B

El agua en B forma un ángulo de 30º con respecto al suelo y el brazo del aspersor es horizontal.

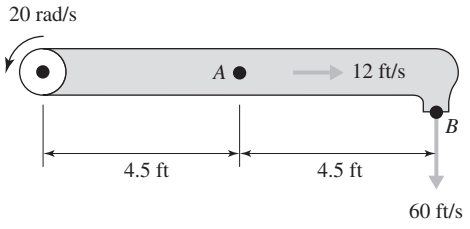


Fig. P3.35

3.36 Un río fluye en dirección sur a 5 m/s a una latitud de 45º. Calcule la aceleración de una partícula que flota en el río respecto a un marco de referencia fijo. El radio de la Tierra es de 6 400 km.

Clasificación de flujos de fluido

3.37 Considere cada uno de los siguientes flujos e indique si podrían considerarse como flujo unidimensional, bidimensional, tridimensional o uniforme:
- **(a)** Flujo de un tubo vertical que choca contra una pared horizontal
- **(b)** Flujo en las olas del océano cerca de una playa
- **(c)** Flujo cerca de la entrada de un tubo
- **(d)** Flujo alrededor de un cohete con nariz roma
- **(e)** Flujo alrededor de un automóvil
- **(f)** Flujo en un canal de irrigación
- **(g)** Flujo a través de una arteria
- **(h)** Flujo a través de una vena

3.38 ¿Cuál de los flujos del problema 3.37 podría suponerse que es un flujo permanente? ¿Cuál debe modelarse como flujo no permanente?

3.39 ¿Cuál flujo del problema 3.37 podría modelarse mejor como un flujo plano?

3.40 Seleccione los flujos del problema 3.37 que poseerían un punto de estancamiento. Trace cada uno de los flujos seleccionados indicando la ubicación del punto de estancamiento.

3.41 ¿Cuál de los flujos del problema 3.37 podría modelarse como flujo desarrollado?

3.42 Diga si cada uno de los flujos del problema 3.37 podría ser considerado como principalmente un flujo inviscido o un flujo viscoso.

3.43 Seleccione los flujos del problema 3.37 que son flujos externos. ¿Poseen un punto de estancamiento cada uno de los flujos externos ?

3.44 Trace el flujo alrededor de una hoja de rasurar posicionada paralela al flujo mostrando las capas límite.

3.45 El agua a 32 ºC que sale de la llave de 1.5 cm de diámetro de la figura P3.45 tiene una velocidad promedio de 2 m/s. ¿Esperaría usted que el flujo sea laminar o turbulento?

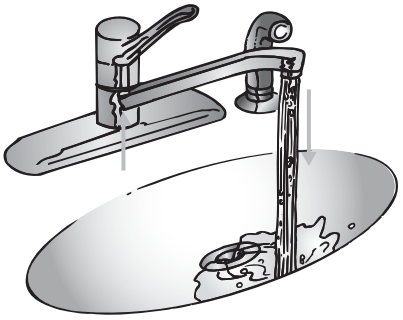


Fig. P3.45

3.46 El río Red Cedar se mueve plácidamente a través del campus de la Michigan State University. En una cierta sección, la profundidad es de 2.5 ft y la velocidad promedio es de 0.6 fps. ¿El flujo es laminar o turbulento?

3.47 Aire a 40 ºC circula por un conducto rectangular de calefacción de 30 cm × 6 cm a una velocidad promedio de 4 m/s. ¿El flujo es laminar o turbulento?

3.48 La esfera de diámetro D de la figura P3.48 está moviéndose con una velocidad V de 1.2 m/s en aire atmosférico a 20 ºC. Si $\mathrm{Re} = VD/v$ es menor que 4×10^4, la capa límite alrededor del frente de la esfera es completamente laminar. Determine si la capa límite es completamente laminar en una esfera de diámetro:
(a) 1 cm **(b)** 1 m

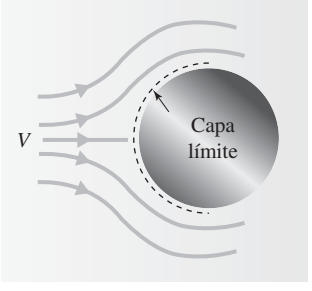


Fig. P3.48

3.49 La superficie aerodinámica de un avión comercial puede aproximarse como la placa plana que se ve en la figura P3.49. ¿Cuán larga esperaría que sea la parte laminar de la placa límite si está volando a

(a) una altitud de 10 000 m y a una velocidad de 900 km/h?

(b) una altitud de 30 000 ft y a una velocidad de 600 mph?

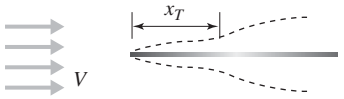


Fig. P3.49

3.50 Una hoja se conserva fresca por traspiración, proceso en el que fluye agua de la hoja a la atmósfera. Un investigador se pregunta si la capa límite de una hoja influye en la traspiración, de modo que una hoja "experimental" se coloca en el laboratorio y se sopla aire paralelamente a ella a 6 m/s. Comente en cuanto a si se espera que la capa límite sea laminar o turbulenta.

3.51 Para las siguientes situaciones, indique si se requiere un flujo compresible o si el flujo puede aproximarse con un flujo incompresible:

(a) Un avión vuela a 100 m/s a una elevación de 8000 m

(b) Una pelota de golf desplazándose a 240 ft/s

(c) Un flujo alrededor de un objeto en estudio en un túnel de viento de alta temperatura, si la temperatura es 100 ºC y la velocidad del aire es 100 m/s.

3.52 Escriba la ecuación 3.3.2 usando la ecuación 3.2.11. Para un flujo permanente, plano, ¿qué relación debe existir para un flujo incompresible en el que se permite que varíe la densidad?

3.53 Si $\rho = \rho_0(1 + cz)$ modela la variación de la densidad en un canal (hay agua salada pesada en el fondo y agua dulce en la parte superior) en donde $u(y, z)$ es la única componente de la velocidad, ¿el flujo es incompresible?

Ecuación de Bernoulli

3.54 Se utiliza un tubo Pitot para medir la velocidad de un pequeño avión que vuela a 3000 ft. Calcule su velocidad si el tubo Pitot mide:

(a) 0.3 psi **(b)** 0.9 psi **(c)** 0.09 psi

3.55 Aproxime la fuerza que actúa sobre el faro delantero de 15 cm de diámetro que se muestra en la figura P3.55 de un automóvil que viaja a 120 kph.

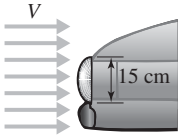


Fig. P3.55

3.56 Una aspiradora es capaz de crear un vacío de 2 kPa justo dentro de la manguera de la figura P3.56. ¿Cuál es la velocidad promedio máxima que se esperaría en la manguera?

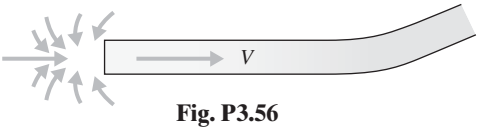


Fig. P3.56

3.57 El flujo inviscido e incompresible, en la cercanía de un punto de estancamiento (figura P3.57) es aproximado por $u = -10x$, $v = 10y$. Si la presión en el origen es p_0, encuentre una expresión para la presión ignorando los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje x negativo

(b) A lo largo del eje y positivo

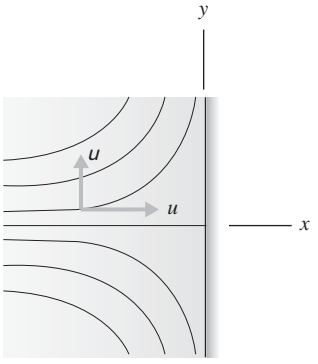


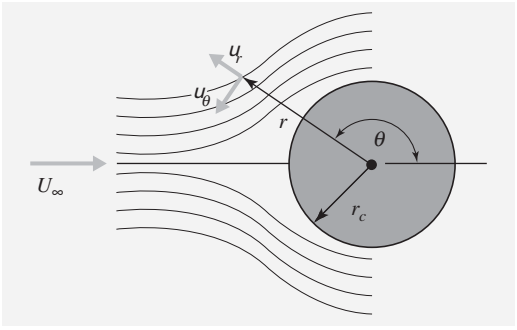
Fig. P3.57

3.58 El campo de flujo inviscido e incompresible exterior al cilindro mostrado en la figura P3.58 está dado por

$$v_r = U_\infty\left(1 - \frac{r_c^2}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad v_\theta = U_\infty\left(1 + \frac{r_c^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

Si la presión en $r = \infty$ es cero (es decir, $p_\infty = 0$), encuentre una expresión para la presión ignorando los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje x negativo
(b) En el punto de estancamiento
(c) En la superficie del cilindro
(d) En la superficie del cilindro en $\theta = 90°$



P3.58

3.59 El campo de flujo inviscido e incompresible exterior a una esfera (vea la figura P3.58) está dado por

$$v_r = U_\infty\left(1 - \frac{r_c^3}{r^3}\right)\cos\theta, \quad v_\theta = U_\infty\left(1 + \frac{r_c^3}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta$$

Si la presión en $r = \infty$ es cero, encuentre una expresión para la presión ignorando los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje x negativo
(b) En el punto de estancamiento
(c) En la superficie de la esfera
(d) En la superficie de la esfera en $\theta = 90°$

3.60 La velocidad a lo largo del eje x negativo en el campo de flujo inviscido e incompresible, exterior al cuerpo mostrado en la figura P3.60 está dada por $u(x) = U_\infty + q/2\pi x$. Si la presión en $x = -\infty$ es cero, encuentre una expresión para la presión ignorando los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje x negativo si $U_\infty = 10$ m/s y $q = 20\pi$ m^2/s
(b) En el punto de estancamiento si $U_\infty = 10$ m/s y $q = 20\pi$ m^2/s
(c) A lo largo del eje x negativo si $U_\infty = 30$ ft/s y $q = 60\pi$ ft^2/s
(d) En el punto de estancamiento si $U_\infty = 30$ ft/s y $q = 60\pi$ ft^2/s

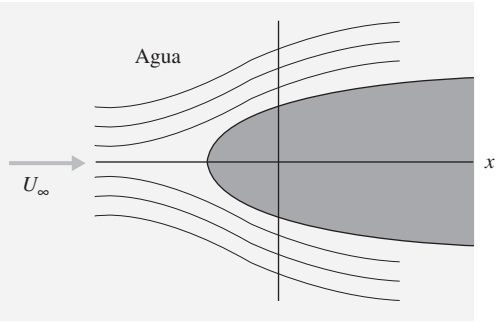


Fig. P3.60

3.61 Se supone que el flujo incompresible de agua que pasa por la contracción corta de la figura 3.19a es inviscido. Si se mide una caída de presión de 20 kPa, calcule la velocidad en la pared en la sección 2 justo corriente abajo de la contracción. (En realidad, se desarrollaría una capa límite y la velocidad calculada en la pared sería la velocidad en el borde de la capa límite; vea la intercalación de la figura 3.10.)

3.62 Sale aire de un pleno relativamente grande en un horno a un conducto rectangular relativamente pequeño. Si la presión en el pleno mide 60 Pa y en el conducto es de 10.2 Pa, calcule la velocidad del aire a 40 °C en el conducto.

3.63 Una corta contracción es seguida por una expansión, como se muestra en la figura P3.63. El manómetro se utiliza para determinar la velocidad del fluido siempre que sean insignificantes los efectos viscosos. Si el agua está fluyendo en forma permanente, determine la velocidad V_1 si $H = 12$ cm. Las pérdidas a través de la contracción son insignificantes.

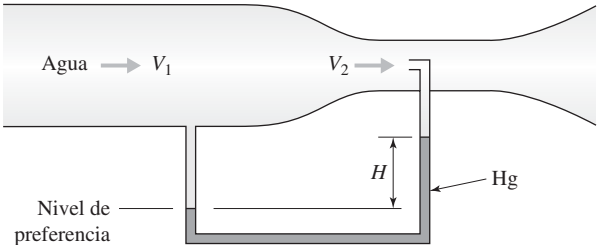


Fig. P3.63

3.64 ¿Cuál es la velocidad del agua en el tubo si el manómetro mostrado en la figura P3.64 lee:

(a) 4 cm?

(b) 10 cm?

(c) 2 in?

(d) 4 in?

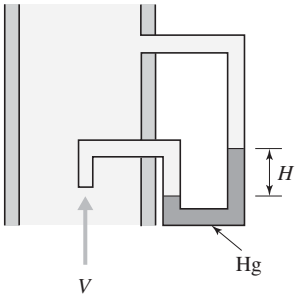


Fig. P3.64

3.65 Aire a 120 kPa absoluta y a 30 ºC fluye verticalmente hacia arriba en un tubo, como se muestra en la figura P3.65. Si la deflexión del manómetro de agua es H = 5 cm, determine la velocidad en el tubo más pequeño. Suponga que el aire es incompresible.

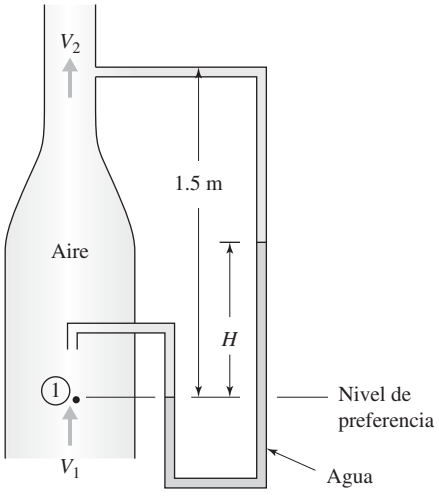


Fig. P3.65

3.66 Un manómetro, posicionado dentro de un cilindro como se muestra en la figura P3.66, indica 4 cm de agua. Calcule U_∞ suponiendo un flujo inviscido. Consulte el campo de velocidad del problema 3.58.

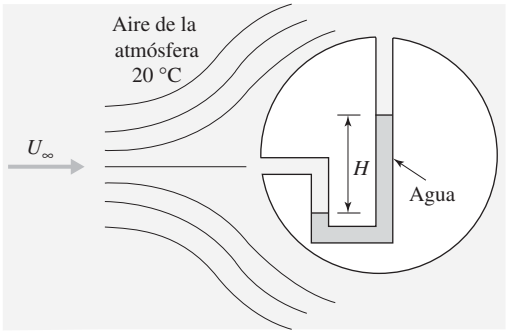


Fig. P3.66

3.67 Un manómetro, posicionado como se muestra en la figura P3.66 dentro de una esfera, indica 4 cm de agua. Calcule U_∞ suponiendo un flujo inviscido. Consulte el campo de velocidad del problema 3.59.

3.68 Para el flujo mostrado en la figura P3.68, calcule la presión p_1 y la velocidad V_1 si V_2 = 20 m/s y:

(a) H = 1 cm

(b) H = 5 cm

(c) H = 10 cm

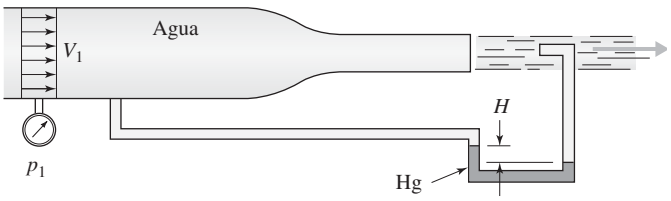


Fig. P3.68

3.69 Agua a 15 ºC fluye permanentemente por la contracción que se muestra en la figura P3.69 tal que $V_2 = 4V_1$. Si la lectura del manómetro es 120 kPa, determine la velocidad máxima V_1 posible antes que ocurra cavitación.

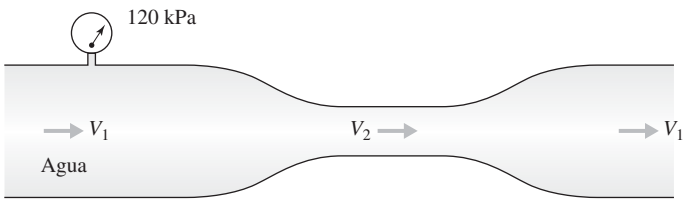


Fig. P3.69

3.70 En la contracción del tubo que se muestra en la figura P3.70, fluye agua permanentemente con una velocidad de $V_1 = 0.5$ m/s y de $V_2 = 1.125$ m/s. Dos tubos piezométricos están conectados al tubo en las secciones 1 y 2. Determine la altura H. Desprecie cualesquiera pérdidas a través de la contracción.

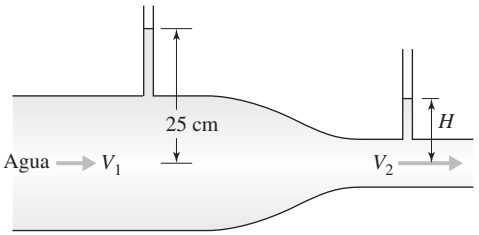


Fig. P3.70

3.71 Se aspira aire a 20 ºC hacia la manguera de una aspiradora por medio de una cabezal que está relativamente libre de obstrucciones (puede suponerse que el flujo es inviscido). Calcule la velocidad en la manguera si el vacío en la manguera mide:

(a) 2 cm de agua
(b) 8 cm de agua
(c) 1 in de agua
(d) 4 in de agua

3.72 Un túnel de viento está diseñado para aspirar aire de la atmósfera y producir una velocidad de 100 m/s en la sección de prueba. El ventilador está ubicado corriente abajo de la sección de prueba. ¿Qué presión ha de esperarse en la sección de prueba si la temperatura atmosférica y la presión son:

(a) −20 °C, 90 kPa? **(b)** 0 °C, 95 kPa?
(c) 20 °C, 92 kPa? **(d)** 40 °C, 100 kPa?

3.73 La bomba que se muestra en la figura P3.73 crea un flujo tal que V = 14 m/s. Prediga la presión en el manómetro mostrado suponiendo un flujo inviscido en la entrada y un flujo uniforme en el manómetro. Use una línea de corriente que inicie en:

(a) El punto A **(b)** El punto B

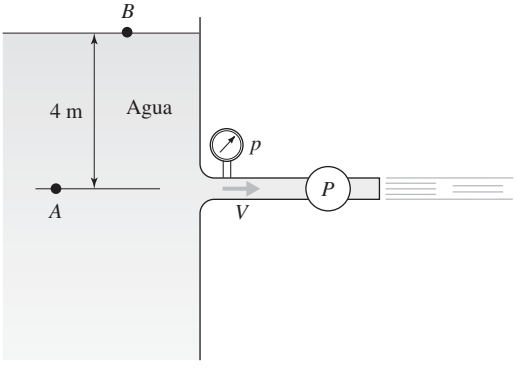


Fig. P3.73

3.74 Un bombero reduce el área de salida en una boquilla para que la velocidad dentro de la manguera sea muy pequeña con respecto a la velocidad de salida. ¿Cuál es la velocidad máxima de salida y cuál es la máxima altura a la que puede llegar el agua si la presión dentro de la manguera es:

(a) 700 kPa? **(b)** 1400 kPa?
(c) 100 psi? **(d)** 200 psi?

3.75 Se supone que la velocidad corriente abajo de una compuerta de desagüe es uniforme (figura P3.75). Exprese V en términos de H y h para este flujo inviscido. Use una línea de corriente:

(a) A lo largo de la corriente aguas abajo en la parte superior
(b) A lo largo de la corriente aguas abajo en el fondo

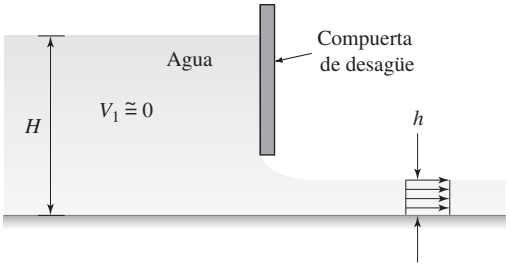


Fig. P3.75

3.76 ¿A qué velocidad máxima puede ser acelerada el agua antes de llegar a los álabes de la turbina de una hidroturbina, si entra con una velocidad relativamente baja a:

(a) 600 kPa? **(b)** 300 kPa?
(c) 80 psi? **(d)** 40 psi?

3.77 En un lugar en particular en un sistema de suministro de agua de una ciudad, sale agua a una presión de 500 kPa. La tubería de agua debe pasar por una colina. ¿Qué tan alta podría ser la colina, arriba de ese lugar, para que el sistema tenga posibilidad de suministrar agua al otro lado de la colina?

3.78 Entre los discos radiales de la figura P3.78, fluye un fluido. Calcule la presión en el tubo de 2 cm de diámetro si el fluido sale a la atmósfera. Desprecie los efectos viscosos. El fluido es:

(a) Agua **(b)** Benceno
(c) Gasolina **(d)** Aire

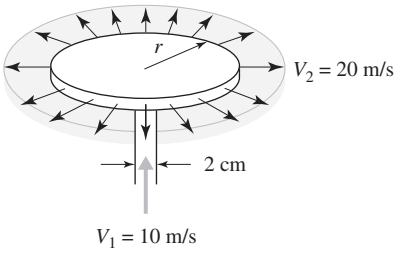


Fig. P3.78

3.79 Calcule la presión en $r = 10$ cm si la velocidad allí es de 30 m/s en el problema 3.78d.

3.80 Se propone que aire introducido por un tubo conectado a un disco metálico se utilice para recoger sobres, como se muestra en la figura P3.80. ¿Esta instalación en realidad levantaría un sobre? Explique. Suponga un flujo inviscido con el aire reduciendo su velocidad a medida que se mueve radialmente hacia afuera.

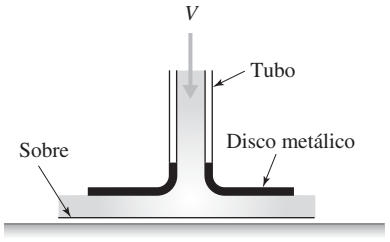


Fig. P3.80

3.81 ¿De cuál de los siguientes objetos esperaría usted que el flujo se separe y forme una región sustancial separada?

(a) Una pelota de golf
(b) Un alambre de teléfono
(c) El aspa de un molino de viento
(d) Un alambre de 2 mm de diámetro en un túnel de viento de baja velocidad
(e) Un automóvil
(f) Un avión

(*Nota:* Ocurre separación siempre que el número de Reynolds exceda un valor de alrededor de 20 sobre un objeto romo).

3.82 Explique, con el uso de un bosquejo, por qué una rebaba en el lado corriente abajo de una abertura para un piezómetro en un tubo (vea la figura 3.18a) resultará en una lectura de la presión demasiado alta.

3.83 Un flujo incompresible e inviscido, de agua entra a un codo con una velocidad uniforme de $V_1 = 10$ m/s (figura P3.83). Calcule la diferencia de presión entre los puntos A y B si el radio promedio de curvatura en el codo es de 5 cm. Trace un bosquejo de un perfil de velocidad anticipado a lo largo de AB. Suponga que $p_A < p_1$ y $p_B > p_1$.

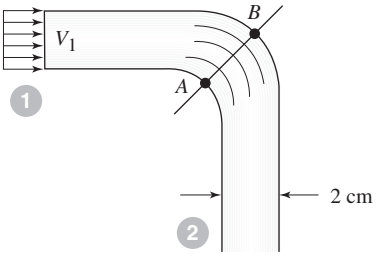


Fig. P3.83

3.84 La viscosidad hace que un fluido se pegue a una superficie. Si el fluido del problema 3.83 se adhiere a la superficie, explique por qué, en un fluido viscoso, un flujo secundario es causado por el codo. Trace el bosquejo de ese flujo en una sección transversal circular en la sección 2.

3.85 En la figura P3.85, suponiendo un flujo inviscido, inserte uno de estos signos entre las presiones: $>, <, \cong$.

p_A $\quad$ p_B
p_C $\quad$ p_D
p_B $\quad$ p_D

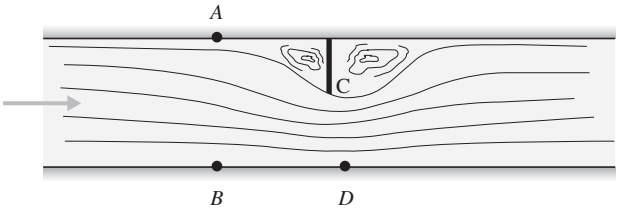


Fig. P3.85

Competencia universitaria de remo en el río Schuylkill, Filadelfia, Pennsylvania. Con cada remada, el trabajo realizado por la tripulación se transfiere al casco para vencer las fuerzas de arrastre. (John Kropewnicki/Shutterstock)

4

Formas integrales de las leyes fundamentales

Esquema

4.1 Introducción
4.2 Las tres leyes básicas
4.3 Transformación de un sistema a un volumen de control
  4.3.1 Simplificaciones del teorema de transporte de Reynolds
4.4 Conservación de la masa
4.5 Ecuación de la energía
  4.5.1 Término de la rapidez de realización de trabajo
  4.5.2 Ecuación general de la energía
  4.5.3 Flujo permanente uniforme
  4.5.4 Flujo permanente no uniforme
4.6 Ecuación de la cantidad de movimiento
  4.6.1 Ecuación general de la cantidad de movimiento
  4.6.2 Flujo permanente uniforme
  4.6.3 Ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a deflectores
  4.6.4 Ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a hélices
  4.6.5 Flujo permanente no uniforme
  4.6.6 Marcos de referencia no inerciales
4.7 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento
4.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Deducir una ecuación que nos permita convertir las tres leyes básicas formuladas para un sistema en una forma que sea aplicable a un volumen de control.
- Aplicar la conservación de la masa en volúmenes de control de interés.
- Analizar el término de la rapidez de realización de trabajo de la ecuación de la energía.
- Aplicar la ecuación de la energía a numerosas situaciones de ingeniería.
- Aplicar la segunda ley de Newton a volúmenes de control de interés.

- Aplicar la ecuación del momento de la cantidad de movimiento a dispositivos giratorios.
- Presentar numerosos ejemplos de las leyes básicas aplicadas a volúmenes de control, para que los estudiantes puedan resolver correctamente problemas de flujo de fluido que comprendan muchos de los volúmenes de control de interés para ingenieros.
- Expresar las leyes básicas en su forma más general de volumen de control, para que los complejos problemas que se encuentren en aplicaciones de ingeniería puedan ser correctamente analizados y, esperamos, resueltos.

4.1 INTRODUCCIÓN

CONCEPTO CLAVE *Para determinar una cantidad integral debe conocerse el integrando, o debe disponerse de información para hacer una buena aproximación del mismo.*

Es frecuente que las cantidades de interés para los ingenieros puedan expresarse en términos de integrales. Por ejemplo, el gasto es la integral de la velocidad sobre un área; la transferencia de calor es la integral del flujo de calor sobre un área; la fuerza es la integral de un esfuerzo sobre un área; la masa es la integral de la densidad sobre un volumen; y la energía cinética es la integral de $V^2/2$ sobre cada uno de los elementos de masa en un volumen. Hay, por supuesto, muchas otras cantidades integrales. Para determinar una cantidad integral debe conocerse el integrando, o debe haber información para que pueda hacerse una buena aproximación de éste. Si no se conoce el integrando o no puede aproximarse con cualquier grado de certidumbre, deben resolverse ecuaciones diferenciales apropiadas (vea el capítulo 5) que den el integrando necesario; la integración se ejecuta entonces dando así al ingeniero la cantidad integral deseada.

En este capítulo presentamos las cantidades integrales de interés, desarrollamos ecuaciones que relacionan las cantidades integrales y resolvemos diversos problemas para los que se dan integrandos o se pueden aproximar. Esto incluye una variedad sorprendentemente grande de problemas. Hay, no obstante, muchas cantidades integrales que no pueden determinarse porque los integrandos son desconocidos. Éstas incluirían sustentación y resistencia al avance en superficies aerodinámicas, el par de torsión en los álabes de una máquina de viento, y la energía cinética en la estela de un submarino. Para determinar estos integrandos, sería necesario resolver las ecuaciones diferenciales apropiadas, trabajo que con frecuencia es muy difícil; en capítulos subsiguientes se consideran algunas geometrías de flujo relativamente sencillas.

Además, hay muchas cantidades de interés que no son de naturaleza integral. Entre ellas estarían el punto de separación del flujo alrededor de un cuerpo, la concentración de un contaminante en un arroyo en cierto lugar, la distribución de la presión en la cara de un edificio, la interacción entre una ola y la orilla a lo largo de un lago. Para estudiar temas como éstos, es necesario considerar las ecuaciones diferenciales que describen el flujo. La mayoría de los temas mencionados son relegados a cursos de posgrado especializados, sin embargo, se incluyen en este libro algunos temas que requieren la solución de las ecuaciones diferenciales que se resuelven con más facilidad.

4.2 LAS TRES LEYES BÁSICAS

Sistema: *Conjunto fijo de partículas de un material.*

Las cantidades integrales de interés principal en la mecánica de fluidos están contenidas en las tres leyes básicas: conservación de la masa, primera ley de la termodinámica y la segunda ley de Newton. Estas leyes básicas se expresan usando una descripción lagrangiana en términos de un **sistema**, un conjunto fijo de partículas de un material. Por ejemplo, si consideramos el flujo a través de un tubo, podríamos identificar una cantidad fija de fluido en el instante t como el sistema (figura 4.1);

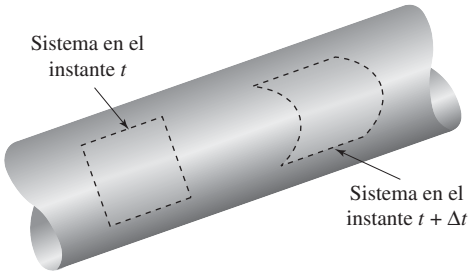


Fig. 4.1 Ejemplo de un sistema en mecánica de fluidos.

este sistema se movería entonces debido a la velocidad a una ubicación corriente abajo en el instante $t + \Delta t$. Cualquiera de las tres leyes básicas podría aplicarse a este sistema aun cuando esto no es fácil. Expresemos primero las leyes básicas en su forma general.

Conservación de la masa: La ley que expresa que la masa debe conservarse es:

> La masa de un sistema permanece constante.

La masa de una partícula de fluido es $\rho\, d\mathcal{V}$, donde $d\mathcal{V}$ es el volumen ocupado por la partícula y ρ es su densidad. Sabiendo que la densidad puede cambiar de un punto a otro en el sistema, la conservación de la masa puede expresarse en forma integral como

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho\, d\mathcal{V} = 0 \tag{4.2.1}$$

donde D/Dt se usa porque estamos siguiendo un grupo específico de partículas de un material, un sistema.

Primera ley de la termodinámica: La ley que relaciona la transferencia de calor, el trabajo y el cambio de energía es la primera ley de la termodinámica y establece que

> La razón de transferencia de calor a un sistema menos la rapidez a la que el sistema realiza trabajo es igual a la rapidez a la que la energía del sistema está cambiando.

Reconociendo que la densidad y la energía específica pueden cambiar de un punto a otro en el sistema, puede expresarse como

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} e\rho\, d\mathcal{V} \tag{4.2.2}$$

Energía específica: *Constituye la energía cinética, la energía potencial y la energía interna por unidad de masa.*

donde la **energía específica** e constituye la energía cinética, la energía potencial y la energía interna por unidad de masa. Otras formas de energía —química, eléctrica, nuclear— no están incluidas en un curso introductorio de mecánica de fluidos. La ecuación 4.2.2 se conoce con frecuencia como la ecuación de energía.

En la forma básica expresada aquí, la primera ley de la termodinámica se aplica sólo a un sistema, un conjunto de partículas de fluido; por lo tanto, se utiliza D/Dt. Estudiamos $\dot{Q}$ y $\dot{W}$ en la sección 4.5, donde consideramos en detalle la ecuación de la energía.

Segunda ley de Newton: La segunda ley de Newton, también conocida como ecuación de la cantidad de movimiento, establece que:

> La fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez a la que está cambiando la cantidad de movimiento del sistema.

La cantidad de movimiento de una partícula de fluido con masa es una cantidad vectorial dada por $\mathbf{V}\rho\, d\forall$; en consecuencia, la segunda ley de Newton puede expresarse en un marco de referencia inercial como

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sist}} \mathbf{V}\rho\, d\forall \tag{4.2.3}$$

reconociendo que tanto la densidad como la velocidad pueden cambiar de un punto a otro en el sistema. Esta ecuación se reduce a $\Sigma\, \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sí $\mathbf{V}$ y ρ son constantes en tod o el sistema; ρ es con frecuencia una constante, pero en mecánica de fluidos el vector velocidad invariablemente cambia de un punto a otro. De nuevo, se usa D/Dt para dar la rapidez de cambio porque la segunda ley de Newton se aplica a un sistema.

Ecuación del momento de la cantidad de movimiento: La ecuación del momento de la cantidad de movimiento se origina de la segunda ley de Newton; establece que:

> El momento resultante que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema.

En forma de ecuación esto se convierte, respecto a un marco de referencia inercial,

$$\Sigma\, \mathbf{M} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sist}} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\rho\, d\forall \tag{4.2.4}$$

donde $\mathbf{r} \times \mathbf{V}\rho\, d\forall$ representa la cantidad de movimiento angular de una partícula de fluido con masa $\rho\, d\forall$. El vector $\mathbf{r}$ ubica el elemento de volumen $d\forall$ y se mide desde el origen de los ejes coordenados, el punto respecto al cual se mide el momento resultante.

Nótese que en cada una de las leyes básicas la cantidad integral es una propiedad extensiva del sistema (vea sección 1.7). Usaremos el símbolo N_{sist} para denotar esta propiedad extensiva; por ejemplo, N_{sist} podría representar la masa, la cantidad de movimiento, o la energía del sistema. El lado izquierdo de la ecuación 4.2.1 y los lados derechos de las ecuaciones 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 todos pueden expresarse como

CONCEPTO CLAVE *En cada una de las leyes básicas, la cantidad integral es una propiedad extensiva del sistema.*

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} \tag{4.2.5}$$

donde N_{sist} representa una cantidad integral, ya sea una cantidad escalar o una cantidad vectorial.

También es útil para introducir la variable η para la propiedad intensiva, la propiedad del sistema por masa unitaria. La relación entre N_{sist} y η está dada por

$$N_{\text{sist}} = \int_{\text{sist}} \eta\rho \, d\mathcal{V} \tag{4.2.6}$$

Como ejemplo, la propiedad extensiva de la segunda ley de Newton es la cantidad de movimiento

$$\textbf{cantidad de movimiento}_{\text{sistema}} = \int_{\text{sist}} \mathbf{V}\,\rho \, d\mathcal{V} \tag{4.2.7}$$

que es una cantidad vectorial. La correspondiente propiedad intensiva sería el vector velocidad **V**. Nótese que la densidad y la velocidad, que pueden variar de un punto a otro dentro del sistema, también pueden ser funciones del tiempo, como en un flujo no permanente.

Nuestro interés se concentra con más frecuencia en un dispositivo, o una región del espacio en la que entra y/o sale fluido; identificamos esta región como **volumen de control**. Un ejemplo de un volumen de control fijo se ilustra en la figura 4.2a. No es necesario que el control de volumen sea fijo; podría deformarse como en un ensamble de un pistón y un cilindro durante el tiempo de escape o en un globo cuando se desinfla. No obstante, en este libro consideraremos sólo volúmenes de control fijos, lo cual no nos limitará en la mayoría de las situaciones.

Volumen de control: *Región del espacio en la que entra y/o sale fluido.*

La diferencia entre un volumen de control y un sistema se ilustra en la figura 4.2b. La figura indica que el sistema ocupa el volumen de control en el instante t y se ha salido parcialmente del mismo en el instante $t + \Delta t$. Como a menudo es más cómodo concentrarnos en un volumen de control (por ejemplo, una bomba) en lugar de todo un sistema, lo primero es hallar una transformación que nos permita expre-

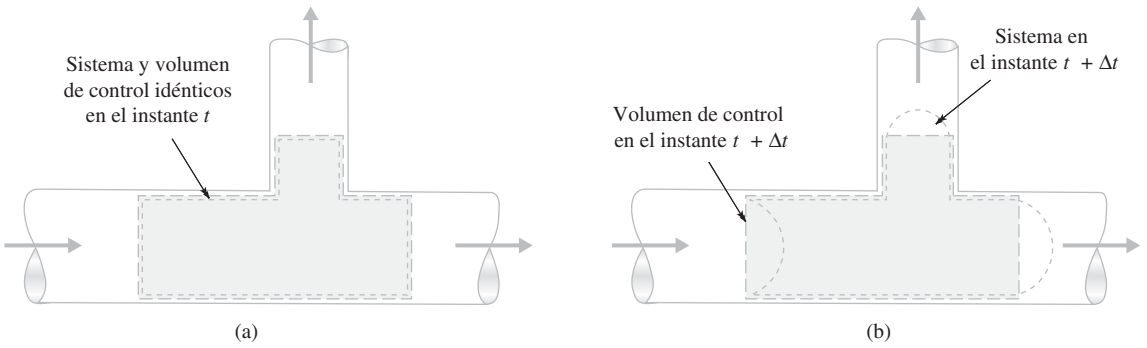


Fig. 4.2 Ejemplo de volumen de control fijo y un sistema: (a) instante t; (b) instante $t + \Delta t$.

sar la derivada sustancial de un sistema (una descripción lagrangiana), en términos de cantidades asociadas con un volumen de control (una descripción euleriana), de modo que las leyes básicas se puedan aplicar directamente a un volumen de control. Esto se hará en general y a continuación se aplicará a las leyes específicas.

4.3 TRANSFORMACIÓN DE UN SISTEMA A UN VOLUMEN DE CONTROL

Estamos interesados en la rapidez de cambio de la propiedad extensiva N_{sist} ya que seguimos el sistema, es decir, DN_{sist}/Dt, y nos gustaría expresar esto en términos de cantidades que atañen al volumen de control. En esta sección presentamos la deducción de esa transformación.

La deducción comprende flujos de la propiedad extensiva que entran y salen del volumen de control. Un flujo es una medida de la rapidez con la que una propiedad extensiva cruza un área; por ejemplo, un flujo másico es la rapidez con la que una masa cruza un área. Es útil introducir la notación vectorial para describir estos flujos. Considere un elemento de área dA de la **superficie de control**, el área de la superficie que encierra por completo un volumen de control. El flujo de propiedad a través de un área elemental dA (vea la figura 4.3) puede ser expresado por

Superficie de control: *Área de la superficie que encierra por completo el volumen de control.*

$$\text{flujo a trevés de } dA = \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA \tag{4.3.1}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$, vector unitario normal al elemento de área dA, siempre apunta hacia fuera del volumen de control, y η representa la propiedad intensiva asociada con N_{sist}. Observe que esta expresión da un valor negativo si se refiere a un flujo de entrada de propiedad. Sólo la componente normal $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ del vector velocidad contribuye a este término de flujo. Si no hay componente normal de la velocidad en un área particular, tal como la pared de un tubo, no ocurre flujo a través de esa área. Un $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ positivo indica un flujo que sale del volumen; un $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ negativo, es decir, $\mathbf{V}$ tiene una componente en la dirección opuesta de $\hat{\mathbf{n}}$, indica un flujo que entra al volumen. Siempre debemos usar $\hat{\mathbf{n}}$ apuntando hacia fuera del volumen. El vector velocidad $\mathbf{V}$ puede estar a algún ángulo respecto al vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$; el

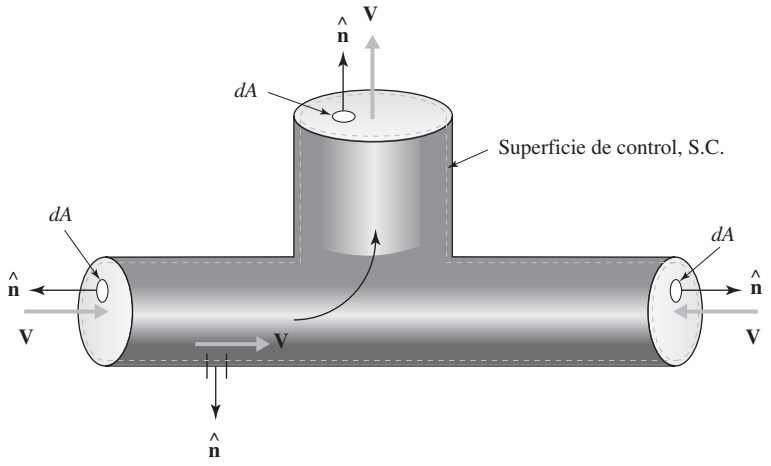


Fig. 4. Ilustración que muestra el flujo de una propiedad extensiva.

producto punto $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ representa la componente apropiada de $\mathbf{V}$ que produce un flujo que pasa por el área.

El flujo de propiedad neto que sale de la superficie de control se obtiene entonces al integrar sobre toda la superficie de control:

$$\text{flujo de propiedad neto} = \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA \tag{4.3.2}$$

Si el flujo neto es positivo, el flujo que sale es mayor que el que entra.

Regresemos ahora a la derivada DN_{sist}/Dt. La definición de una derivada del cálculo diferencial nos permite escribir

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_{\text{sist}}(t+\Delta t) - N_{\text{sist}}(t)}{\Delta t} \tag{4.3.3}$$

El sistema se muestra en la figura 4.4 en los instantes t y $t + \Delta t$. Suponga que el sistema ocupa todo el volumen de control en el instante t; si estuviéramos considerando un dispositivo, por ejemplo una bomba, las partículas del sistema apenas llenarían el dispositivo en el instante t. Como se supone que el dispositivo, el volumen de control que se muestra en la figura 4.4, está fijo en el espacio, el sistema se moverá a través del dispositivo. La ecuación 4.3.3 se puede escribir entonces

CONCEPTO CLAVE *El sistema ocupa todo el volumen de control en el instante t.*

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_3(t+\Delta t) + N_2(t+\Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t} \tag{4.3.4a}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_2(t+\Delta t) + N_1(t+\Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_3(t+\Delta t) - N_1(t+\Delta t)}{\Delta t} \tag{4.3.4b}$$

donde, en esta segunda expresión, simplemente hemos sumado y restado $N_1(t + \Delta t)$ en el numerador. En las ecuaciones previas, el subíndice numérico denota la región; por ejemplo, $N_2(t)$ significa la propiedad extensiva en la región 2 en el instante t. A continuación, observamos que el primer límite en el lado derecho de la ecuación 4.3.4b se refiere al volumen de control, de modo que podemos escribir

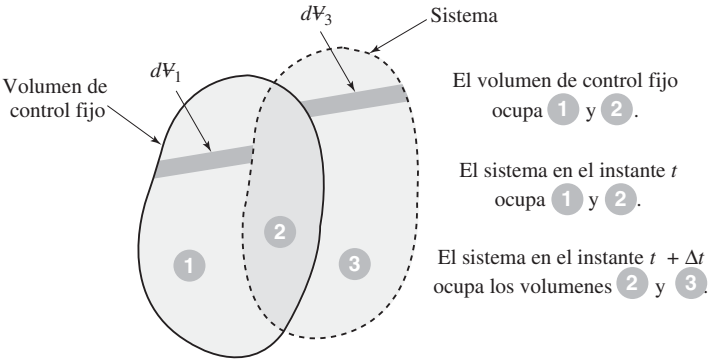


Fig. 4.4 Sistema y volumen de control fijo.

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{v.c.}}(t + \Delta t) - N_{\text{v.c.}}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{4.3.5}$$

La primera razón en el lado derecho es $dN_{\text{v.c.}}/dt$, donde usamos una derivada ordinaria dado que no estamos siguiendo partículas de fluido específicas. Entonces, resulta

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \frac{dN_{\text{v.c.}}}{dt} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{4.3.6}$$

CONCEPTO CLAVE *El vector unitario* $\hat{\mathbf{n}}$ *siempre apunta hacia fuera del volumen.*

Ahora, debemos hallar expresiones para las cantidades extensivas $N_3(t + \Delta t)$ y $N_1(t + \Delta t)$. Éstas, por supuesto, dependen de la masa contenida en los elementos de volumen $d\forall_1$ y $d\forall_3$, mostrados en la figura 4.4 y amplificados en la figura 4.5. Observe que el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ siempre apunta hacia fuera del volumen y, por tanto, para obtener un volumen diferencial positivo se requiere un signo negativo para la región 1. Del mismo modo, note que se requiere el coseno del ángulo entre el vector velocidad y el vector normal,[1] y por ello la presencia del producto punto. Con referencia a las figuras 4.4 y 4.5, tenemos

$$\begin{aligned} N_3(t + \Delta t) &= \int_{A_3} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,\Delta t\,dA_3 \\ N_1(t + \Delta t) &= -\int_{A_1} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,\Delta t\,dA_1 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Reconociendo que A_3 más A_1 rodea por completo al volumen de control, combinamos las dos integrales en una. Esto es,

$$N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t) = \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,\Delta t\,dA \tag{4.3.8}$$

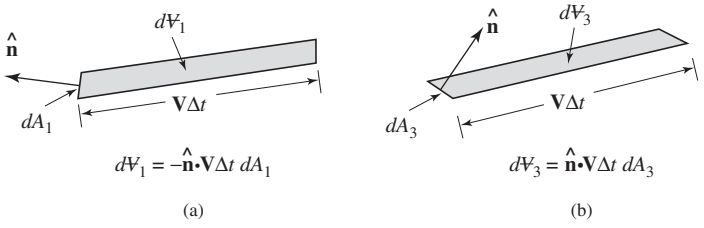


Fig. 4.5 Elementos de volúmenes diferenciales.

[1]Para obtener el volumen de una caja, multiplicamos la altura por el área de la base, siempre que la caja esté en posición vertical. Si se colapsó por completo, su volumen es cero. Por lo tanto, para alguna posición intermedia, el volumen es la altura multiplicada por el área de la base multiplicada por el coseno del ángulo apropiado.

donde la superficie de control, denotada por s.c., es el área que rodea por completo al volumen de control. Sustituyendo la ecuación 4.3.8 de nuevo en la ecuación 4.3.6 tendremos el resultado deseado, la transformación del sistema en volumen de control, o de manera equivalente, el **teorema de transporte de Reynolds**:

Teorema de transporte de Reynolds: *Transformación del sistema en volumen de control.*

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \eta\rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V} \, dA \tag{4.3.9}$$

Ésta es una transformación lagrangiana a euleriana de la rapidez de cambio de una cantidad integral extensiva.

La primera integral representa la rapidez de cambio de la propiedad extensiva en el volumen de control. La segunda integral representa el flujo de la propiedad extensiva a través de la superficie de control; es diferente de cero sólo donde el fluido cruza la superficie de control. Estudiamos este término de flujo en más detalle en las siguientes secciones. Así, podemos ahora expresar las leyes básicas en términos de un volumen fijo en el espacio. Haremos esto en secciones subsiguientes para cada una de las leyes básicas.

Podemos mover la derivada respecto al tiempo del término del volumen de control dentro de la integral puesto que, para un volumen de control fijo, los límites en la integral de volumen son independientes del tiempo; a continuación escribimos el teorema de transporte de Reynolds como

CONCEPTO CLAVE *La derivada con respecto al tiempo del término del volumen de control se puede poner dentro de la integral para un volumen de control fijo.*

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \int_{\text{v.c.}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) \, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V} \, dA \tag{4.3.10}$$

En esta forma hemos empleado $\partial/\partial t$ dado que ρ y η dependen, en general, de las variables de posición.

4.3.1 Simplificaciones del teorema de transporte de Reynolds

Muchos flujos de interés son flujos permanentes, de modo que $\partial(\eta\rho)/\partial t = 0$. Nuestra transformación de sistema a volumen de control entonces toma la forma

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V} \, dA \tag{4.3.11}$$

Además, con frecuencia sólo hay un área A_1 a través de la cual entra fluido al volumen de control y un área A_2 a través de la cual sale fluido del volumen de control; suponiendo que el vector velocidad sea normal al área (figura 4.6), podemos escribir $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}_1 = -V_1$ sobre el área A_1 y $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}_2 = V_2$ sobre el área A_2. Entonces la ecuación 4.3.11 se convierte en

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2\rho_2 V_2 \, dA - \int_{A_1} \eta_1\rho_1 V_1 \, dA \tag{4.3.12}$$

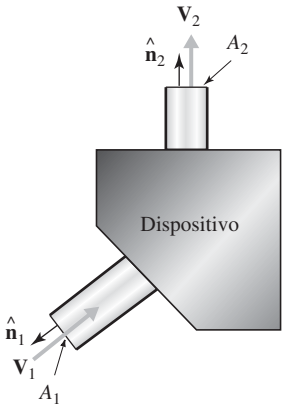


Fig. 4.6 Flujo que entra y sale de un dispositivo.

CONCEPTO CLAVE
Muchas situaciones se modelan suponiendo propiedades uniformes sobre las áreas de entrada y salida.

Por último, existen muchas situaciones que se modelan aceptablemente al suponer propiedades uniformes sobre cada una de las áreas planas (vea la figura 3.9); entonces la ecuación se simplifica en

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \eta_2\rho_2 V_2 A_2 - \eta_1\rho_1 V_1 A_1 \tag{4.3.13}$$

Encontraremos que la transformación de sistema en volumen de control, en esta forma simplificada, se usa en la aplicación de las leyes básicas a problemas de interés en un curso introductorio de mecánica de fluidos. No obstante, se incluirán algunas aplicaciones que ilustrarán distribuciones no uniformes y flujos no permanentes.

Si generalizamos la ecuación 4.3.13 para incluir varias áreas a través de las cuales fluye un fluido, podríamos escribir

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i\rho_i \mathbf{V}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i A_i \tag{4.3.14}$$

CONCEPTO CLAVE *Para un área de entrada, $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ introduce un signo negativo.*

donde N es el número de áreas. El producto punto $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ nos daría el signo apropiado en cada una de las áreas; para un área de entrada $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ introduce un signo negativo, y para un área de salida $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ introduce un signo positivo.

Para un flujo no permanente en el que se supone que las propiedades del flujo son uniformes en todo el volumen de control, la ecuación de sistema a volumen de control toma la forma

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \forall_{\text{v.c.}} \frac{d(\eta\rho)}{dt} + \eta_2\rho_2 V_2 A_2 - \eta_1\rho_1 V_1 A_1 \tag{4.3.15}$$

para una entrada y una salida con propiedades uniformes.

4.4 CONSERVACIÓN DE LA MASA

Un sistema es un conjunto determinado de partículas de fluido; de aquí que su masa permanezca fija. Esto se expresa como

$$\frac{Dm_{\text{sist}}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho \, d\mathcal{V} = 0 \tag{4.4.1}$$

En la ecuación 4.2.6, N_{sist} representa la masa del sistema, de modo que simplemente hacemos $\eta = 1$. Entonces la conservación de la masa, respecto a la ecuación 4.3.9, se convierte en

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V} \, dA \tag{4.4.2}$$

o bien, si se prefiere, toma la forma equivalente para un volumen de control fijo,

$$0 = \int_{\text{v.c.}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V} \, dA \tag{4.4.3}$$

Conservación de la masa, 881-883

Si el flujo es permanente, resulta (vea la ecuación 4.3.11)

$$\int_{\text{s.c.}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V} \, dA = 0 \tag{4.4.4}$$

que, para un flujo uniforme con una entrada y una salida, toma la forma (vea la ecuación 4.3.13)

$$\rho_2 A_2 V_2 = \rho_1 A_1 V_1 \tag{4.4.5}$$

donde para una entrada hemos empleado $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{V}_1 = -V_1$ y, para una salida, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_2 = V_2$. Recuerde que $\hat{\mathbf{n}}$ siempre apunta hacia fuera del volumen de control.

CONCEPTO CLAVE $\hat{\mathbf{n}}$
siempre apunta hacia fuera del volumen de control.

Si la densidad es constante en el volumen de control, la derivada $\partial\rho/\partial t = 0$ incluso si el flujo no es permanente; la ecuación de continuidad (4.4.3) se reduce entonces a

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \tag{4.4.6}$$

Esta forma de la ecuación de continuidad se usa con bastante frecuencia, en particular con líquidos y flujos de gas a baja velocidad.

En este punto deseamos explicar de nuevo el uso de perfiles de velocidad uniformes (vea también la sección 3.3.1). Suponga que los perfiles de velocidad en la

Fig. 4.7 Perfiles de velocidad no uniformes.

entrada y la salida no son uniformes, como se muestra en la figura 4.7. Además, suponga que la densidad es uniforme en cada una de las áreas. Entonces la ecuación de continuidad toma la forma

$$\rho_1 \int_{A_1} V_1 \, dA = \rho_2 \int_{A_2} V_2 \, dA \tag{4.4.7}$$

o bien, si con una raya arriba denotamos un promedio, podemos escribir

$$\rho_1 \overline{V}_1 A_1 = \rho_2 \overline{V}_2 A_2 \tag{4.4.8}$$

donde $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ son las *velocidades promedio* en las áreas en las secciones 1 y 2, respectivamente. En ejemplos y problemas es frecuente omitir la raya. Debe recordarse, sin embargo, que los perfiles de velocidad reales suelen no ser uniformes; las ecuaciones 4.4.5 y 4.4.6 se usan con las velocidades representando velocidades promedio.

Flujo másico, 888-889

Cualquiera de las ecuaciones previas (4.4.2) a (4.4.8) se conoce como *ecuación de continuidad*.

Antes de presentar algunos ejemplos que aplican la ecuación de continuidad, se definen dos flujos que serán útiles para especificar la cantidad de flujo. El *flujo másico* $\dot{m}$, o la velocidad de flujo másico, es

$$\dot{m} = \int_A \rho V_n \, dA \tag{4.4.9}$$

y tiene unidades de kg/s (slug/s); V_n es la componente normal de la velocidad. El *gasto* Q, o gasto de volumen, es

$$Q = \int_A V_n \, dA \tag{4.4.10}$$

y tiene unidades de m^3/s (ft^3/s) o a veces L/s. El flujo másico comúnmente se usa para especificar la cantidad de flujo para un flujo compresible y el gasto para un flujo incompresible. Con frecuencia nos referimos al gasto como **descarga**.

Descarga: *Otro término para el gasto.*

En términos de la velocidad promedio, tenemos

$$Q = A\overline{V} \tag{4.4.11}$$

$$\dot{m} = \rho A \overline{V} \tag{4.4.12}$$

donde para el flujo másico suponemos un perfil de densidad uniforme; también suponemos que la velocidad es normal al área.

Los siguientes ejemplos se resuelven seleccionando primero un volumen de control. Si se estudian cuidadosamente los ejemplos, se observará que con frecuencia hay sólo una opción apropiada para el volumen de control. Debemos posicionar las áreas de entrada y salida en lugares donde los integrandos sean conocidos o puedan aproximarse; además, la cantidad buscada está incluida a menudo en el área de entrada o de salida. En unos pocos casos puede haber más libertad en la selección del volumen de control (ejemplo 4.5).

Este primer ejemplo representa el uso principal de la ecuación de continuidad. Nos permite calcular la velocidad en una sección si se conoce en otra.

CONCEPTO CLAVE
Posicione las áreas de entrada y salida en lugares donde se conozcan los integrandos o donde esté ubicada la cantidad que se busca.

Ejemplo 4.1

Fluye agua a una velocidad uniforme de 3 m/s hacia una boquilla que reduce el diámetro de 10 cm a 2 cm (figura E4.1). Calcule la velocidad del agua que sale de la boquilla y el gasto.

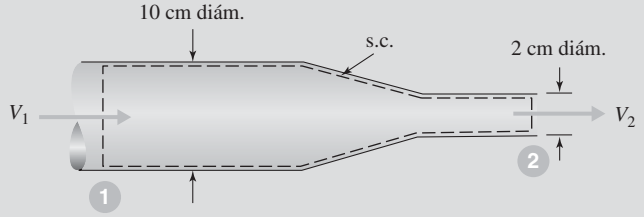


Fig. E4.1

Solución

El volumen de control se selecciona para que se encuentre dentro de la boquilla, como se muestra. El flujo entra al volumen de control en la sección 1 y sale en la sección 2. La ecuación simplificada de continuidad (4.4.6) se usa porque se supone que la densidad del agua es constante y los perfiles de velocidad son uniformes:

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

$$\therefore V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = 3\,\frac{\pi \times 0.1^2/4}{\pi \times 0.02^2/4} = 75 \text{ m/s}$$

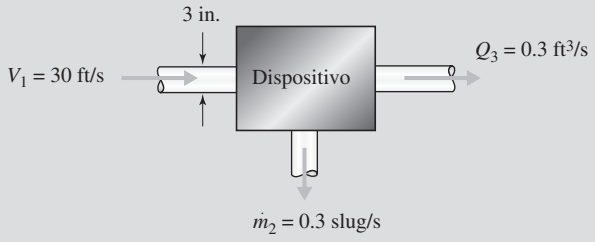
El gasto, o descarga, se encuentra que es

$$Q = V_1A_1$$

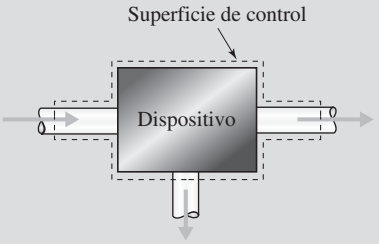
$$= 3 \times \pi \times 0.1^2/4 = 0.0236 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ejemplo 4.2

Entra y sale agua de un dispositivo como se muestra en la figura E4.2a. Calcule la rapidez de cambio de la masa de agua (*dm/dt*) en el dispositivo.



(a)



(b)

Fig. E4.2

Solución

La superficie de control del volumen de control seleccionado se muestra en la figura E4.2b. La ecuación de continuidad (4.4.2), con tres superficies por las que fluye agua, toma la siguiente forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V} \, dA$$

$$= \frac{dm}{dt} - \rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 + \rho_3 A_3 V_3$$

donde hemos supuesto que la densidad es constante en el volumen y empleado $\mathbf{V}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = -V_1$, dado que $\hat{\mathbf{n}}_1$ apunta hacia fuera del volumen, opuesto a la dirección de $\mathbf{V}_1$. Los últimos tres términos provienen de la integral de área. En términos de las cantidades dadas, lo anterior puede expresarse como

$$0 = \frac{dm}{dt} - \rho_1 A_1 V_1 + \dot{m}_2 + \rho_3 Q_3$$

$$= \frac{dm}{dt} - 1.94 \text{ slug/ft}^3 \times \left(\pi \times \frac{1.5^2}{144}\right) \text{ft}^2 \times 30 \text{ ft/s} + 0.3 \text{ slug/s}$$

$$+ 1.94 \text{ slug/ft}^3 \times 0.3 \text{ ft}^3/\text{s}$$

Esto se resuelve para dar

$$\frac{dm}{dt} = 1.975 \text{ slug/s}$$

Por tanto, la masa se incrementa a razón de 1.975 slug/s. Para lograr esto, el dispositivo podría tener un material semejante a una esponja que absorba agua.

Ejemplo 4.3

Un flujo uniforme de aire se aproxima a un cilindro como se muestra en la figura E4.3a. La distribución de velocidad simétrica en el lugar mostrado corriente abajo en la estela del cilindro es aproximada por

$$u(y) = 1.25 + \frac{y^2}{4} \qquad -1 < y < 1$$

donde $u(y)$ está en m/s y y en metros. Determine el flujo másico a través de la superficie AB por metro de profundidad (hacia la página). Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

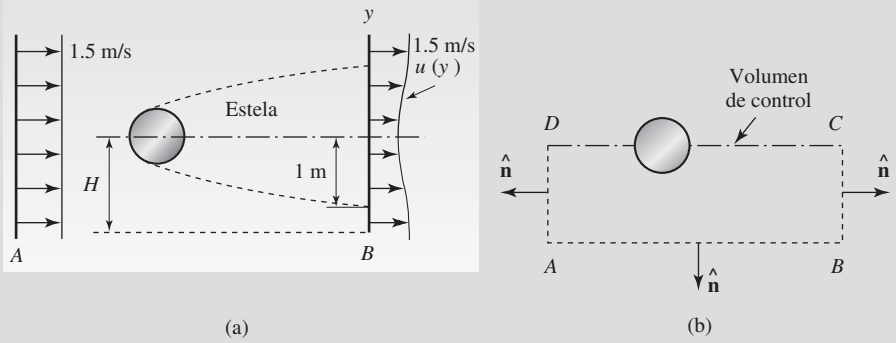


Fig. E4.3

Solución

Seleccione $ABCD$ como el volumen de control (figura E4.3b). Fuera de la estela (región de flujo retardado) la velocidad es constante a 1.5 m/s. En consecuencia, la velocidad normal al plano AD es 1.5 m/s. Ningún flujo másico cruza la superficie CD debido a la simetría. Suponiendo un flujo permanente, la ecuación de continuidad (4.4.3) se convierte en

$$0 = \int_{s.c.} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

El flujo másico ocurre a través de las tres superficies: AB, BC y AD. Entonces la ecuación previa toma la forma de

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{A_{AB}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{BC}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{AD}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA \\ &= \dot{m}_{AB} + \int_0^H \rho u(y)\, 1 \times dy - \rho \text{ kg/m}^3 \times H \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1.5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

donde el signo negativo para la superficie AD resulta del hecho de que el vector unitario apunta hacia fuera del volumen a la izquierda, mientras que el vector velocidad apunta hacia la derecha. Recuerde que un signo negativo en la ecuación de continuidad de flujo permanente se asocia siempre con un flujo de entrada y un signo positivo con un flujo de salida. Ahora, integramos hasta 1 m en lugar de H, dado que la masa que entra por la izquierda más allá de 1 m simplemente sale por la derecha sin ganancia ni pérdida neta. Por tanto, si hacemos $H = 1$ m, tenemos

$$0 = \dot{m}_{AB} + \int_0^1 1.23\left(1.25 + \frac{y^2}{4}\right) dy - 1.23 \times 1 \times 1.5 \text{ kg/s}$$

Realizamos la integración y resulta

$$\dot{m}_{AB} = 0.205 \text{ kg/s por metro}$$

Ejemplo 4.4

Se infla un globo con un suministro de agua de 0.6 m^3/s (figura E4.4a). Encuentre la rapidez de crecimiento del radio en el instante cuando $R = 0.5$ m.

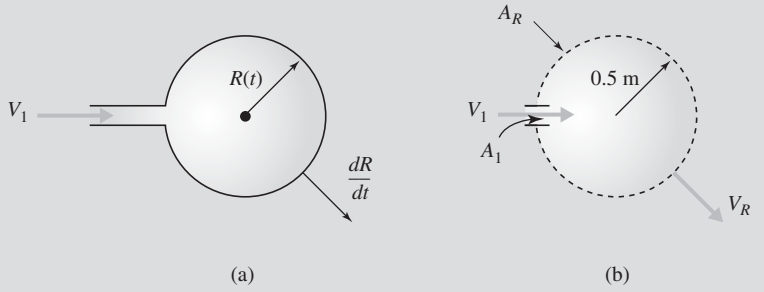


Fig. E4.4

Solución

El objetivo es hallar dR/dt cuando el radio $R = 0.5$ m. Esta rapidez de crecimiento $V_R = dR/dt$ es la misma que la velocidad del agua normal a la pared del globo. Por lo tanto, seleccionamos como nuestro volumen de control fijo una esfera con un radio constante de 0.5 m (vea la figura E4.4b), de modo que podemos calcular la velocidad del agua en la superficie en el instante mostrado moviéndose radialmente hacia fuera en $R = 0.5$ m. La ecuación de continuidad se escribe como

$$0 = \underbrace{\int_{\text{v.c.}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V}}_{0} + \int_{\text{s.c.}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

El primer término es cero porque la densidad del agua dentro del volumen de control no cambia en el tiempo. Además, el agua cruza dos áreas: el área de entrada A_1 con una velocidad V_1 y el resto de la superficie de la esfera A_R con una velocidad V_R. Supondremos que $A_1 \ll A_R$. La ecuación de continuidad toma entonces la forma de

$$0 = -\rho A_1 V_1 + \rho A_R V_R$$

Como el gasto hacia el volumen es $A_1 V_1 = 0.6$ m^3/s y $A_R \simeq 4\pi R^2$ suponiendo que A_1 es muy pequeña, podemos despejar V_R. En $R = 0.5$ m

$$V_R = \frac{A_1 V_1}{4\pi R^2} = \frac{0.6 \text{ m}^3/\text{s}}{4\pi \times 0.5^2 \text{ m}^2} = 0.191 \text{ m/s}$$

$$\therefore \frac{dR}{dt} = 0.191 \text{ m/s}$$

Hemos empleado un volumen de control fijo y permitido que la superficie en movimiento del globo pase por él en el instante considerado. Con este enfoque es posible modelar situaciones en las que superficies, por ejemplo un pistón, se permita que se muevan.

Ejemplo 4.5

Este ejemplo muestra que puede haber más de una buena opción para un volumen de control. Buscamos determinar la rapidez a la que sube el nivel de agua en un recipiente abierto si el agua que entra a través de un tubo de 0.10 m² tiene una velocidad de 0.5 m/s y el gasto que sale es de 0.2 m³/s (figura E4.5a). El recipiente tiene una sección transversal circular con un diámetro de 0.5 m.

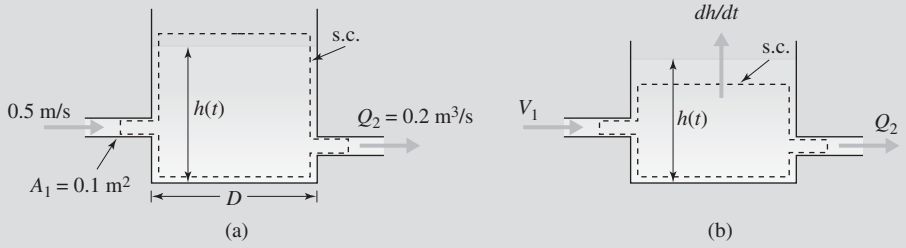


Fig. E4.5

Solución

Primero seleccionamos un volumen de control que se extienda sobre la superficie del agua, como se ve en la figura E4.5a. Aplicamos la ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho d\mathcal{V} + \rho(-V_1)A_1 + \rho V_2 A_2 = 0$$

en la que el primer término describe la rapidez de cambio de la masa en el volumen de control. En consecuencia, despreciando la masa de aire sobre el agua, tenemos

$$\frac{d(\rho h \pi D^2/4)}{dt} - \rho V_1 A_1 + \rho Q_2 = 0$$

Dividimos entre la constante ρ,

$$\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} - V_1 A_1 + Q_2 = 0$$

La rapidez a la que sube el nivel del agua es entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V_1 A_1 - Q_2}{\pi D^2/4}$$

Entonces,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5 \times 0.1 - 0.2}{\pi \times 0.5^2/4} = -0.764 \text{ m/s}$$

El signo negativo indica que el nivel del agua en realidad está disminuyendo.

Resolvamos otra vez este problema pero con otra opción para el volumen de control, uno con su superficie superior bajo el nivel del agua (figura E4.5b). La velocidad en la superficie superior es entonces igual a la rapidez a la que sube la superficie, es decir, *dh/dt*. La condición de flujo dentro del volumen de control es permanente. Por lo tanto, podemos aplicar la ecuación 4.3.4. Hay tres áreas a través de las cuales fluye el fluido. En la tercera, la velocidad es *dh/dt*; de aquí que la ecuación de continuidad tome la forma

$$\rho(-V_1)A_1 + \rho Q_2 + \rho \frac{dh}{dt}\frac{\pi}{4}D^2 = 0$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V_1 A_1 - Q_2}{\pi D^2/4}$$

Éste es el mismo resultado obtenido antes.

4.5 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Muchos problemas en los que aparece un movimiento de un fluido requieren que la primera ley de la termodinámica, con frecuencia llamada *ecuación de la energía*, se utilice para relacionar cantidades de interés. Si se desea calcular el calor transferido a un dispositivo (una caldera o un compresor), o el trabajo realizado por un dispositivo (una bomba o una turbina), es obvio que se requiera la ecuación de la energía. También se usa para relacionar presiones y velocidades cuando no es aplicable la ecuación de Bernoulli; éste es el caso siempre que los efectos viscosos no se puedan despreciar, como por ejemplo en un flujo a través de un sistema de tuberías en una planta industrial o en un campo de golf, o en un canal abierto que abastezca agua a Los Ángeles. Expresemos la ecuación de la energía en forma de volumen de control. Para un sistema es

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} e\rho \, d\forall \tag{4.5.1}$$

donde la energía específica e incluye la energía cinética específica $V^2/2$, la energía potencial específica gz, y la energía interna específica $\tilde{u}$; esto es,

$$e = \frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \tag{4.5.2}$$

No incluiremos otras formas de energía, tales como la energía debida a interacciones de un campo de flujo de con un campo magnético o eléctrico o las que se deben a reacciones químicas. En términos de un volumen de control, la ecuación 4.5.1 se convierte en

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} e\rho \, d\forall + \int_{\text{s.c.}} \rho e \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA \tag{4.5.3}$$

Esto se puede poner en formas simplificadas para ciertos flujos restringidos, pero primero estudiemos el término de la rapidez de la transferencia de calor $\dot{Q}$ y el término de la rapidez de realización de trabajo $\dot{W}$.

CONCEPTO CLAVE *$\dot{Q}$ representa la rapidez de transferencia de energía a través de la superficie de control debida a una diferencia de temperatura.*

El término $\dot{Q}$ representa la rapidez de transferencia de energía a través de la superficie de control debida a una diferencia de temperatura. (No confundir este término con el gasto Q.) El término de la rapidez de transferencia de calor es dato del enunciado o resulta del uso de la ecuación 4.5.3. El cálculo de $\dot{Q}$ a partir de temperaturas dadas es el objetivo de un curso en transferencia de calor y es muy difícil de calcular, en general. Con frecuencia se dedica todo un curso sobre Transferencia de calor para determinar $\dot{Q}$ a partir de temperaturas dadas. El término de la rapidez de realización de trabajo se estudia en detalle en la siguiente sección.

4.5.1 Término de la rapidez de realización de trabajo

El término de la rapidez de realización de trabajo resulta del trabajo que es realizado por el sistema. O bien, dado que consideramos el instante en que el sistema ocupa el volumen de control, también podemos expresar que el término de la rapidez de realización de trabajo resulta del trabajo que es realizado por el volumen de control. El trabajo de interés en mecánica de fluidos se debe a una fuerza que se mueve a través de una distancia mientras que actúa sobre el volumen de control. La rapidez con la que se realiza un trabajo $\dot{W}$, o potencia, está dada por el producto punto de una fuerza $\mathbf{F}$ por su velocidad:

CONCEPTO CLAVE *La rapidez con que se realiza un trabajo está dada por el producto punto de una fuerza $\mathbf{F}$ por su velocidad.*

$$\dot{W} = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_I \tag{4.5.4}$$

donde $\mathbf{V}_I$ es la velocidad medida respecto a un marco de referencia inercial fijo. El signo negativo resulta porque hemos seleccionado la convención de que el trabajo realizado sobre el volumen de control es negativo.

Si la fuerza resulta de un esfuerzo variable que actúa sobre la superficie de control, debemos integrar,

$$\dot{W} = -\int_{\text{s.c.}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_I \, dA \tag{4.5.5}$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector esfuerzo que actúa sobre el área elemental dA, la fuerza diferencial estando representada por $d\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} \, dA$, como se muestra en la figura 4.8.

Para un volumen de control en movimiento, por ejemplo un automóvil, tenemos que evaluar la velocidad con respecto a un marco de referencia fijo. Por ejemplo, consideremos un automóvil que se desplaza a velocidad constante (vea el ejemplo 4.10). Si deseamos aplicar la ecuación de la energía, podríamos hacer que el automóvil fuera el volumen de control. En ese caso, la velocidad en la ecuación 4.5.4 se mediría respecto a una referencia fija y no relativa al automóvil. Si se usara la velocidad relativa al automóvil, la fuerza de resistencia al avance tendría una velocidad cero que resultaría en que no se realiza trabajo alguno; pero sabemos que a alta velocidad, la energía de la gasolina se emplea principalmente para vencer la resistencia al avance. Entonces es necesario el marco de referencia estacionario.

En general, para volúmenes de control en movimiento el vector velocidad $\mathbf{V}_I$ está relacionado con la velocidad relativa $\mathbf{V}$, observada en un marco de referencia unido al volumen de control por

$$\mathbf{V}_I = \mathbf{V} + \dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{4.5.6}$$

donde $\dot{\mathbf{S}}$ es la velocidad del volumen de control (vea la figura 3.5). Ahora podemos escribir la rapidez de realización de trabajo de la ecuación 4.5.5 como

$$\dot{W} = -\int \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} \, dA + \dot{W}_I \tag{4.5.7}$$

donde el término "rapidez de realización de trabajo inercial" está dado por

$$\dot{W}_I = -\int_{\text{s.c.}} \boldsymbol{\tau} \cdot (\dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \, dA \tag{4.5.8}$$

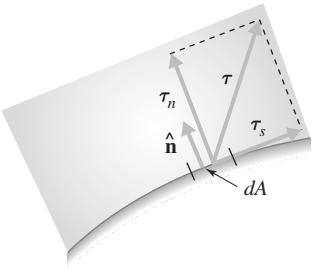


Fig. 4.8 Vector esfuerzo actuando sobre la superficie de control.

A continuación, exprese el vector esfuerzo como la suma de una componente normal y una componente cortante, como se ve en la figura 4.8, es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = -p\hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\tau}_s \tag{4.5.9}$$

donde se supone que la componente del esfuerzo normal es el negativo de la presión p. Entonces

$$\dot{W} = \int_{\text{s.c.}} p\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA - \int_{\text{s.c.}} \boldsymbol{\tau}_s\cdot\mathbf{V}\, dA + \dot{W}_I \tag{4.5.10}$$

CONCEPTO CLAVE *El trabajo de eje $\dot{W}_S$ es transmitido por un eje giratorio que es cortado por la superficie de control.*

Permitiremos que el término del esfuerzo consista de dos partes. Una parte es el trabajo denominado *trabajo de eje* $\dot{W}_S$ transmitido por un eje giratorio que es cortado por la superficie de control; este término es importante cuando se trabaja con flujos en bombas y turbinas. La otra parte se denotará como *trabajo de corte* $\dot{W}_{\text{corte}}$ y resulta al mover los límites; este término se requiere si la superficie de control en sí se mueve respecto al volumen de control, como ocurre con una banda en movimiento.

Por lo tanto, el término de la rapidez de realización de trabajo se convierte en

$$\dot{W} = \int_{\text{s.c.}} p\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA + \dot{W}_S + \dot{W}_{\text{corte}} + \dot{W}_I \tag{4.5.11}$$

Los términos se resumen como sigue:

$\int p\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA$ Rapidez de realización de trabajo resultante de la fuerza debida a una presión que se desplaza en la superficie de control. Se conoce como **trabajo de flujo**.

Trabajo de flujo: *Rapidez de realización de trabajo que resulta de la fuerza debida a una presión que se desplaza en la superficie de control.*

$\dot{W}_S$ Rapidez de realización de trabajo resultante de ejes giratorios como el de una bomba o de una turbina, o la potencia eléctrica equivalente.

$\dot{W}_{\text{corte}}$ Rapidez de realización de trabajo debida al corte que actúa en un límite en movimiento, como en una banda en movimiento.

$\dot{W}_I$ Rapidez de realización de trabajo que se presenta cuando el volumen de control se mueve respecto a un marco de referencia fijo.

Debemos observar que los términos de rapidez de realización de trabajo $\dot{W}_{\text{corte}}$ y $\dot{W}_I$ raras veces se encuentran en problemas en un curso introductorio y con frecuencia se omiten en los libros de texto. Aquí se incluyen para el completar el análisis.

4.5.2 Ecuación general de la energía

Cuando el término de la rapidez de realización de trabajo de la ecuación 4.5.11 se sustituye en la ecuación 4.5.3, obtenemos la ecuación de la energía en la forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} e\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA \tag{4.5.12}$$

El término de la rapidez de realización de trabajo necesario para mover la fuerza de presión se ha cambiado al lado derecho, como es común, y se trata como un término de flujo de energía.

La sustitución de la ecuación 4.5.2 en la ecuación 4.5.12 resulta en

$$\dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \tilde{u}\right)\rho \, d\forall + \int_{\text{s.c.}} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \tilde{u} + \frac{p}{\rho}\right)\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \qquad (4.5.13)$$

Esta forma general de la ecuación de la energía es útil para analizar problemas de flujos de fluidos que puedan incluir efectos dependientes del tiempo y perfiles no uniformes. Antes de simplificar la ecuación para flujo permanente y perfiles uniformes, introduzcamos la noción de "pérdidas."

En numerosos flujos de fluido, las formas útiles de la energía (cinética y potencial) y del trabajo de flujo se convierten en formas de energía no utilizables (energía interna o transferencia de calor). Si suponemos que la temperatura del volumen de control permanece sin cambio, la energía interna no cambia y las pérdidas son equilibradas por la transferencia de calor a través de la superficie de control. Esta transferencia de calor puede ser el resultado de convección, radiación o conducción en las superficies de control. En la teoría de la transferencia de calor se presenta una descripción detallada de estos efectos. No obstante, en un curso introductorio de mecánica de fluidos la suma de estos efectos se agrupa y se denota como $\dot{Q}$. Así, definimos **pérdidas** como la suma de todos los términos que representan formas de energía no utilizables:

Pérdidas: *Suma de todos los términos que representan formas de energía no utilizables.*

$$\text{pérdidas} = -\dot{Q} + \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \tilde{u}\rho dV + \int_{\text{s.c.}} \tilde{u}\rho \, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \qquad (4.5.14)$$

Ahora podemos reescribir la ecuación de la energía como

$$-\dot{W}_S - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz\right)\rho \, d\forall + \int_{\text{s.c.}} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)\rho \, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \text{pérdidas} \qquad (4.5.15)$$

CONCEPTO CLAVE *Las pérdidas se deben principalmente a fricción interna y flujos separados.*

Las pérdidas se deben a dos efectos primarios:

1. La viscosidad causa una fricción interna que resulta en una mayor energía interna (aumento de temperatura) o transferencia de calor.
2. Los cambios en geometría resultan en flujos separados que requieren de energía útil para mantener los movimientos secundarios resultantes en los que se presenta la disipación viscosa.

En un conducto, las pérdidas debidas a los efectos viscosos se distribuyen en toda la longitud, mientras que la pérdida debida a un cambio de geometría (una válvula, un codo, una ampliación) se concentra en la cercanía del cambio de geometría.

El cálculo analítico de las pérdidas es un tanto difícil, en particular cuando el flujo es turbulento. En general, la predicción de las pérdidas está basada en fórmulas empíricas que daremos en capítulos subsiguientes. En este capítulo estudiamos pérdidas cualitativamente, y, en ejemplos y problemas, se darán las ecuaciones de

CONCEPTO CLAVE *Para una bomba o turbina, las pérdidas se expresan en términos de la eficiencia.*

éstas. Para una bomba o una turbina las pérdidas se expresan en términos de la eficiencia. Por ejemplo, si la eficiencia de una bomba es 80%, las pérdidas serían 20% de la entrada de energía a la bomba.

Puede ser que el objetivo en un flujo particular de fluido sea cambiar la energía interna del fluido, como en un generador de vapor (caldera) o planta de energía eléctrica, mediante la transferencia de calor; entonces la definición de pérdidas anterior se debe alterar de modo que el término de pérdida incluya sólo los efectos de disipación de la viscosidad del fluido. En general, para los problemas de interés en mecánica de fluidos, la ecuación 4.5.15 es aceptable.

4.5.3 Flujo permanente uniforme

Considere una situación de flujo permanente en la que hay una entrada y una salida a través de la cual se pueden suponer perfiles uniformes. También, suponga que $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_I = 0$ con $V_I = V$. Para dicho flujo el término $(V^2/2 + gz + p/\rho)$ en la ecuación 4.5.15 es constante en toda la sección transversal porque V es constante (suponemos un perfil de velocidad uniforme) y la suma de $p/\rho + gz$ es constante si las líneas de corriente en cada sección son paralelas. La ecuación de la energía (ecuación 4.5.15) entonces se simplifica en

$$-\dot{W}_S = \rho_2 V_2 A_2 \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 \right) - \rho_1 V_1 A_1 \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 \right) + \text{pérdidas} \tag{4.5.16}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la entrada y la salida, respectivamente. El flujo másico está dado por $\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$. Después de dividir entre $\dot{m}g$ tenemos

$$-\frac{\dot{W}_S}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} - \frac{p_1}{\gamma_1} + z_2 - z_1 + h_L \tag{4.5.17}$$

donde hemos introducido la *pérdida de carga* h_L, definida como

$$h_L = \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{g} - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}g} \tag{4.5.18}$$

A menudo se escribe en términos de un *coeficiente de pérdida* K como

$$h_L = K \frac{V^2}{2g} \tag{4.5.19}$$

donde V es con frecuencia V_1 o V_2; si no es obvio, se especificará. Los coeficientes de pérdida se estudiarán en más detalle en el capítulo 7 y están tabulados en la tabla 7.2.

La pérdida de carga se conoce como "altura" porque tiene dimensiones de longitud. También podemos citar con frecuencia a $V^2/2g$ como la *altura dinámica* y a p/γ como la *altura de presión* ya que esos términos también tienen dimensiones de longitud. También recordemos del capítulo 3 que $p/\rho + z$ se denomina *carga hidráulica*. Además, la suma de la carga hidráulica y la altura dinámica recibe el nombre de *altura total*.

La ecuación de la energía, en la forma de la ecuación 4.5.17, es útil en numerosas aplicaciones y es, quizá, la forma de la ecuación de la energía que se usa con más

frecuencia. Si las pérdidas son insignificantes y no hay trabajo de eje, observamos que la ecuación de la energía toma la forma

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma_1} + z_1 \tag{4.5.20}$$

Observe que la ecuación de energía se ha reducido a una forma idéntica a la ecuación de Bernoulli cuando $\gamma_2 = \gamma_1$ (un flujo de densidad constante). Debemos recordar, no obstante, que la ecuación de Bernoulli es una ecuación de cantidad de movimiento aplicable a lo largo de una línea de corriente y que la ecuación anterior es una ecuación de energía aplicada entre dos secciones de un flujo. No es de sorprenderse que ambas deban predecir resultados idénticos a partir de las condiciones expresadas, dado que la altura dinámica es constante en una sección transversal y la suma de la altura de presión y la elevación permanece constante en una sección transversal.

CONCEPTO CLAVE *La ecuación de Bernoulli es aplicable a lo largo de una línea de corriente y la ecuación de la energía se aplica entre dos secciones.*

La ecuación de la energía (4.5.17) puede aplicarse a cualquier flujo permanente, uniforme, con una entrada y una salida. El volumen de control suele ser seleccionado de modo tal que las secciones de entrada y salida tengan una altura total uniforme. Por ejemplo, puede aplicarse a un flujo de agua a través de una tubería larga; la altura total a la entrada y salida pueden entonces evaluarse en forma conveniente en el centro de la entrada y salida de la tubería. La ecuación de la energía puede aplicarse al flujo que pasa por una compuerta (figura 4.9). Se ilustra un volumen de control apropiado. La carga total en la entrada y salida puede ser evaluada en cualquier punto en la entrada y salida, respectivamente. No obstante, una opción conveniente serían los puntos en la superficie del agua. Entonces la ecuación de la energía se convierte en

$$\frac{V_1^2}{2g} + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}}^{\,0} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}}^{\,0} + h_2 + h_L \tag{4.5.21}$$

donde las presiones se consideraron cero. Si hubiéramos escogido los centroides de la entrada y salida, como se muestra en la figura 4.9, hubiéramos obtenido

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{h_1}{2} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{h_2}{2} + h_L \tag{4.5.22}$$

Vemos que este resultado es igual al de la ecuación 4.5.21 si sustituimos $p_1 = \gamma h_1/2$ y $p_2 = \gamma h_2/2$. Para que quede completo nuestro análisis, debemos observar que las

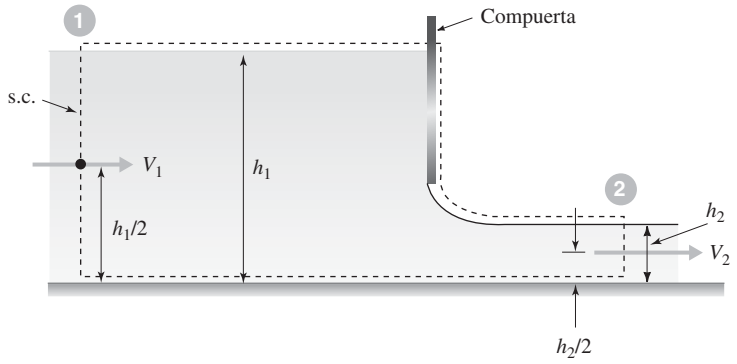


Fig. 4.9 Aplicación de la ecuación de la energía a una compuerta en un canal abierto.

pérdidas entre 1 y 2 en la figura 4.9 podrían despreciarse porque los efectos viscosos internos se presentan sólo en una distancia relativamente corta y no se generan flujos secundarios de importancia.

La ecuación de energía (4.5.15) puede aplicarse a cualquier volumen de control. Por ejemplo, considere un flujo incompresible, uniforme y permanente a través de una sección en T en una tubería (figura 4.10) en la que hay una entrada y dos salidas. La ecuación de la energía se puede aplicar a cada uno de los dos volúmenes de control, uno para el flujo másico que sale de la sección 2 y el otro para el flujo másico que sale de la sección 3:

$$\begin{aligned} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 &= \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{L_{1-2}} \\ \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 &= \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3 + h_{L_{1-3}} \end{aligned} \tag{4.5.23}$$

Los términos de pérdida de la ecuación 4.5.23 incluyen las pérdidas entre la entrada y las respectivas salidas. Si las pérdidas son insignificantes, la ecuación de la energía se reduce a una forma similar a la ecuación de Bernoulli aplicada a lo largo de una línea de corriente que va de 1 a 2 o a una línea de corriente que va de 1 a 3.

Una nota final para esta sección se refiere a la nomenclatura para bombas y turbinas en un sistema de flujo. Con frecuencia es convencional que el término de energía ($\dot{W}_S/\dot{m}g$) asociado con una bomba se denomine *carga hidráulica de bomba* H_p, y el término ($\dot{W}_S/\dot{m}g$) asociado con una turbina sea la *carga hidráulica de turbina* H_T. Entonces la ecuación de la energía, para un flujo incompresible, toma la forma

$$H_P + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = H_T + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L \tag{4.5.24}$$

En esta forma hemos igualado la energía a la entrada más la energía agregada a la energía a la salida más la energía extraída (energía por unidad de peso, por supuesto). Si cualquiera de las cantidades es cero (por ejemplo, no hay bomba), el término apropiado simplemente se omite. Los términos H_P y H_T previos representan la energía que es transferida hacia y desde el fluido, respectivamente. Si se desea determinar la energía suministrada por la turbina o requerida por la bomba, debe usarse la eficiencia de cada dispositivo.

CONCEPTO CLAVE *H_P y H_T representan la energía que se transfiere hacia y desde el fluido, respectivamente.*

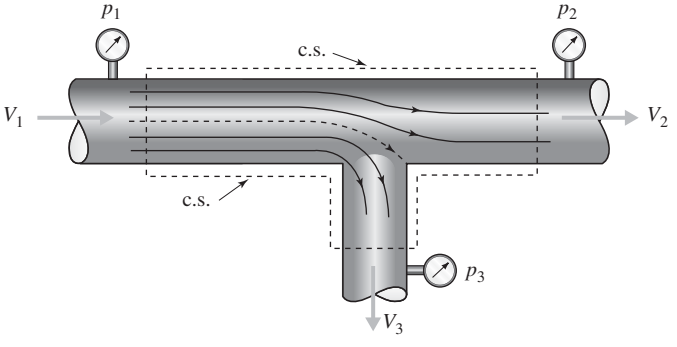


Fig. 4.10 Aplicación de la ecuación de la energía a una sección T.

La potencia generada por la turbina con una eficiencia de η_T es simplemente

$$\dot{W}_T = \dot{m}gH_T\eta_T = \gamma Q H_T \eta_T \tag{4.5.25}$$

La potencia requerida para una bomba con una eficiencia de η_P sería

$$\dot{W}_P = \frac{\dot{m}gH_P}{\eta_P} = \frac{\gamma Q H_P}{\eta_P} \tag{4.5.26}$$

Calcularemos la potencia en watts, ft-lb/s, o caballos de potencia. Recuerde que un caballo de potencia equivale a 746 W o 550 ft-lb/s.

4.5.4 Flujo permanente no uniforme

Si la suposición de perfiles de velocidad uniforme no es aceptable para un problema de interés, como a veces es la situación, tenemos que considerar la integral de la superficie de control en la ecuación 4.5.15 con la expresión apropiada para la distribución de la velocidad. En la práctica, la distribución de la velocidad puede tomarse en cuenta si se introduce al *factor de corrección por energía cinética* α, definido por

$$\alpha = \frac{\int V^3 dA}{\overline{V}^3 A} \tag{4.5.27}$$

donde $\overline{V}$ es la velocidad promedio en el área A, dada por la ecuación 4.4.11. Entonces el término que representa la energía cinética en la ecuación 4.5.15 es

$$\frac{1}{2}\rho \int_A V^3 \, dA = \frac{1}{2}\alpha\rho \overline{V}^3 A \tag{4.5.28}$$

donde hemos empleado $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} = V$ y $V_I = V$. Usando este factor, podemos tomar en cuenta las distribuciones de velocidad no uniformes si modificamos la ecuación 4.5.24 en la forma siguiente

$$H_P + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = H_T + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L \tag{4.5.29}$$

donde $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ son las velocidades promedio en las secciones 1 y 2, respectivamente. Para un flujo con un perfil parabólico en una tubería podemos calcular $\alpha = 2.0$ (vea el ejemplo 4.9). Para la mayoría de flujos turbulentos internos, no obstante, el perfil es casi uniforme con $\alpha \simeq 1.05$. En consecuencia, simplemente hacemos $\alpha = 1$ dado que es casi la unidad; esto se hará siempre a menos que se indique de otra forma, en vista de que la mayoría de los flujos internos que se estudian son, de hecho, flujos turbulentos.

CONCEPTO CLAVE *Para la mayoría de flujos turbulentos internos hacemos $\alpha = 1$.*

Ejemplo 4.6

La bomba de la figura E4.6 debe aumentar la presión de 0.2 m^3/s de agua de 200 kPa a 600 kPa. Si la bomba es 85% eficiente, ¿cuánta energía eléctrica necesitará la bomba? El área de salida está 20 cm arriba del área de entrada. Suponga que las áreas de entrada y salida son iguales.

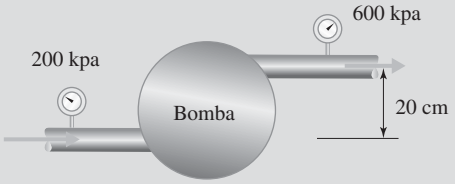


Fig. E4.6

Solución

La ecuación (4.5.24) a través de la bomba produce

$$H_P = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1$$

$$= \frac{(600\,000 - 200\,000)\ \text{N/m}^2}{9810\ \text{N/m}^3} + 0.2\ \text{m} = 41.0\ \text{m}$$

donde $V_1 = V_1$ porque las áreas de entrada y salida son iguales, y cualesquiera pérdidas son tomadas en cuenta con la eficiencia de la ecuación 4.5.26. Esa ecuación proporciona la potencia:

$$\dot{W}_P = \frac{\gamma Q H_P}{\eta_P}$$

$$= \frac{9810\ \text{N/m}^3 \times 0.2\ \text{m}^3/\text{s} \times 41.0\ \text{m}}{0.85} = 94\,600\ \text{J/s} \quad \text{o} \quad 94.6\ \text{kW}$$

Ejemplo 4.7

De un depósito sale agua a través de una tubería de 2.5 ft de diámetro hacia una unidad de turbina-generador y luego sale a un río que está a 100 ft abajo de la superficie del depósito. Si el gasto es de 90 ft^3/s y la eficiencia de la turbina-generador es de 88%, calcule la salida de potencia. Suponga que el coeficiente de pérdida en la tubería (incluyendo la salida) es $K = 2$.

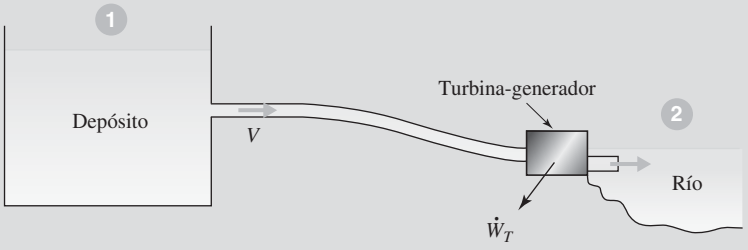


Fig. E4.7

Solución

Con base en la figura E4.7, elegimos que el volumen de control se extienda de la sección 1 a la sección 2 en las superficies del depósito y del río, donde conocemos las velocidades, presiones y elevaciones; consideramos que la superficie del agua en el depósito a la izquierda es la entrada y la superficie del agua del río es la salida. La velocidad en la tubería es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{90}{\pi \times 2.5^2/4} = 18.3 \text{ ft/s}$$

Ahora considere la ecuación de la energía. Usaremos presiones manométricas de modo que $p_1 = p_2 = 0$; el nivel de referencia se coloca a través de la sección inferior 2 de modo que $z_2 = 0$; las velocidades V_1 y V_2 en las superficies del depósito son tan pequeñas que son insignificantes; se supone que K está basada en la velocidad del tubo de 2.5 ft de diámetro. La ecuación de la energía (4.5.24) entonces se convierte en

$$\cancel{H_P}^{\,0} + \frac{\cancel{V_1^2}^{\,0}}{2g} + \frac{\cancel{p_1}^{\,0}}{\gamma} + z_1 = H_T + \frac{\cancel{V_2^2}^{\,0}}{2g} + \frac{\cancel{p_2}^{\,0}}{\gamma} + \cancel{z_2}^{\,0} + K\frac{V^2}{2g}$$

$$100 = H_T + 2\frac{18.3^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2}{2 \times 32.2 \text{ ft/s}^2}$$

$$\therefore H_T = 89.6 \text{ ft}$$

Con este valor, se encuentra que la potencia de salida usando la ecuación 4.5.25 es

$$\dot{W}_T = Q\gamma H_T \eta_T$$
$$= 90 \text{ ft}^3/\text{s} \times 62.4 \text{ lb/ft}^3 \times 89.6 \text{ ft} \times 0.88 = 443\,000 \text{ ft-lb/s} \quad \text{u} \quad 805 \text{ hp}$$

En este ejemplo hemos empleado presión manométrica; el nivel de referencia para la energía potencial se supuso colocado a través de la sección 2, V_1 y V_2 se consideraron tan pequeñas que fueron insignificantes, y se estimó K basada en la velocidad de la tubería de 2.5 ft de diámetro.

Ejemplo 4.7a Volúmenes de control, Laboratorio virtual de flujo en una tubería, 947-948

Ejemplo 4.8

El medidor Venturi ilustrado reduce el diámetro del tubo de 10 cm a un mínimo de 5 cm (figura E4.8). Calcule el gasto y el flujo másico suponiendo condiciones ideales.

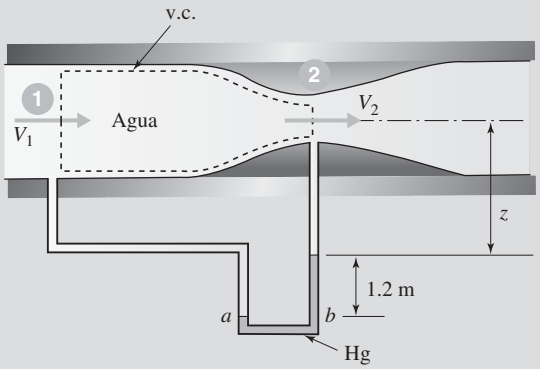


Fig. E4.8

Solución

El volumen de control se selecciona como se muestra, de modo que la entrada y la salida correspondan a las secciones donde la información de la presión en el manómetro pueda aplicarse. La lectura en el manómetro se interpreta como sigue:

$$p_a = p_b$$
$$p_1 + \gamma(z + 1.2) = p_2 + \gamma z + 13.6\gamma \times 1.2$$

donde z es la distancia desde la línea central del tubo hasta la parte superior de la columna de mercurio. El manómetro da entonces

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = (13.6 - 1) \times 1.2 = 15.12 \text{ m}$$

La continuidad (4.4.6) nos permite relacionar V_2 con V_1 mediante

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$
$$\therefore V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{\pi \times 10^3/4}{\pi \times 5^2/4} V_1 = 4V_1$$

La ecuación de la energía (4.5.17) suponiendo condiciones ideales (sin pérdidas y flujo uniforme) con $h_L = \dot{W}_S = 0$ toma la forma

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \cancelto{0}{(z_2 - z_1)}$$
$$= \frac{16V_1^2 - V_1^2}{2g} - 15.12$$
$$\therefore V_1 = 4.45 \text{ m/s}$$

El gasto es

$$Q = A_1 V_1 = \pi \times 0.05^2 \times 4.45 = 0.0350 \text{ m}^3/\text{s}$$

El flujo másico es

$$\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0.035 = 35.0 \text{ kg/s}$$

Ejemplo 4.9

La distribución de velocidad para cierto flujo en un tubo es $V(r) = V_{máx}\,(1 - r^2/r_0^2)$, donde r_0 es el radio del tubo (figura E4.9). Determine el factor de corrección por energía cinética.

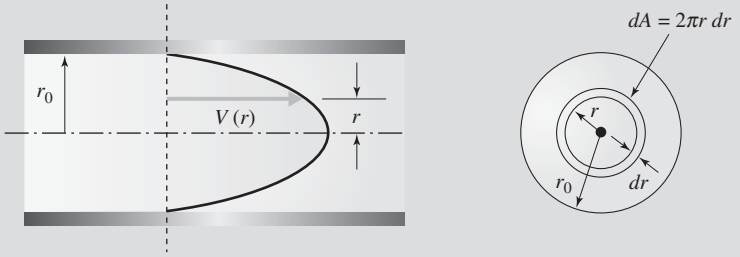


Fig. E4.9

Solución

Para hallar el factor de corrección por energía cinética α, debemos conocer la velocidad promedio. Es (combinando las ecuaciones 4.4.10 y 4.4.11)

$$\overline{V} = \frac{\int V\,dA}{A}$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} V_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) 2\pi r\,dr = \frac{2\pi V_{máx}}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\left(r - \frac{r^3}{r_0^2}\right) dr$$

$$= \frac{2V_{máx}}{r_0^2}\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4r_0^2}\right) = \frac{1}{2}\,V_{máx}$$

Con la ecuación 4.5.27, resulta

$$\alpha = \frac{\int V^3\,dA}{\overline{V}^3 A}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} V_{máx}^3(1 - r^2/r_0^2)^3\,2\pi r\,dr}{\left(\frac{1}{2}V_{máx}\right)^3 \pi r_0^2} = \frac{16}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left(1 - \frac{3r^2}{r_0^2} + \frac{3r^4}{r_0^4} - \frac{r^6}{r_0^6}\right) r\,dr$$

$$= \frac{16}{r_0^2}\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{3r_0^2}{4} + \frac{3r_0^2}{6} - \frac{r_0^2}{8}\right) = 2$$

En consecuencia, el flujo de energía cinética asociado con una distribución de velocidad parabólica a través de un área circular está dado por

$$\int \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\frac{V^2}{2}\,dA = 2 \times \frac{\dot{m}\overline{V}^2}{2}$$

Las distribuciones de velocidad parabólicas se encuentran en flujos laminares en tubos y entre placas paralelas, corriente abajo de entradas y cambios de geometría (válvulas, codos, etc.). El número de Reynolds debe ser bastante pequeño, por lo general menor que 2000.

Ejemplo 4.10

La fuerza de resistencia al avance en un automóvil (figura E4.10) es aproximada por la expresión $0.15\rho V_\infty^2 A$, donde A es el área de sección transversal proyectada y V_∞ es la velocidad del automóvil. Si $A = 1.2$ m^2, calcule la eficiencia η del motor si el consumo de combustible f (distancia recorrida en km por unidad de combustible) es 15 km/L y el automóvil se desplaza a 90 km/h. Suponga que el combustible libera 44 000 kJ/kg durante la combustión. Ignore la energía perdida a través de los gases de la combustión y el refrigerante y suponga que la única resistencia al movimiento es la fuerza de resistencia al avance. Use $\rho_{\text{aire}} = 1.12$ kg/m^3 y $\rho_{\text{combustible}} = 0.68$ kg/L.

Fig. E4.10

Solución

Si el automóvil se toma como el volumen de control en movimiento (observe que el volumen de control es fijo), como se muestra, podemos simplificar la ecuación de la energía (ecuación 4.5.3 en combinación con la 4.5.11) en

$$\dot{Q} - \dot{W}_I = 0$$

dado que todos los otros términos son insignificantes; no hay velocidad que cruce el volumen de control, de modo que $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ (desprecie la energía de los gases de la combustión); no hay esfuerzo cortante ni trabajo de eje; la energía del volumen de control permanece constante. La entrada de energía $\dot{Q}$ que realiza un trabajo útil es η veces la energía liberada durante la combustión; esto es,

$$\dot{Q} = \dot{m}_f \times 44\,000\eta \text{ kJ/s}$$

donde $\dot{m}_f$ es el flujo másico del combustible. El flujo másico del combustible se determina conociendo la rapidez de consumo de combustible $\dot{f}$ y la densidad del combustible como 0.68 kg/L, como sigue:

$$\dot{f} = \frac{\text{distancia}}{\text{volumen}} = \frac{V_\infty \times \text{tiempo}}{Q \times \text{tiempo}} = \frac{V_\infty}{\dot{m}_f/\rho_f} = \frac{\rho_f V_\infty}{\dot{m}_f}$$

con $V_\infty = 90\,000/3600 = 25$ m/s, tenemos, usando $\dot{f} = 15 \times 1000$ m/L,

$$15 \times 1000 = \frac{0.68 \times 25}{\dot{m}_f}$$

$$\therefore \dot{m}_f = 0.001133 \text{ kg/s}$$

El término de la rapidez de realización de trabajo inercial es

$$\begin{aligned}\dot{W}_I &= V_\infty \times \text{resistencia al avance} \\ &= 0.15\rho V_\infty^3 A = 0.15 \times 1.12 \times 25^3 \times 1.2 = 3150 \text{ J/s}\end{aligned}$$

Igualando $\dot{Q} = \dot{W}_I$, tenemos

$$44\,000\eta \times 0.001133 = 3.15$$

$$\therefore \eta = 0.0632 \quad \text{o} \quad 6.32\%$$

Es obvio que éste es un porcentaje muy bajo, quizá sorprendentemente bajo para el lector. Muy poca potencia (3.15 kJ/s = 4.22 hp) se necesita en realidad para impulsar el automóvil a 90 km/h. El motor relativamente grande, necesario principalmente para la aceleración, es muy ineficiente sólo para impulsar el automóvil.

Observe la importancia de usar un marco de referencia estacionario. El marco de referencia unido al automóvil es un marco de referencia inercial porque se mueve a velocidad constante. Sin embargo, la ecuación de la energía demanda un marco de referencia estacionario que permita que la energía requerida por la fuerza de resistencia al avance sea incluida de manera apropiada.

4.6 ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

4.6.1 Ecuación general de la cantidad de movimiento

La segunda ley de Newton, con frecuencia llamada *ecuación de la cantidad de movimiento*, expresa que la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento del sistema cuando se mide en un marco de referencia inercial; esto es,

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sist}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} \tag{4.6.1}$$

Usando la ecuación 4.3.9, con η sustituida por $\mathbf{V}$, esto se escribe para un volumen de control como

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{\text{v.c.}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, dA \tag{4.6.2}$$

donde $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es simplemente un escalar para cada área diferencial dA. La integral de la superficie de control en el lado derecho de la ecuación representa el flujo de la cantidad de movimiento neto a través de la superficie de control del fluido que entra y/o sale del volumen de control.

Fuerzas, 899-904

Cuando se aplica la segunda ley de Newton, la cantidad $\Sigma\, \mathbf{F}$ representa todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control. Las fuerzas incluyen las fuerzas superficiales que resultan del entorno que actúan sobre la superficie de control y las fuerzas de cuerpo que resultan de la gravedad y de campos magnéticos. La ecuación de la cantidad de movimiento se usa con frecuencia para determinar las fuerzas inducidas por el flujo. Por ejemplo, la ecuación nos permite calcular la fuerza sobre el soporte de un codo en una tubería o la fuerza sobre un cuerpo sumergido en un flujo de superficie libre.

CONCEPTO CLAVE *La ecuación de la cantidad de movimiento se usa principalmente para determinar las fuerzas inducidas por el flujo.*

Cuando aplicamos la ecuación de la cantidad de movimiento, el fluido circundante y a veces todo el conducto o contenedor se separa del volumen de control. Por ejemplo, en la boquilla horizontal de la figura 4.11a, la boquilla y el fluido en su interior están aislados. Entonces, debe tenerse cuidado de incluir las fuerzas de presión mostradas y la fuerza $\mathbf{F}_{\text{unión}}$. Es conveniente usar presiones manométricas para que la presión que actúa sobre el exterior del tubo sea entonces cero. Alternativamente, podríamos haber seleccionado un volumen de control que incluyera sólo el fluido en la boquilla (figura 4.11b). En ese caso tenemos que considerar las fuerzas de presión en la entrada y salida y la fuerza de presión resultante $\mathbf{F}_{\text{boquilla}}$ de la pared interior de la boquilla en el fluido. Un cuerpo libre de la boquilla excluyendo el fluido muestra que la fuerza $\mathbf{F}_{\text{unión}}$ y $\mathbf{F}_{\text{boquilla}}$ son iguales en magnitud. Si el problema es determinar las fuerzas ejercidas por el flujo sobre la tobera (figura 4.11b), tenemos que invertir la dirección de la fuerza calculada $\mathbf{F}_{\text{boquilla}}$. Ejemplos al final de esta sección ilustran esto.

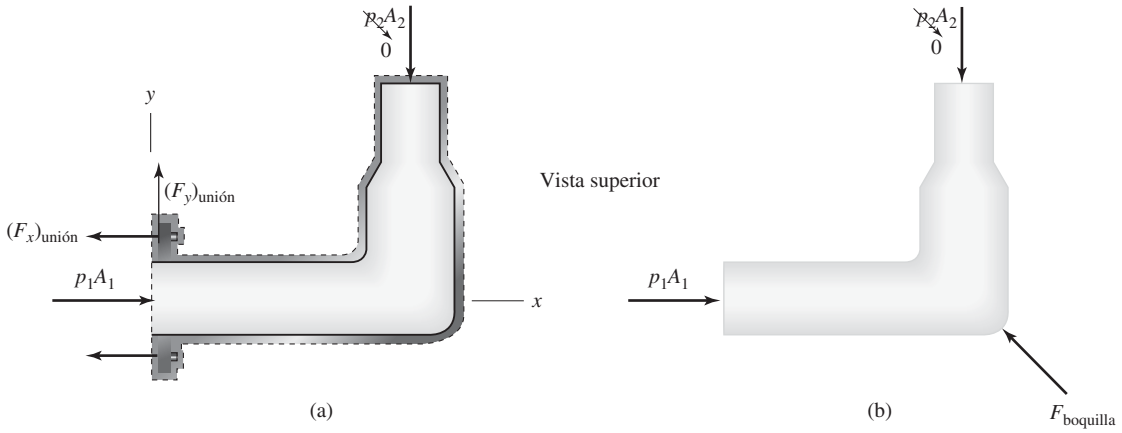


Fig. 4.11 Fuerzas que actúan sobre el volumen de control de una boquilla horizontal: (a) el volumen de control incluye la boquilla y el fluido en ésta; (b) el volumen de control incluye sólo el fluido en la boquilla. Hemos despreciado fuerzas de cuerpo.

4.6.2 Flujo permanente uniforme

La ecuación 4.6.2 puede simplificarse considerablemente si un dispositivo tiene entradas y salidas a través de las cuales puede suponerse que el flujo es uniforme y si el flujo es permanente. Entonces resulta

Flujo de cantidad de movimiento, 896-897

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i A_i \mathbf{V}_i (\mathbf{V}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{4.6.3}$$

donde N es el número de áreas de entrada/salida de flujo.

En una entrada $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -V$ dado que el vector unitario apunta hacia fuera del volumen y en la salida $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -V$. Si hay sólo una entrada y una salida, como en la figura 4.11, la ecuación de la cantidad de movimiento se convierte en

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \rho_2 A_2 V_2 \mathbf{V}_2 - \rho_1 A_1 V_1 \mathbf{V}_1 \tag{4.6.4}$$

Usando continuidad,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

la ecuación de la cantidad de movimiento toma la forma simplificada

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \dot{m}\, (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \tag{4.6.5}$$

CONCEPTO CLAVE *La ecuación de la cantidad de movimiento es una ecuación vectorial que representa tres ecuaciones escalares.*

Observe que la ecuación de la cantidad de movimiento es una ecuación vectorial que representa las tres ecuaciones escalares siguientes

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

$$\Sigma F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}) \tag{4.6.6}$$

$$\Sigma F_z = \dot{m}(V_{2z} - V_{1z})$$

Si consideramos la boquilla de la figura 4.11a y deseamos determinar la componente x de la fuerza de la unión en la boquilla, $(\mathbf{V}_1)_x = V_1$ y $(\mathbf{V}_2)_x = 0$ de modo que la ecuación de la cantidad de movimiento para la dirección x se convierte en

$$\Sigma F_x = -(F_x)_{\text{unión}} + p_1 A_1 = -\dot{m}\, V_1 \tag{4.6.7}$$

De manera similar, podríamos escribir la ecuación de la componente y que contendría el término $(F_y)_{\text{unión}}$.

Un ejemplo de un flujo de superficie libre en un canal rectangular se muestra en la figura 4.12. Si se desea determinar la fuerza de la compuerta sobre el flujo, la siguiente expresión se puede deducir a partir de la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma F_x = -F_{\text{compuerta}} + F_1 - F_2 = \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{4.6.8}$$

donde F_1 y F_2 son fuerzas de presión (vea la figura 4.12)

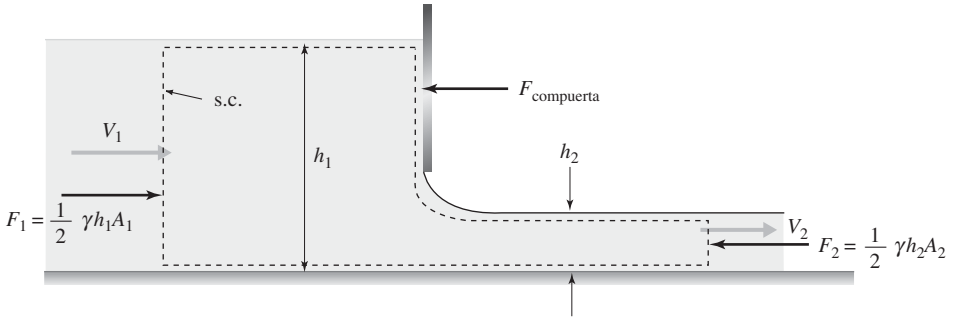


Fig. 4.12 Fuerza del flujo sobre una compuerta en un flujo de superficie libre.

Ejemplo 4.11

Agua fluye por un codo horizontal a 90° y sale a la atmósfera (figura E4.11a). El gasto es 0.3 ft³/s. Calcule la fuerza en cada una de las barras que sostienen el codo en su posición. Desprecie las fuerzas de cuerpo, los efectos viscosos y la fuerza cortante en las barras.

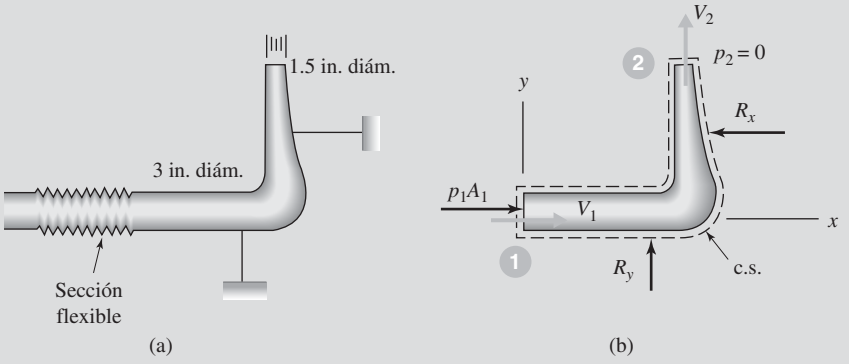


Fig. E4.11

Solución

Hemos seleccionado un volumen de control que rodea al codo, como se muestra en la figura E4.11b. Como las barras han sido cortadas, las fuerzas que éstas ejercen sobre el volumen de control están incluidas. También se muestra la fuerza de presión a la entrada del volumen de control. La sección flexible puede resistir la presión interior, pero no transmite fuerza axial o momento. La fuerza de cuerpo (peso del volumen de control) no actúa en la dirección x o en la y sino normal a ella. Por lo tanto, no se muestran otras fuerzas. Se encuentra que las velocidades promedio son

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.3}{\pi \times (3/12)^2/4} = 6.11 \text{ ft/s}; \qquad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.3}{\pi \times (1.5/12)^2/4} = 24.4 \text{ ft/s}$$

Antes de que podamos calcular las fuerzas R_x y R_y necesitamos hallar las presiones p_1 y p_2. La presión p_2 es cero porque el flujo sale a la atmósfera. La presión en la sección 1 puede determinarse usando la ecuación de la energía o la ecuación de Bernoulli. Despreciando pérdidas entre las secciones 1 y 2, la ecuación de la energía da

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\cancel{p_2}^{\,0}}{\gamma}$$

$$\therefore p_1 = \frac{\gamma}{2g}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{62.4 \text{ lb/ft}^3}{2 \times 32.2 \text{ ft/s}^2}\ (24.4^2 - 6.11^2) \text{ ft}^2/\text{s}^2 = 541 \text{ psf}$$

Ahora podemos aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento (4.6.5) en la dirección x para hallar R_x y en la dirección y para hallar R_y:

dirección x:

$$p_1A_1 - R_x = \dot{m}(\cancel{V_{2x}}^{\,0} - V_{1x})$$

$$541 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{12}\right)^2 - R_x = 1.94 \text{ slug/ft}^3 \times 0.3 \text{ ft}^3/\text{s} \times (-6.11) \text{ ft/s}$$

$$\therefore R_x = 30.1 \text{ lb}$$

dirección y:

$$R_y = \dot{m}(V_{2y} - \cancel{V_{1y}}^{\,0})$$

$$= 1.94 \times 0.3 \times 24.4 = 14.2 \text{ lb}$$

Utilizamos lb = slug-ft/s². Observe que hemos supuesto perfiles uniformes y flujo permanente y empleado $\dot{m} = \rho Q$. Éstas son las suposiciones usuales si no se da otra información.

Ejemplo 4.11a Volúmenes de control, ejemplo de codo en una tubería, 918-923

Ejemplo 4.12

Cuando la velocidad de un flujo en un canal rectangular abierto de ancho w es relativamente grande, es posible que el flujo "salte" de una profundidad y_1 a una profundidad y_2 en una distancia relativamente corta, como se muestra en la figura E4.12a; esto se conoce como *salto hidráulico*. Exprese y_2 en términos de y_1 y V_1; suponga un flujo horizontal uniforme.

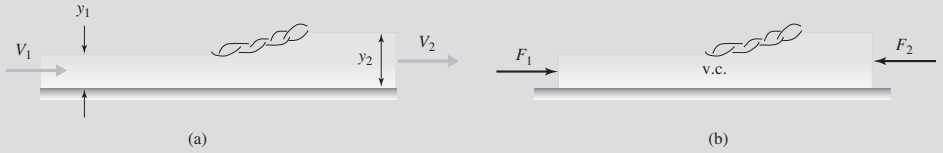


Fig. E4.12

Solución

Se selecciona un volumen de control como se muestra en la figura E4.12b con áreas de entrada y salida corriente arriba y corriente abajo del "salto", suficientemente alejadas para que las líneas de corriente sean paralelas a la pared con distribuciones de presión hidrostática. Desprecie el arrastre presente en las paredes (si la distancia entre las secciones es relativamente pequeña, la fuerza de arrastre debe ser insignificante), la ecuación de la cantidad de movimiento puede ser manipulada como sigue:

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

$$F_1 - F_2 = \rho A_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

$$\gamma \frac{y_1}{2}(y_1 w) - \gamma \frac{y_2}{2}(y_2 w) = \rho y_1 w V_1 \left(V_1 \frac{y_1}{y_2} - V_1\right)$$

donde hemos expresado F_1 y F_2 usando la ecuación 2.4.24, y la continuidad en la forma de la ecuación 4.4.6, de modo que

$$V_2 = \frac{y_1}{y_2} V_1$$

La ecuación anterior de la cantidad de movimiento puede simplificarse en

$$\frac{\gamma}{2}(y_1^2 - y_2^2) = \rho y_1 V_1^2 \frac{y_1 - y_2}{y_2}$$

o bien,

$$\frac{g}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = \frac{y_1}{y_2} V_1^2 (y_1 - y_2)$$

El factor $(y_1 - y_2)$ se elimina y y_2 se encuentra suponiendo que y_1 y V_1 se conocen como sigue:

$$\frac{g}{2}(y_1 + y_2) = \frac{y_1}{y_2} V_1^2$$

$$y_2^2 + y_1 y_2 - \frac{2}{g} y_1 V_1^2 = 0$$

$$\therefore y_2 = \frac{1}{2}\left(-y_1 + \sqrt{y_1^2 + \frac{8}{g} y_1 V_1^2}\right)$$

donde se ha usado la fórmula cuadrática. La ecuación de la energía podría usarse ahora para obtener una expresión para las pérdidas en el salto hidráulico.

Ejemplo 4.12a Volúmenes de control, Ejemplo de manguera de bombero, 911-917

Ejemplo 4.13

Considere el flujo simétrico de aire alrededor del cilindro. El volumen de control, excluyendo el cilindro, se muestra en la figura E4.13. La distribución de velocidad corriente abajo del cilindro se aproxima con la parábola, como se muestra. Determine la fuerza de arrastre por metro de longitud que actúa sobre el cilindro. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

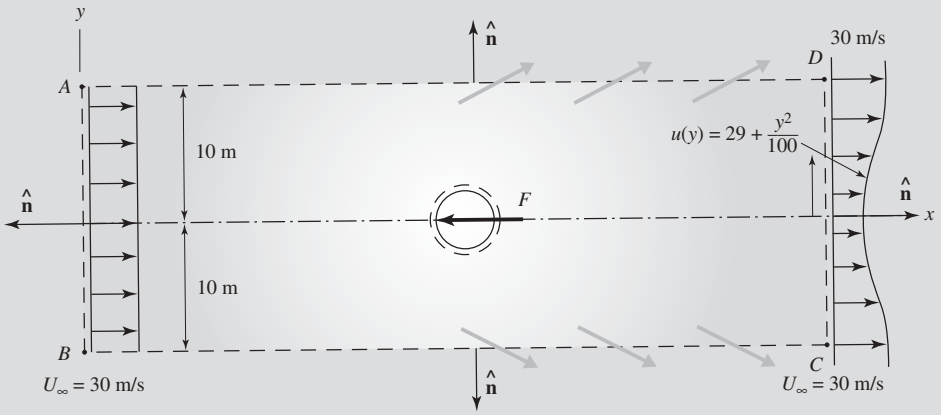


Fig. E4.13

Solución

Primero, debemos reconocer que no todo el flujo másico que entra por AB sale por CD; en consecuencia, parte del flujo másico debe salir por AD y BC, como se muestra. La ecuación de la cantidad de movimiento (4.6.2) para el flujo permanente, aplicada al volumen de control $ABCD$, toma la forma

$$-F = \int_{s.c.} \rho V_x \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{A_{CD}} \rho u\, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{AD}} \rho u\, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{BC}} \rho u \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{AB}} \rho u \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

$$= \int_{A_{CD}} \rho u^2\, dA + U_\infty \dot{m}_{AD} + U_\infty \dot{m}_{BC} - \int_{A_{AB}} \rho u^2\, dA$$

$$= 2\int_0^{10} 1.23\left(29 + \frac{y^2}{100}\right)^2 dy + 2 \times 30 \dot{m}_{AD} - 1.23 \times 30^2 \times 20$$

donde $\dot{m}_{BC} = \dot{m}_{AD}$ es el flujo másico que cruza BC y AD con la componente x de la velocidad igual a 30 m/s. El límite de 10 m se usó en $y = 10$ m, la parábola da $u(10) = 30$ m/s. Hemos usado la ecuación 4.4.9 para $\dot{m}_{AD}$ y $\dot{m}_{BC}$ reconociendo que $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} = V_n$,, la cual sería la velocidad de la pequeña componente y. Ahora usamos la continuidad para hallar $\dot{m}_{AD}$:

$$0 = \int \rho \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA = \int_{A_{AD}} \rho \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA + \int_{A_{BC}} \rho \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA + \int_{A_{CD}} \rho \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA + \int_{A_{AB}} \rho \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA$$

$$= \dot{m}_{AD} + \dot{m}_{BC} + 2\int_0^{10} \rho u(y)\, dy - \rho \times 20 \times 30$$

$$= 2\dot{m}_{AD} + 2\int_0^{10} 1.23 \times \left(29 + \frac{y^2}{100}\right) dy - 1.23 \times 20 \times 30$$

$$\therefore \dot{m}_{AD} = 8.2 \text{ kg/s por metro de longitud}$$

Evaluando los términos de la ecuación de la cantidad de movimiento anterior tendremos

$$F = -21\,170 - 492 + 22\,140$$
$$= 478 \text{ N/m}$$

Ejemplo 4.14

Encuentre una expresión para la pérdida de altura o carga en una expansión repentina en un tubo en términos de V_1 y la razón entre áreas (figura E4.14a). Suponga perfiles de velocidad uniforme y que la presión en el ensanchamiento repentino es p_1.

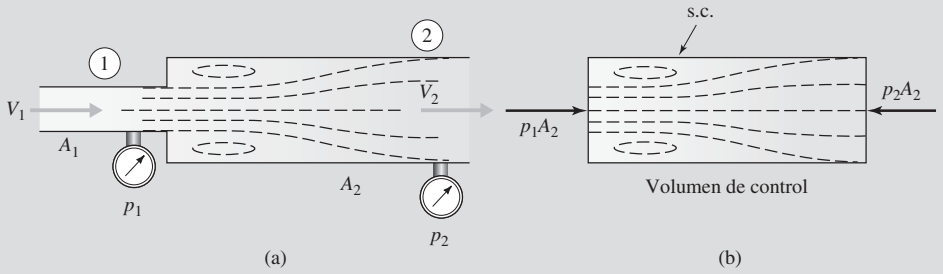


Fig. E4.14

Solución

La figura E4.14a muestra una repentina expansión en la que el diámetro cambia de d_1 a d_2. La presión en el ensanchamiento repentino está más cercana a p_1 dado que las líneas de corriente son aproximadamente paralelas como se muestra (no hay variación de presión normal a líneas de corriente paralelas); requieren de cierta distancia para de nuevo llenar el tubo. De aquí que la fuerza que actúa sobre el extremo izquierdo del volumen de control mostrado en la figura E4.14b es p_1A_2. La segunda ley de Newton aplicada al volumen de control da, suponiendo perfiles uniformes,

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$(p_1 - p_2)A_2 = \rho A_2 V_2 (V_2 - V_1)$$

$$\therefore \frac{p_1 - p_2}{\rho} = V_2(V_2 - V_1)$$

La ecuación de la energía (4.5.17) da

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \cancelto{0}{z_2 - z_1} + h_L$$

$$\therefore h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$= \frac{V_2(V_2 - V_1)}{g} - \frac{(V_2 + V_1)(V_2 - V_1)}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

Para expresar esto en términos sólo de V_1, podemos usar la continuidad y relacionar

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

Entonces la expresión anterior para la pérdida de altura o carga se convierte en

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

4.6.3 Ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a deflectores

La aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento a deflectores constituye una parte integral del análisis de numerosas turbomáquinas, tales como turbinas, bombas y compresores. En esta sección ilustramos los pasos en dicho análisis. Se separa en dos partes: chorros de fluido desviados por deflectores estacionarios y chorros de fluido desviados por deflectores en movimiento. Para ambos problemas supondremos lo siguiente:

- La presión externa a los chorros de fluido es constante en todas partes, de modo que la presión en el fluido cuando se mueve sobre un deflector permanece constante.
- La resistencia friccional debida a la interacción entre el fluido y el deflector es insignificante, de modo que la velocidad relativa entre la superficie del deflector y la corriente de chorro permanece sin cambio, un resultado de la ecuación de Bernoulli.
- La dispersión lateral de un chorro plano es insignificante.
- La fuerza de cuerpo, el peso del volumen de control, es pequeño y será despreciado.

CONCEPTO CLAVE *La presión en el fluido cuando se mueve sobre un deflector permanece constante.*

CONCEPTO CLAVE *La velocidad relativa entre la superficie del deflector y la corriente del chorro permanece sin cambio.*

Deflector estacionario. Primero consideremos el deflector estacionario, ilustrado en la figura 4.13. La ecuación de Bernoulli nos permite concluir que las magnitudes de los vectores velocidad son iguales (es decir, $V_2 = V_1$), dado que se supone que la presión es constante externa al chorro de fluido y los cambios de elevación son insignificantes (vea la ecuación 3.4.9). Suponiendo un flujo uniforme, permanente, la ecuación de la cantidad de movimiento toma la forma de la ecuación 4.6.5, que para las direcciones x y y se convierte en

$$\begin{aligned} -R_x &= \dot{m}(V_2 \cos \alpha - V_1) = \dot{m}V_1(\cos \alpha - 1) \\ R_y &= \dot{m}V_2 \operatorname{sen} \alpha = \dot{m}V_1 \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

Para determinadas condiciones de un chorro, las componentes de la fuerza de reacción pueden calcularse.

Deflectores en movimiento. La situación que comprende un deflector en movimiento depende de si un solo deflector se mueve (la hoja en una quitanieves o un cucharón de agua que se usa para frenar un tren de alta velocidad) o si se mueve una serie de deflectores (los álabes de una turbina). Consideremos primero que un solo deflector como el que se muestra en la figura 4.14 se mueve en la dirección x positiva con una velocidad V_B. En un marco de referencia unido a la boquilla esta-

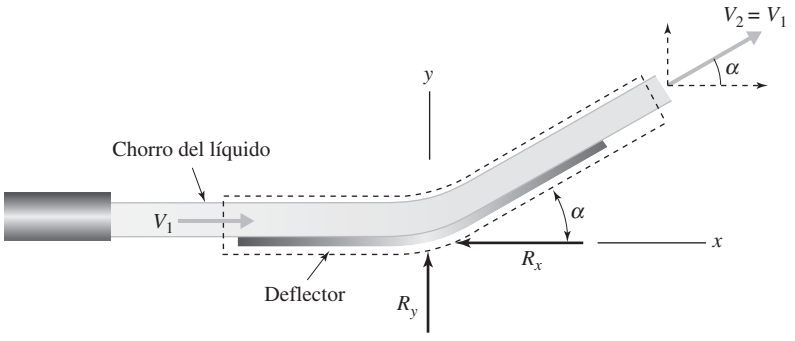


Fig. 4.13 Deflector estacionario.

[2]Éste es un punto bastante sutil. Para determinar si un flujo es permanente, se observa el flujo en un punto dado en el espacio. Si una propiedad del flujo cambia con el tiempo en ese punto, el flujo no es permanente. En esta situación, si centramos nuestra atención en un punto determinado justo antes de la hoja, como el punto A en la figura 4.14, primero no hay flujo, a continuación, la hoja y el chorro pasan a través del punto, luego, de nuevo no hay flujo. Éste es un flujo no permanente.

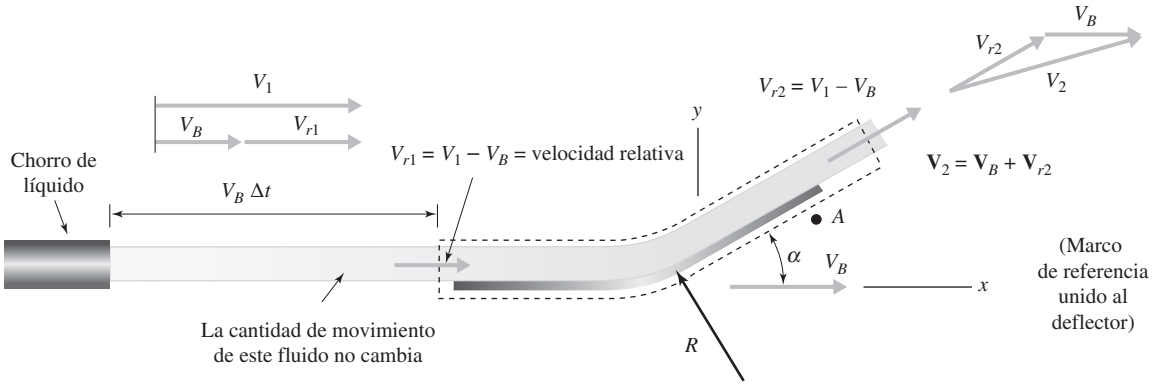


Fig. 4.14 Deflector en movimiento.

cionaria, de la cual sale el chorro de fluido, el flujo no es permanente;[2] esto es, en un punto particular en el espacio, la situación del flujo varía con el tiempo. Sin embargo, se observa un flujo permanente desde un marco de referencia unido al deflector. Desde este marco de referencia inercial, moviéndonos con una velocidad constante V_B, observamos que la velocidad relativa V_{r1} que entra al volumen de control es $V_1 - V_B$ como se muestra. Es esta velocidad relativa la que permanece constante conforme fluye fluido con respecto al deflector; no cambia porque la presión no cambia. En consecuencia, desde este marco de referencia en movimiento, la ecuación de la cantidad de movimiento (4.6.5) toma las formas

$$\begin{aligned} -R_x &= \dot{m}_r(V_1 - V_B)(\cos\alpha - 1) \\ R_y &= \dot{m}_r(V_1 - V_B)\,\text{sen}\,\alpha \end{aligned} \tag{4.6.10}$$

donde $\dot{m}_r$ representa sólo esa parte del flujo másico que sale del chorro fijo que ha cambiado su cantidad de movimiento. Como el deflector se aleja del chorro fijo, parte del fluido que sale del chorro fijo nunca experimenta un cambio de cantidad de movimiento; este fluido está representado por la distancia $V_B\Delta t$, mostrado en la figura 4.14. Por lo tanto

$$\dot{m}_r = \rho A(V_1 - V_B) \tag{4.6.11}$$

donde la velocidad relativa $(V_1 - V_B)$ se usa en el cálculo; el flujo másico ρAV_B se resta del flujo másico de salida ρAV_1 para proporcionar el flujo másico $\dot{m}_r$. que experimenta un cambio de cantidad de movimiento.

Para una serie de álabes (en cascada), los chorros pueden orientarse a un cierto ángulo, como se muestra en la figura 4.15. La fuerza real en un álabe particular sería cero hasta que el chorro incida sobre el álabe; entonces la fuerza aumentaría a un máximo y disminuiría a cero cuando el chorro ya no incide sobre el álabe. Idealizaremos la situación como sigue: suponga que, en promedio, el chorro es desviado por los álabes como se muestra en las figuras 4.15 y 4.16a, vistas desde un marco de referencia estacionario; el chorro de fluido incide en los álabes a un ángulo β_1 y sale a un ángulo β_2. Lo que se desea, sin embargo, es que la velocidad relativa entre a los álabes tangente al borde de ataque de los álabes, es decir, V_{r1} en la figura 4.16b está a un ángulo α_1. La velocidad relativa entonces permanece constante conforme el fluido se desplaza sobre el álabe con la velocidad relativa de salida V_{r2} saliendo con el ángulo del álabe α_2. Las velocidades relativa y absoluta están relacionadas con las ecuaciones de velocidad que son ilustradas por los polígonos de velocidad de las figuras 4.16b y 4.16c.

CONCEPTO CLAVE *La velocidad relativa permanece constante conforme el fluido se desplaza sobre un álabe en movimiento, es decir,* $V_{r2} = V_{r1}$.

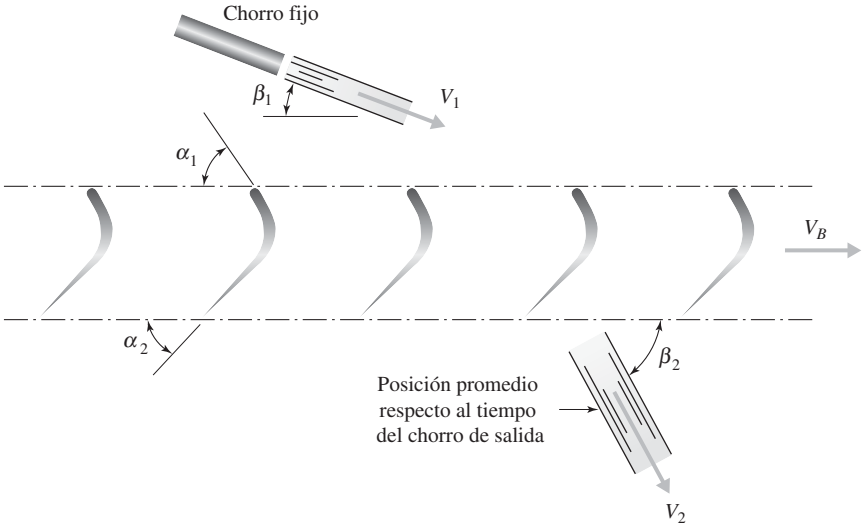


Fig. 4.15 Fluido incidiendo sobre una serie de álabes.

Suponiendo que toda la masa que sale del chorro fijo ha cambiado su cantidad de movimiento, podemos escribir la ecuación de la cantidad de movimiento como

$$-R_x = \dot{m}\,(V_{2x} - V_{1x}) \tag{4.16.12}$$

El ejemplo 4.17 ilustrará los detalles.

CONCEPTO CLAVE *Sólo la componente x de la fuerza está relacionado con la salida de potencia.*

Comúnmente el interés se concentra en la componente x de la fuerza dado que es esta componente la que está relacionada con la salida de potencia (o requerimiento). La potencia se hallaría multiplicando la componente x de la fuerza por la velocidad del álabe para cada chorro; esto toma la forma

$$\dot{W} = NR_xV_B \tag{4.6.13}$$

donde N representa el número de chorros. La componente y de la fuerza no se mueve en la dirección y, de modo que no produce potencia.

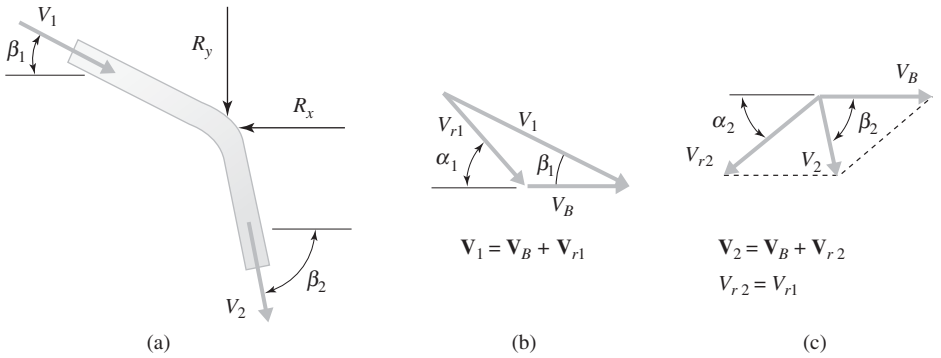


Fig. 4.16 Detalle de la situación de flujo que comprende una serie de álabes: (a) posición promedio del chorro; (b) polígono de velocidad de entrada; (c) polígono de velocidad de salida.

Ejemplo 4.15

Un deflector desvía una lámina de agua un ángulo de 30º como se muestra en la figura E4.15. ¿Cuáles componentes de la fuerza son necesarias para mantener el deflector en su lugar si $\dot{m} = 32$ kg/s?

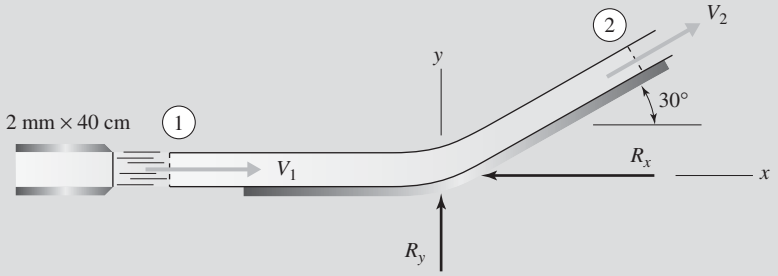


Fig. E4.15

Solución

El volumen de control que hemos seleccionado incluye el deflector y el agua adyacente a éste. La única fuerza que está actuando sobre el volumen de control se debe a un soporte necesario para sostener el deflector. Esta fuerza se ha descompuesto en R_x y R_y.

Se encuentra que la velocidad V_1 es

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1}$$

$$= \frac{32}{1000 \times 0.002 \times 0.4} = 40 \text{ m/s}$$

La ecuación de Bernoulli (3.4.8) muestra que si la presión no cambia, entonces la magnitud de la velocidad no cambia, siempre que no haya cambio importante en elevación y que los efectos viscosos sean insignificantes; así podemos concluir que $V_2 = V_1$ porque $p_2 = p_1$. A continuación, la ecuación de la cantidad de movimiento se aplica en la dirección x para hallar R_x y después en la dirección y para R_y:

dirección x: $$-R_x = \dot{m}\,(V_{2x} - V_{1x})$$

$$= 32 \text{ kg/s } (40 \cos 30° - 40)\text{m/s}$$

$$\therefore R_x = 172 \text{ N}$$

dirección y: $$R_y = \dot{m}(V_{2y} - \overset{0}{\cancel{V_{1y}}})$$

$$= 32(40 \text{ sen } 30°) = 640 \text{ N}$$

Ejemplo 4.16

El deflector que se muestra en la figura E4.16 se mueve a la derecha a 30 m/s mientras que la boquilla permanece estacionaria. Determine (a) las componentes de la fuerza necesarias para soportar el deflector, (b) $\mathbf{V}_2$ según un observador fijo, y (c) la potencia generada por el álabe. La velocidad del chorro es 80 m/s.

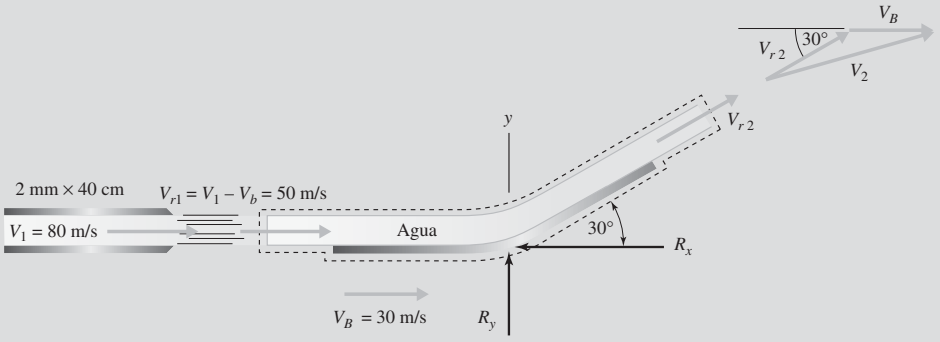


Fig. E4.16

Solución

(a) Para resolver el problema de un deflector en movimiento, observamos el flujo desde un marco de referencia unido al deflector. En este marco de referencia en movimiento el flujo es permanente y la ecuación de Bernoulli con $p_1 = p_2$ puede usarse entonces para demostrar que $V_{r1} = V_{r2} = 50$ m/s, la velocidad de la lámina de agua como es vista desde el deflector. Observe que no podemos aplicar la ecuación de Bernoulli en un marco de referencia fijo porque el flujo no sería permanente. Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento al volumen de control en movimiento, que está indicado otra vez por la línea discontinua, obtenemos lo siguiente:

$$\text{dirección } x: \quad -R_x = \dot{m}_r[(V_{r2})_x - (V_{r1})_x]$$
$$= 1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.002 \text{ m} \times 0.4 \text{ m} \times 50 \text{ m/s}\,(50 \cos 30° - 50) \text{ m/s}$$
$$\therefore R_x = 268 \text{ N}$$
$$\text{dirección } y: \quad R_y = \dot{m}_r[(V_{r2})_y - \overset{0}{\cancel{(V_{r1})_y}}]$$
$$= 1000 \times 0.002 \times 0.4 \times 50(50 \text{ sen } 30°) = 1000 \text{ N}$$

Al calcular $\dot{m}_r$, debemos usar sólo el agua que ha cambiado su cantidad de movimiento; en consecuencia, la velocidad empleada es 50 m/s.

(b) Vista por un observador fijo, la velocidad $\mathbf{V}_2$ del fluido después de la desviación es $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{r2} + \mathbf{V}_B$, donde $\mathbf{V}_{r2}$ está dirigida tangencial al deflector a la salida y tiene una magnitud igual a V_{r1} (vea el diagrama de velocidad anterior). Entonces

$$(V_2)_x = V_{r2} \cos 30° + V_B$$
$$= 50 \times 0.866 + 30 = 73.3 \text{ m/s}$$
$$(V_2)_y = V_{r2} \text{ sen } 30°$$
$$= 50 \times 0.5 = 25 \text{ m/s}$$

Por último,

$$\mathbf{V}_2 = 73.3\,\hat{\mathbf{i}} + 25\,\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

(c) La potencia generada por el álabe en movimiento es igual a la velocidad del álabe por la fuerza que éste ejerce en la dirección del movimiento. Por tanto,

$$\dot{W} = V_B \times R_x = 30 \text{ m/s} \times 268 \text{ N} = 8040 \text{ W}$$

Ejemplo 4.17

Chorros de aire a alta velocidad inciden tangencialmente con los álabes de un rotor de turbina mientras que el rotor de 1.5 m de diámetro gira a 140 rad/s (figura E4.17a). Hay 10 de estos chorros de 4 cm de diámetro. Calcule la potencia de salida máxima. La densidad del aire es 2.4 kg/m^3.

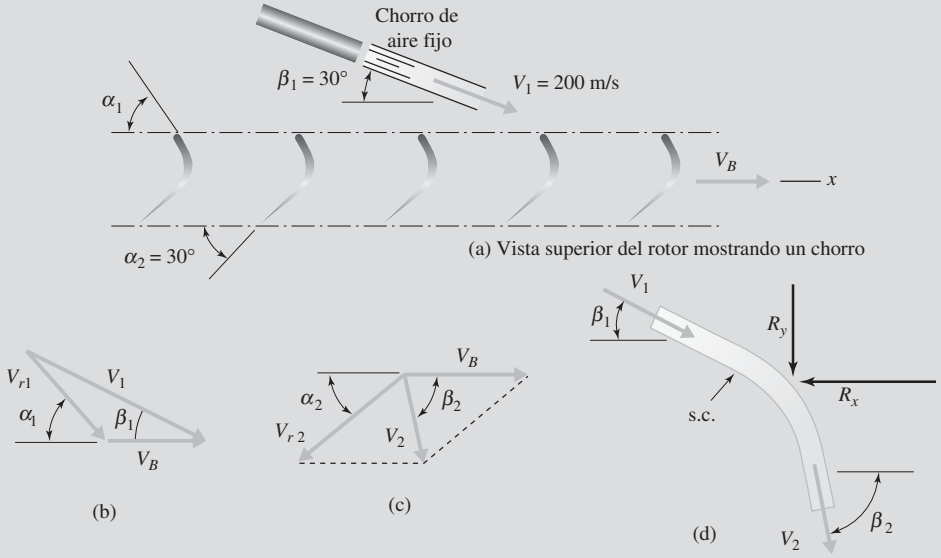


Fig. E4.17

Solución

El ángulo α_1 del álabe se determina por el dato de que el chorro de aire entre tangencialmente a los álabes, como se observa desde el álabe en movimiento; esto es, el vector velocidad relativa $\mathbf{V}_r$ debe formar el ángulo α_1 con respecto a la velocidad $\mathbf{V}_B$. Esto se muestra en la figura E4.17b. La velocidad relativa de entrada es $\mathbf{V}_{r1}$ (figura E4.17), y la velocidad relativa de salida es $\mathbf{V}_{r2}$ (figura E4.17c). Ambos polígonos de velocidad están representados por la ecuación vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_B$$

que expresa que la velocidad absoluta es igual a la velocidad relativa más la velocidad del álabe. Del polígono a la entrada tenemos

$$\begin{aligned} V_1 \operatorname{sen}\beta_1 &= V_{r1} \operatorname{sen}\alpha_1 \\ V_1 \cos\beta_1 &= V_{r1} \cos\alpha_1 + V_B \\ \therefore 200 \operatorname{sen} 30° &= V_{r1} \operatorname{sen}\alpha_1 \\ 200 \cos 30° &= V_{r1} \cos\alpha_1 + 0.75 \times 140 \end{aligned}$$

donde V_B es el radio multiplicado por la velocidad angular. Una solución simultánea nos da

$$V_{r1} = 121 \text{ m/s} \qquad \alpha_1 = 55.7°$$

La fricción entre el aire y el álabe es bastante pequeña y puede despreciarse al calcular la salida máxima. Esto nos permite suponer que $V_{r2} = V_{r1}$. Del polígono de velocidad de salida podemos escribir

$$\begin{aligned} V_B - V_{r2} \cos\alpha_2 &= V_2 \cos\beta_2 \\ V_{r2} \operatorname{sen}\alpha_2 &= V_2 \operatorname{sen}\beta_2 \\ \therefore 0.75 \times 140 - 121 \cos 30° &= V_2 \cos\beta_2 \\ 121 \operatorname{sen} 30° &= V_2 \operatorname{sen}\beta_2 \end{aligned}$$

(*continúa*)

Una solución simultánea resulta en

$$V_2 = 60.5 \text{ m/s} \qquad \beta_2 = 89.8°$$

La ecuación de la cantidad de movimiento aplicada al volumen de control, mostrada en la figura E4.17d, nos da

$$\begin{aligned} -R_x &= \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \\ &= 2.4 \text{ kg/m}^3 \times \pi \times 0.02^2 \text{ m}^2 \times 200 \text{ m/s}(60.5 \cos 89.8° - 200 \cos 30°) \text{ m/s} \\ \therefore R_x &= 104.3 \text{ N} \end{aligned}$$

Hay 10 chorros, cada uno de ellos produce la fuerza anterior. La potencia de salida máxima es entonces

$$\begin{aligned} \text{poder} &= 10 \times R_x \times V_B \\ &= 10 \times 104.3 \text{ N} \times (0.75 \times 140) \text{ m/s} = 109\,600 \text{ W} \quad \text{o} \quad 109.6 \text{ kW} \end{aligned}$$

4.6.4 Ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a hélices

La aplicación de la cantidad de movimiento a hélices también es de suficiente interés, por lo que esta sección está dedicada a ilustrar el procedimiento. Considere la hélice de la figura 4.17, con las líneas de corriente mostradas formando la superficie de un volumen de control en el que el fluido entra con una velocidad uniforme V_1 y sale con una velocidad uniforme V_2. Las líneas de corriente externas tocan apenas las puntas de las hélices. Esta situación de flujo puede verse como idéntica a la de una hélice que se mueve con velocidad V_1 en un fluido estancado al sumar V_1 a la izquierda en la figura 4.17. La ecuación de la cantidad de movimiento, aplicada al volumen de control grande mostrado, nos da

$$F = \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{4.6.14}$$

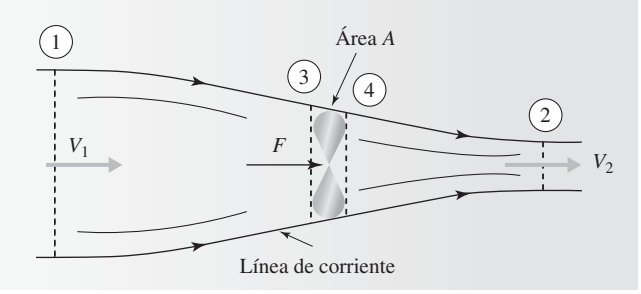


Fig. 4.17 Hélice en un flujo fluido.

Este volumen de control no es suficiente, sin embargo, dado que las áreas A_1 y A_2 son desconocidas. Conocemos el área de flujo A de la hélice. Entonces un volumen de control se traza cercano a la hélice de modo que $V_3 \cong V_4$ y $A_3 \cong A_4 = A$. La ecuación de la cantidad de movimiento (4.6.5) en la dirección x nos da

$$F + p_3A - p_4A = 0 \tag{4.6.15}$$

o bien,

$$F = (p_4 - p_3)A \tag{4.6.16}$$

Ahora, como los efectos viscosos serían muy pequeños en esta situación de flujo, se usa la ecuación de la energía hasta la hélice y luego corriente abajo desde la hélice para obtener

$$\frac{V_1^2 - V_3^2}{2} + \frac{p_1 - p_3}{\rho} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{V_4^2 - V_2^2}{2} + \frac{p_4 - p_2}{\rho} = 0 \tag{4.6.17}$$

Sumando estas ecuaciones, reconociendo que $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$, tendremos

$$(V_2^2 - V_1^2)\frac{\rho}{2} = p_4 - p_3 \tag{4.6.18}$$

Insertando esto y la ecuación 4.6.16 en la ecuación 4.6.14, resulta en

$$V_3 = \frac{1}{2}(V_2 + V_1) \tag{4.6.19}$$

donde hemos usado $\dot{m} = \rho A V_3$ dado que el área de la hélice es la única área conocida. Este resultado muestra que la velocidad del fluido que se mueve a través de la hélice es el promedio de las velocidades corriente arriba y corriente abajo.

CONCEPTO CLAVE *La velocidad del fluido que se mueve a través de la hélice es el promedio de las velocidades corriente arriba y corriente abajo.*

La potencia de entrada necesaria para producir este efecto se encuentra al aplicar la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2, donde las presiones son atmosféricas; despreciando las pérdidas, la ecuación 4.5.17 toma la forma de

$$\dot{W}_{\text{fluido}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\dot{m} \tag{4.6.20}$$

donde $\dot{W}_{\text{fluido}}$ es la entrada de energía entre las dos secciones. La hélice en movimiento requiere una potencia dada por

$$\begin{aligned}\dot{W}_{\text{hél}} &= F \times V_1 \\ &= \dot{m}V_1(V_2 - V_1)\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

La eficiencia teórica de la hélice es entonces

$$\eta_P = \frac{\dot{W}_{\text{hél}}}{\dot{W}_{\text{fluido}}} = \frac{V_1}{V_3} \tag{4.6.22}$$

CONCEPTO CLAVE *En un generador eólico, la velocidad corriente abajo se reduce y el diámetro se aumenta.*

En contraste con la hélice, un generador eólico extrae energía del flujo de aire; la velocidad corriente abajo se reduce y el diámetro se aumenta.

4.6.5 Flujo permanente no uniforme

Si no podemos suponer perfiles de velocidad uniformes, podemos hacer que el flujo de la cantidad de movimiento se exprese como

$$\int_A V^2\, dA = \beta \overline{V}^2 A \tag{4.6.23}$$

donde hemos introducido el *factor de corrección por cantidad de movimiento* β, expresado en forma explícita como

$$\beta = \frac{\int V^2\, dA}{\overline{V}^2 A} \tag{4.6.24}$$

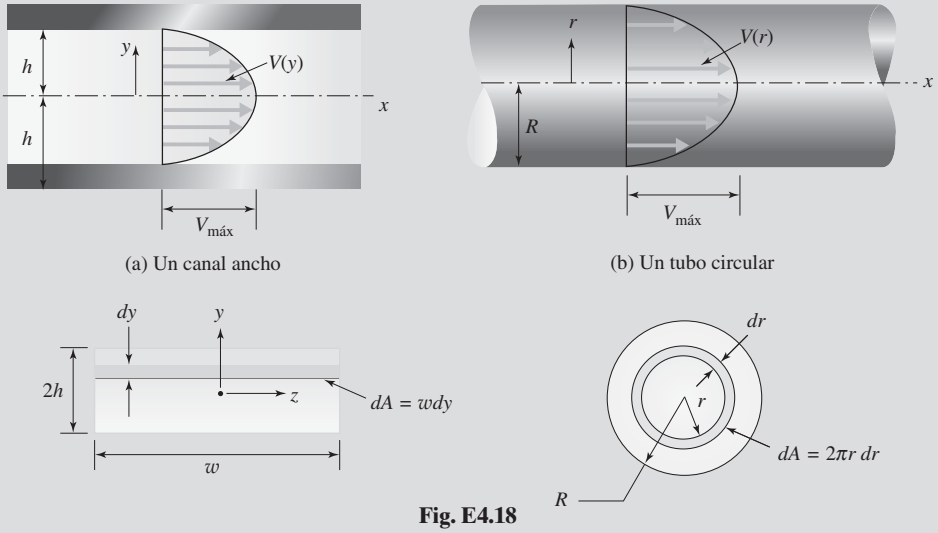
La ecuación de la cantidad de movimiento (4.6.5), para un flujo permanente con una entrada y una salida, puede entonces escribirse como

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \dot{m}(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1) \tag{4.6.25}$$

Para un flujo laminar con un perfil parabólico en un tubo circular, $\beta = 4/3$. No obstante, si se da un perfil, la integral suele integrarse y se usa la ecuación 4.6.2.

Ejemplo 4.18

Calcule el factor de corrección por cantidad de movimiento para un perfil parabólico (a) entre placas paralelas y (b) en un tubo circular. Los perfiles parabólicos se muestran en la figura E4.18.



(a) Un canal ancho

(b) Un tubo circular

Fig. E4.18

Solución

(a) Un perfil parabólico entre placas paralelas puede expresarse como

$$V(y) = V_{máx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

donde y se mide desde la línea centro, la velocidad es cero en las paredes donde $y = \pm h$, y $V_{máx}$ es la velocidad de la línea de centro en $y = 0$. Primero, encontremos la velocidad promedio. Es

$$\overline{V} = \frac{1}{A}\int V\,dA$$
$$= \frac{1}{hw}\int_0^h V_{máx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) w\,dy = \frac{V_{máx}}{h}\left(h - \frac{1}{3}h\right) = \frac{2}{3}V_{máx}$$

donde hemos integrado sobre la mitad superior de la sección transversal. Entonces

$$\beta = \frac{\int V^2\,dA}{\overline{V}^2 A} = \frac{2}{\frac{4}{9}V_{máx}^2 \times 2hw}\int_0^h V_{máx}^2\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)^2 w\,dy = \frac{6}{5}$$

donde el factor "2" en el numerador toma en cuenta la mitad inferior del canal.

(b) Para un tubo circular un perfil parabólico puede escribirse como

$$V(r) = V_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

donde R es el radio del tubo y $V = 0$ para $r = R$. Se encuentra que la velocidad promedio es

$$\overline{V} = \frac{1}{A}\int V\,dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,dr = \frac{1}{2}V_{máx}$$

El factor de corrección por cantidad de movimiento es entonces

$$\beta = \frac{\int V^2 dA}{\overline{V}^2 A} = \frac{1}{\frac{1}{4}V_{máx}^2 \pi R^2}\int_0^R V_{máx}^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 2\pi r\,dr = \frac{4}{3}$$

Los factores de corrección anteriores pueden usarse para expresar el flujo de la cantidad de movimiento a través de un área de sección transversal como $\beta\rho A\overline{V}^2$.

CONCEPTO CLAVE *Es necesario un marco de referencia no inercial para estudiar el flujo de un cohete.*

4.6.6 Marcos de referencia no inerciales

En ciertas situaciones puede ser necesario escoger un marco de referencia no inercial en el que se mida la velocidad. Éste sería el caso si fuéramos a estudiar el flujo a través del brazo de una máquina lavaplatos, alrededor del álabe de una turbina, o desde un cohete. Relativa a un marco de referencia no inercial, la segunda ley de Newton toma la forma (consulte la ecuación 3.2.15)

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{\text{sist}} \left[\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right]\rho\, d\mathcal{V} \qquad (4.6.26)$$

donde $\mathbf{V}$ es la velocidad relativa al marco no inercial; la aceleración $\mathbf{a}$ de cada partícula del sistema ya está tomada en cuenta en la primera integral. Es frecuente que la ecuación 4.6.26 se escriba como

$$\Sigma \mathbf{F} - \mathbf{F}_I = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA \qquad (4.6.27)$$

donde $\mathbf{F}_I$ se denomina "fuerza de cuerpo inercial," dada por

$$\mathbf{F}_I = \int_{\text{sist}} \left[\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right]\rho\, d\mathcal{V} \qquad (4.6.28)$$

Como el sistema y el volumen de control son idénticos en el instante t, la integración del sistema puede ser sustituida con una integración de un volumen de control en la integral de la ecuación 4.6.28. El ejemplo 4.19 ilustrará el uso de un marco de referencia no inercial.

Ejemplo 4.19

El cohete que se muestra en la figura E4.19, con una masa inicial de 150 kg, quema combustible a razón de 10 kg/s con una velocidad de escape constante de 700 m/s. ¿Cuál es la aceleración inicial del cohete y la velocidad después de 1 s? Desprecie la resistencia al avance en el cohete.

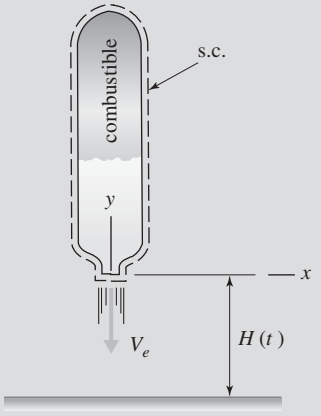


Fig. E4.19

Solución

El volumen de control está dibujado e incluye todo el cohete. El marco de referencia unido al cohete está acelerando hacia arriba a d^2H/dt^2. La segunda ley de Newton se escribe como, usando z hacia arriba,

$$\Sigma F_z - (F_I)_z = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho V_z \, d\forall + \int_{\text{s.c.}} \rho V_z \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$\therefore -W - \frac{d^2H}{dt^2} m_{\text{v.c.}} = \rho_e(-V_e)V_e A_e$$

donde

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho V_z d\forall \approx 0$$

como V_z es la velocidad de cada uno de los elementos de masa $\rho \, d\forall$ relativa al marco de referencia unido al volumen de control; la única fuerza vertical es el peso W; y $m_{\text{v.c.}}$ es la masa del volumen de control. Por continuidad vemos que

$$m_{\text{v.c.}} = 150 - \dot{m}t = 150 - 10t$$

$$\therefore W = (150 - 10t) \times 9.81$$

La ecuación de la cantidad de movimiento se convierte en

$$-(150 - 10t) \times 9.81 - \frac{d^2H}{dt^2}(150 - 10t) = -\dot{m}_e V_e = -10 \times 700 = -7000$$

Esto se escribe como

$$\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{700}{15 - t} - 9.81$$

La aceleración inicial se encuentra al hacer $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2H}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{700}{15} - 9.81 = 36.9 \text{ m/s}^2$$

Integremos la expresión para d^2H/dt^2 y obtendremos

$$\frac{dH}{dt} = -700 \ln (15 - t) - 9.81t + C$$

La constante $C = 700 \ln 15$ porque $dH/dt = 0$ en $t = 0$. Entonces, en $t = 1$ s la velocidad es

$$\frac{dH}{dt} = 700 \ln \frac{15}{14} - 9.81 \times 1 = 38.5 \text{ m/s}$$

Ejemplo 4.19a Laboratorio virtual de chorro a presión, 932-935

4.7 ECUACIÓN DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En la sección anterior determinamos la magnitud de las componentes de la fuerza en varias situaciones de flujo. Para determinar la línea de acción de una componente de la fuerza dada, con frecuencia es necesario aplicar la ecuación del momento de la cantidad de movimiento. Además, al analizar la situación de flujo en dispositivos que tienen componentes giratorias se necesita la ecuación del momento de la cantidad de movimiento para relacionar la velocidad rotacional con los otros parámetros de flujo. Como puede ser aconsejable unir el marco de referencia a la componente giratoria, escribiremos la ecuación general con las fuerzas inerciales incluidas. Es (vea la ecuación 4.2.4)

$$\Sigma\, \mathbf{M} - \mathbf{M}_I = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sist}} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\, \rho\, d\mathcal{V} \tag{4.7.1}$$

donde

$$\mathbf{M}_I = \int \mathbf{r} \times \left[\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] \rho\, d\mathcal{V} \tag{4.7.2}$$

CONCEPTO CLAVE *En el momento inercial $\mathbf{M}_I$ se considera el hecho de que se seleccionó un marco de referencia no inercial.*

En este momento inercial $\mathbf{M}_I$ se considera el hecho de que se seleccionó un marco de referencia no inercial; es simplemente el momento de $\mathbf{F}_I$ (vea la ecuación 4.6.28). Aplicando la transformación de sistema a volumen de control, la ecuación del momento de la cantidad de movimiento para un volumen de control se convierte en

$$\Sigma\, \mathbf{M} - \mathbf{M}_I = \frac{d}{dt} \int_{\text{v.c.}} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\, \rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \mathbf{r} \times \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \rho\, dA \tag{4.7.3}$$

Con ejemplos se ilustrará la aplicación de esta ecuación.

Ejemplo 4.20

Un aspersor tiene cuatro brazos de 50 cm de largo con boquillas a ángulos rectos con los brazos y a 45º con el suelo (figura E4.20). Si el gasto total es 0.01 m³/s y el diámetro de salida de una boquilla es 12 mm, encuentre la velocidad rotacional del rociador. Desprecie la fricción.

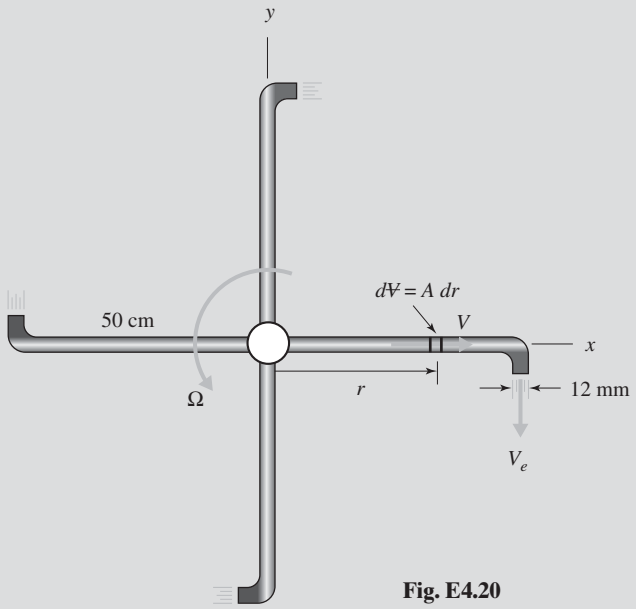


Fig. E4.20

Solución

La velocidad a la salida de una boquilla como se muestra es

$$V_e = \frac{Q}{A} = \frac{0.01/4}{\pi \times 0.006^2} = 22.1 \text{ m/s}$$

donde el factor 4 es por las cuatro áreas de salida. Fije el marco de referencia a los brazos giratorios como se muestra. A continuación, reconociendo que $\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] = 0$ y suponiendo un aspersor estacionario de modo que $d^2\mathbf{S}/dt^2 = 0$ y velocidad angular constante para que $d\,\boldsymbol{\Omega}/dt = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_I &= \int_{\text{v.c.}} \mathbf{r} \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})\rho \, d\forall \\ &= 4\int_0^{0.5} r\hat{\mathbf{i}} \times (2\Omega\hat{\mathbf{k}} \times V\hat{\mathbf{i}})\rho A \, dr \\ &= 8\rho AV\Omega\hat{\mathbf{k}} \int_0^{0.5} r \, dr = \rho AV\Omega\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

donde la pequeña masa de agua en los extremos de las boquillas se desprecia por comparación con la contenida en los largos brazos; el factor 4 de nuevo es por los cuatro brazos (cada brazo daría el vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$). Como no hay momentos externos al aspersor con respecto al eje vertical z, $\Sigma M_z = 0$. Para el flujo permanente la ecuación 4.7.3 da

$$\begin{aligned}(\Sigma \cancel{\mathbf{M}}^{0})_z - (\mathbf{M}_I)_z &= \int_{\text{s.c.}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})_z \, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \rho \, dA \\ -\rho AV\Omega &= 4\int_{A_{\text{salida}}} [0.5\hat{\mathbf{i}} \times (0.707V_e\hat{\mathbf{k}} - 0.707V_e\hat{\mathbf{j}})]_z \, V_e\rho \, dA \\ -VA\Omega &= -4 \times 0.5 \times 0.707V_e^2A_e \\ \therefore \Omega &= 4 \times 0.5 \times 0.707 \times 22.1 = 31.25 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

donde hemos usado $AV = A_eV_e$ por consideraciones de continuidad.

Ejemplo 4.21

Las boquillas del ejemplo 4.20 forman un ángulo de 0º con el suelo y 90º con los brazos. La llave del agua se abre de repente en $t = 0$ con el aspersor estático. Determine la $\Omega(t)$ resultante si el diámetro del brazo es de 24 mm. Desprecie la fricción.

Solución

El marco de referencia está otra vez unido a los brazos giratorios, como en el ejemplo 4.20. Por consulta de la integral del volumen de control de la ecuación 4.7.3, observamos que $\mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0$ porque $\mathbf{r}$ está en la misma dirección que $\mathbf{V}$ a lo largo de un brazo. Entonces la ecuación 4.7.3, junto con la ecuación 4.7.2, toma la forma

$$\cancel{\Sigma \vec{\mathbf{M}}}^{\,0} - 4\int_0^{0.5} r\hat{\mathbf{i}} \times \left[2\Omega\hat{\mathbf{k}} \times V\hat{\mathbf{i}} + \Omega\hat{\mathbf{k}} \times (\Omega\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{i}}) + \frac{d\Omega}{dt}\,\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{i}}\right]\rho A\, dr$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} r\hat{\mathbf{i}} \times V\hat{\mathbf{i}}\,\rho\, d\cancel{V} + 4\int_{A_{\text{salida}}} 0.5\hat{\mathbf{i}} \times V_e(-\hat{\mathbf{j}})V_e\rho\, dA$$

Realice las operaciones vectoriales y divida entre 4ρ,

$$-2AV\Omega\int_0^{0.5} r\, dr - \frac{d\Omega}{dt}A\int_0^{0.5} r^2\, dr = -0.5V_e^2 A_e$$

La integración requerida, usando $AV = A_eV_e = 0.01$ m^3/s y $V_e = 2.21$ m/s nos da

$$\frac{d\Omega}{dt} + 132.6\Omega = 5862$$

La ecuación diferencial lineal de primer orden se resuelve al sumar la solución homogénea (suprima el lado derecho) a la solución particular para obtener

$$\Omega(t) = Ce^{-132.6t} + 44.2$$

Usando la condición inicial $\Omega(0) = 0$, encontramos que $C = -44.2$. Entonces

$$\Omega(t) = 44.2(1 - e^{-132.6t}) \text{ rad/s}$$

Observe que a medida que el tiempo aumenta, la velocidad angular está limitada a 44.2 rad/s. Si se incluyera la fricción, este valor se reduciría. Si 44.2 se multiplica por 0.707 para considerar el ángulo de 45º, obtenemos el valor del ejemplo 4.20.

4.8 RESUMEN

En este capítulo hemos presentado la formulación del volumen de control de las leyes fundamentales. Esta formulación es útil cuando los integrandos (las velocidades y la presión) se conocen o pueden aproximarse con un grado aceptable de precisión. Si éste no fuera el caso, las ecuaciones diferenciales del capítulo 5 deben ser resueltas (numéricamente como en el capítulo 14 o analíticamente como en el capítulo 7), o deben usarse métodos experimentales para obtener la información deseada; gran parte del resto de este libro está dedicado a este trabajo. Después de determinar las velocidades y presiones desconocidas, con frecuencia regresamos a la formulación del volumen de control y calculamos las cantidades integrales de interés. Ejemplos incluirían la sustentación y la fuerza de resistencia al avance en una superficie aerodinámica, el par de torsión en una hilera de álabes de una turbina, y la fuerza oscilante en un cable de suspensión de un puente.

Como hemos observado en los ejemplos y problemas de este capítulo, la tarea de aplicar las ecuaciones del volumen de control depende en gran medida de la solución apropiada de los límites del volumen de control. Estos límites se seleccionan en lugares ya sea donde se conozca la información o donde aparezcan incógnitas. Es frecuente que se requiera tener experiencia en la selección de un volumen de control, como lo es en la selección de un diagrama de cuerpo libre en estática, dinámica y mecánica de sólidos. Es indudable que el estudiante ha adquirido algo de esta experiencia al trabajar en las secciones de este capítulo. La tabla 4.1 presenta las diversas formas de las leyes fundamentales para ayudar al usuario en la selección de una forma apropiada para un problema en particular.

Tabla 4.1 Formas integrales de las leyes fundamentales

Continuidad	*Energía*	*Cantidad de movimiento*
	Forma general	
$0 = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\text{v.c.}} \rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$	$-\Sigma\dot{W} = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\text{v.c.}} \left(\dfrac{V^2}{2} + gz\right)\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \left(\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$ + pérdidas	$\Sigma\mathbf{F} = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\text{v.c.}} \rho\mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA$
	Flujo permanente	
$0 = \displaystyle\int_{\text{s.c.}} \rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$	$-\Sigma\dot{W} = \displaystyle\int_{\text{s.c.}} \left(\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$ + pérdidas	$\Sigma\mathbf{F} = \displaystyle\int_{\text{s.c.}} \rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA$
	Flujo permanente no uniforme[a]	
$\dot{m} = \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2$	$\dfrac{-\Sigma\dot{W}}{\dot{m}g} = \alpha_2 \dfrac{\overline{V}_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\gamma_2} + z_2 - \alpha_1 \dfrac{\overline{V}_1^2}{2g} - \dfrac{p_1}{\gamma_1} - z_1 + h_L$	$\Sigma F_x = \dot{m}(\beta_2 \overline{V}_{2x} - \beta_1 \overline{V}_{1x})$ $\Sigma F_y = \dot{m}(\beta_2 \overline{V}_{2y} - \beta_1 \overline{V}_{1y})$
	Forma permanente uniforme[a]	
$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$	$-\dfrac{\Sigma\dot{W}}{\dot{m}g} = \dfrac{V_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\gamma_2} + z_2 - \dfrac{V_1^2}{2g} - \dfrac{p_1}{\gamma_1} - z_1 + h_L$	$\Sigma\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$
	Flujo permanente uniforme incompresible[a]	
$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$	$-\dfrac{\Sigma\dot{W}}{\dot{m}g} = \dfrac{V_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\gamma} + z_2 - \dfrac{V_1^2}{2g} - \dfrac{p_1}{\gamma} - z_1 + h_L$ o $H_P + \dfrac{V_1^2}{2g} + \dfrac{p_1}{\gamma} + z_1 = H_T + \dfrac{V_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L$	$\Sigma\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$

$\dot{m}$ = flujo másico

Q = gasto

$\overline{V}$ = velocidad promedio $= \dfrac{\int V dA}{A}$

α = factor de corrección por energía cinética $= \dfrac{\int V^3 dA}{\overline{V}^3 A}$

β = Factor de corrección por cantidad de movimiento $= \dfrac{\int V^2 dA}{\overline{V}^2 A}$

h_L = pérdida de altura o carga

$\Sigma\dot{W} = \dot{W}_S + \dot{W}_{\text{cortante}} + \dot{W}_I$

H_P = carga hidráulica de bomba $= \dot{W}_P/\dot{m}g$

H_T = carga hidráulica de turbina $= \dot{W}_T/\dot{m}g$

[a]El volumen de control tiene una entrada (sección 1) y una salida (sección 2).

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

4.1 Seleccione la propiedad extensiva de lo siguiente:
(A) Temperatura **(B)** Volumen
(C) Presión **(D)** Densidad

4.2 Por un tubo de 8 cm de diámetro fluye aire con una velocidad promedio de 70 m/s, con una temperatura de 20 °C y una presión de 200 kPa. El flujo másico está más cercano a:
(A) 3.7 kg/s **(B)** 2.37 kg/s
(C) 1.26 kg/s **(D)** 0.84 kg/s

4.3 Por un tubo de drenaje de 80 cm de diámetro a una profundidad de 30 cm, fluye agua con una velocidad de 3 m/s. El gasto está cercano a:
(A) 516 L/s
(B) 721 L/s
(C) 938 L/s
(D) 1262 L/s

4.4 ¿Cuál es el requerimiento de energía de una bomba que es 85% eficiente que transporta 40 L/s de agua, si la presión aumenta de 200 kPa a 1200 kPa?
(A) 4.8 kW
(B) 14.2 kW
(C) 34.0 kW
(D) 47.1 kW

4.5 Se utiliza un chorro de agua a alta velocidad para cortar un material. Si la velocidad de salida del chorro de 2 mm de diámetro es 120 m/s, la presión máxima en el material en el punto de impacto está más cercana a:
(A) 7200 kPa **(B)** 3600 kPa
(C) 735 kPa **(D)** 452 kPa

4.6 Calcule V_1 en la figura P4.6. Suponga que el aire es incompresible con $\rho = 1.2$ kg/m^3.
(A) 62 m/s (B) 40 m/s
(C) 18 m/s (D) 10 m/s

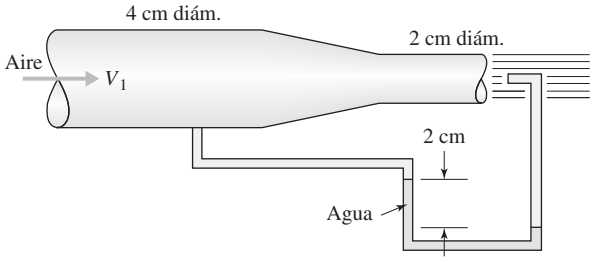


Fig. P4.6

4.7 La caída de presión en una válvula, a través de la cual circulan 40 L/s de agua, se mide como 100 kPa. Calcule el coeficiente de pérdida si el diámetro nominal de la válvula es de 8 cm.
(A) 0.79 **(B)** 3.2
(C) 8.7 **(D)** 31

4.8 Una bomba que es 89% eficiente se utiliza en una línea de 4 cm de diámetro que transporta 40 L/s de agua. Se desea obtener un aumento de presión de 400 kPa. La potencia requerida por la bomba está más cercana a:
(A) 12 kW
(B) 16 kW
(C) 18 kW
(D) 22 kW

4.9 Una hidroturbina genera energía al transportar 0.2 m^3/s de agua desde una presa. La superficie del agua está a 10 m arriba de la salida de la turbina. El coeficiente de pérdida total para el tubo de conexión de 24 cm es de 3.2. La máxima salida de la turbina está más cercana a:
(A) 42 kW
(B) 21 kW
(C) 18 kW
(D) 13 kW

4.10 Una bomba que es 75% eficiente suministra 0.1 m^3/s de agua desde un depósito hasta un dispositivo que está a una elevación de 50 m sobre el depósito. La presión a la entrada de 8 cm de diámetro para el dispositivo es 180 kPa. Si el coeficiente de pérdida de la tubería es 5.6, la entrada de potencia necesaria a la bomba está más cercana a:
(A) 263 kW **(B)** 203 kW
(C) 121 kW **(D)** 91.3 kW

4.11 Un fuerte viento sopla directamente contra una ventana en un edificio. La fuerza del viento sobre la ventana puede aproximarse usando:
(A) La ecuación de Bernoulli
(B) La ecuación de continuidad
(C) La ecuación de cantidad de movimiento
(D) Todo lo anterior

4.12 Una boquilla con un diámetro de salida de 4 cm está unida a un tubo de 10 cm de diámetro que transporta 0.1 m^3/s de agua. La fuerza que el agua ejerce sobre la boquilla está más cercana a:
(A) 6.7 kN **(B)** 12.2 kN
(C) 17.5 kN **(D)** 24.2 kN

4.13 Una lámina de agua de 1 cm × 20 cm es desviada como se muestra en la figura P4.13. La magnitud de la fuerza total que actúa sobre el deflector estacionario está más cercana a:
(A) 6830 N **(B)** 5000 N
(C) 4330 N **(D)** 2500 N

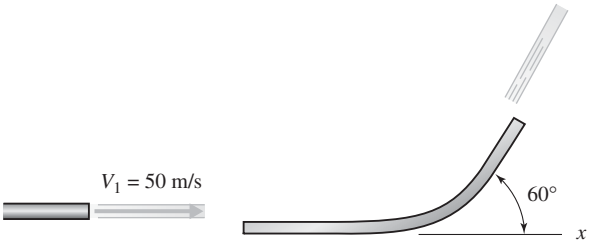


Fig. P4.13

4.14 El agua impacta uno de los álabes de la turbina como se muestra en la figura P4.14. Para una velocidad del álabe de 20 m/s, la salida de potencia máxima para un solo chorro está más cercana a:

(A) 18 kW **(B)** 154 kW
(C) 206 kW **(D)** 309 kW

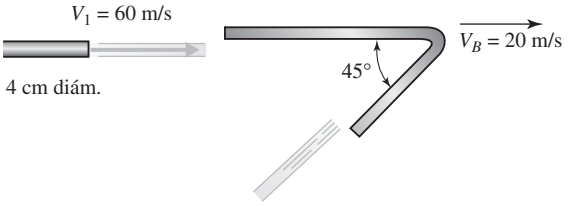


Fig. P4.14

4.15 En la figura P4.15, un vehículo grande reduce su velocidad al bajar un cucharón de 2 m de ancho en un depósito de agua. Calcule la fuerza ejercida sobre el cucharón si el vehículo se desplaza a 60 m/s y saca 5 cm de agua. El cucharón desvía el agua un ángulo de 180º.

(A) 720 kN **(B)** 360 kN
(C) 12 kN **(D)** 7.2 kN

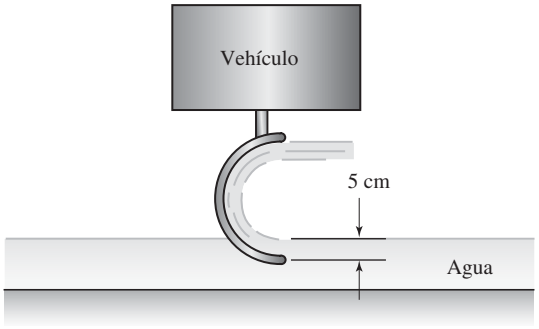


Fig. P4.15

PROBLEMAS

Leyes básicas

4.16 **(a)** Exprese las condiciones necesarias para que la cantidad de movimiento de un sistema permanezca constante.

(b) Exprese las condiciones necesarias para que la energía de un sistema permanezca constante.

(c) Muestre los pasos detallados y exprese las suposiciones que permiten que la ecuación 4.2.3 se reduzca a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

4.17 Haga una lista de cinco propiedades extensivas que son de interés en mecánica de fluidos. También, enumere sus propiedades intensivas asociadas. Además, mencione otras cinco propiedades intensivas.

4.18 Un volumen de control está identificado como el volumen interior de un globo. En un instante, el sistema también es identificado como el aire dentro del globo. Escapa aire durante un breve incremento de tiempo t. Haga un bosquejo del sistema y del volumen de control en t y en $t + \Delta t$.

4.19 En un instante, el volumen de control y el sistema ocupan el volumen dentro de la bomba que se ilustra en la figura P4.19 y unos pocos diámetros del tubo en el lado de entrada. Haga un bosquejo del sistema y del volumen de control en los instantes t y en $t + \Delta t$.

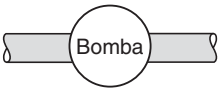


Fig. P4.19

4.20 Indique cuál ecuación fundamental sería más útil para determinar la siguiente cantidad:

(a) La potencia de salida de una bomba
(b) El flujo másico de deflectores de cierre
(c) La fuerza de resistencia al avance en una superficie aerodinámica
(d) La pérdida de carga en una tubería
(e) La velocidad rotacional de un generador eólico

4.21 Trace el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y el vector velocidad $\mathbf{V}$ en cada una de las áreas mencionadas:

(a) El área de salida de la boquilla de una manguera de bombero
(b) El área de entrada de una bomba
(c) El área de la pared de un tubo
(d) El área del fondo poroso de un río en el que fluye una pequeña cantidad de agua
(e) El área de una salida cilíndrica de un impulsor giratorio

4.22 Un fluido se mueve a través la ampliación que se muestra en la figura P4.22 con una distribución de velocidad $v_1(r)$ en la entrada y $v_2(r)$ a la salida. Haga un bosquejo de un volumen de control que muestre $\mathbf{V}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ en lugares seleccionados en el volumen de control. Incluya lugares en los costados laterales y en los extremos.

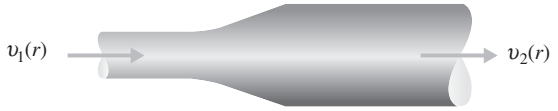


Fig. P4.22

4.23 Haga un bosquejo del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y el vector velocidad $\mathbf{V}$ en varios lugares en un recuadro rectangular que rodea la superficie aerodinámica que se ilustra en la figura P4.23.

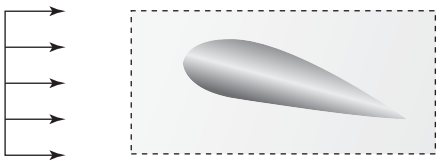


Fig. P4.23

Transformación de un sistema a volumen de control

4.24 Suponga que $V_1 = V_2 = V_3 = 10$ m/s para el volumen de control mostrado en la figura P4.24. Escriba $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$ y $\hat{\mathbf{n}}_3$ en términos de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, y calcule la componente normal del vector velocidad en cada una de las tres áreas planas. El volumen es de profundidad uniforme en la dirección z.

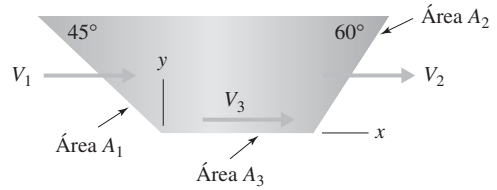


Fig. P4.24

4.25 Escriba una expresión para el flujo de una propiedad a través de cada una de las tres áreas del volumen de control del problema 4.24, si η y ρ son constantes en todo el volumen de control. Sea A el área de sección transversal (normal al plano xy). Use $V_1 = V_2 = V_3 = 10$ m/s.

4.26 Demuestre que $(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}})$ es el volumen del paralelepípedo de 12 cm de profundidad (figura P4.26). Observe que $\hat{\mathbf{n}}$ es normal al área A.

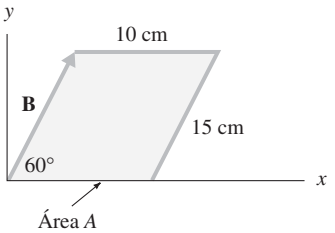


Fig. P4.26

4.27 Reconocemos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho\eta \, d\mathcal{V} = \int_{\text{v.c.}} \frac{\partial}{\partial t}\rho\eta \, d\mathcal{V}$$

¿Qué condición permite esta equivalencia? ¿Por qué se usa una derivada ordinaria a la izquierda y una derivada parcial a la derecha?

4.28 Una lata de aerosol contra mosquitos se activa en $t = 0$. Seleccione el producto químico dentro de la lata como el sistema y haga un bosquejo del sistema en $t = \Delta t$. Seleccione un volumen de control y trace el volumen de control en $t = \Delta t$.

4.29 El aire dentro de los pulmones al final de una inhalación es identificado como el sistema en $t = 0$. Seleccione un volumen de control y haga un bosquejo del sistema y del volumen de control en $t = \Delta t$ si se exhala aire sólo por la nariz.

4.30 El volumen de control seleccionado para analizar un flujo alrededor de una superficie aerodinámica es el recuadro rectangular como está trazado en la figura del problema 4.23. El sistema ocupa el recuadro en t. Trace el sistema en $t + \Delta t$.

Conservación de la masa

4.31 Demuestre que la ecuación 4.4.5 resulta de la ecuación 4.4.4 al suponer una entrada y una salida y flujo uniforme (propiedades constantes).

4.32 Un fluido incompresible entra a un volumen lleno con un material absorbente con un flujo másico de $\dot{m}$ y sale del volumen con un gasto Q. Determine una expresión para hallar la rapidez de cambio de la masa en el volumen.

4.33 Un líquido de densidad ρ entra a un volumen lleno de una esponja con un gasto de Q_1. Sale de un área con flujo másico $\dot{m}_2$ y de una segunda área A_3 con una velocidad promedio V_3 como se muestra en la fig. P4.33. Escriba una expresión para dm_{esponja}/dt, la rapidez de cambio de la masa en la esponja.

Fig. P4.33

4.34 En un tubo de 2.5 in de diámetro circula agua a 60 ft/s. Si el tubo se agranda a un diámetro de 5 in, calcule la velocidad reducida. También, calcule el flujo másico y el gasto. Además, exprese las respuestas usando unidades SI.

4.35 En el tubo de 5 cm de diámetro que se ilustra en la figura P4.35 fluye agua a una velocidad promedio de 10 m/s. Da vuelta a un ángulo de 90º y fluye radialmente entre dos placas paralelas. ¿Cuál es la velocidad en un radio de 60 cm? ¿Cuáles son el flujo másico y la descarga?

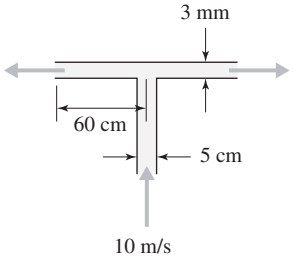


Fig. P4.35

4.36 Una tubería transporta 200 kg/s de agua. El tubo se bifurca en una conexión en T en un tubo de 5 cm de diámetro y uno de 7 cm de diámetro (figura P4.36). Si la velocidad promedio en el tubo de diámetro más pequeño es 25 m/s, calcule el gasto en el tubo más grande.

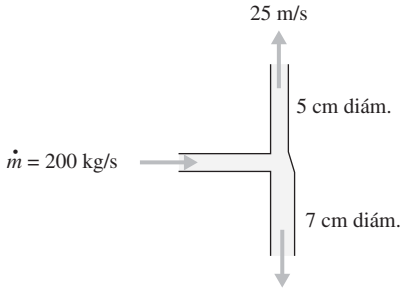


Fig. P4.36

4.37 En un tubo de 4 in de diámetro fluye aire a 60 ºF y a 40 psia con un flujo másico de 0.2 slug/s. El tubo tiene una conversión a un conducto rectangular de 2 in por 3 in en el que T = 150 ºF y p = 7 psia. Calcule la velocidad en cada sección.

4.38 Aire a 120 ºC y 500 kPa absoluta fluye en un tubo a 600 m/s y, de pronto, experimenta un cambio abrupto a 249 ºC y 1246 kPa absoluta en un lugar donde el diámetro es 10 cm. Calcule la velocidad después del cambio abrupto (una onda de choque) ilustrado en la figura P4.38. También, calcule el flujo másico y los gastos antes y después del cambio abrupto.

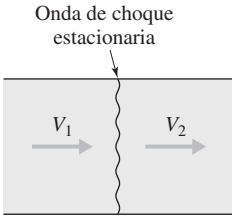


Fig. P4.38

4.39 Se utiliza un velocímetro láser para medir velocidades de 40 m/s y 120 m/s antes y después de un cambio abrupto en el diámetro de un tubo de 10 cm a 6 cm, respectivamente. Se mide que la presión en el aire antes y después del cambio es de 200 kPa y 120 kPa, respectivamente. Si la temperatura antes del cambio es 20 ºC, ¿cuál es la temperatura después del cambio?

4.40 En un canal trapezoidal con una base de 2 m y costados con pendiente a 45º, circula agua con una velocidad de 3 m/s a una profundidad de 1.5 m. Desemboca por un tubo circular y fluye a 2 m/s. ¿Cuál es el diámetro si:

(a) el tubo está lleno?

(b) el tubo está lleno a la mitad?

(c) el agua en el tubo fluye a una profundidad de la mitad del radio?

4.41 Por un tubo de 8 cm de diámetro fluye agua con los perfiles mostrados en la figura P4.41. Encuentre la velocidad promedio, el flujo másico y el gasto para cada uno.

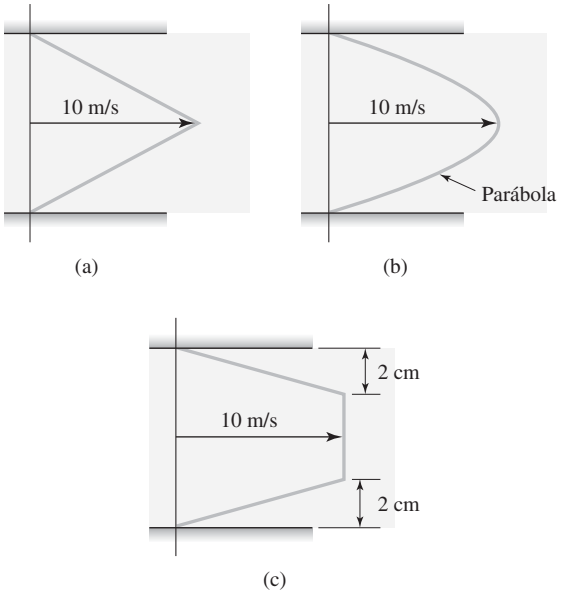


Fig. P4.41

4.42 Se supone que los perfiles de la figura P4.41 existen en un canal rectangular, de 8 cm de altura y 80 cm de ancho. Encuentre la velocidad promedio, el flujo másico y el gasto para cada uno.

4.43 Un fluido de densidad constante fluye como se muestra en la figura P4.43. Encuentre la ecuación de la parábola si el conducto es:

(a) Un tubo con $d = 1$ in y $V = 6$ fps

(b) Un canal rectangular ancho con $d = 1$ in y $V = 6$ fps

(c) Un tubo con $d = 2$ cm y $V = 2$ m/s

(d) Un canal rectangular ancho con $d = 2$ cm y $V = 2$ m/s

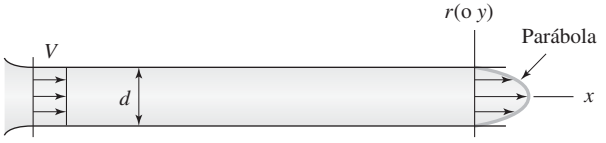


Fig. P4.43

4.44 En el ejemplo 4.2 sea $\dot{m}_2$ una incógnita y V_1 y Q_3 como se muestran en la figura. Calcule $\dot{m}_2$ de modo que dm/dt del dispositivo sea cero.

4.45 Existe un perfil parabólico en un tubo de 10 mm de diámetro. El tubo se contrae a un diámetro de 5 mm en el que el perfil de velocidad es esencialmente uniforme a 2 m/s. Escriba la ecuación para la parábola. Suponga un flujo incompresible.

4.46 Cuando fluye aire como se muestra en la figura P4.46 sobre una placa plana, la velocidad se reduce a cero en la pared. Si $u(y) = 10(20y - 100y^2)$ m/s, encuentre el flujo másico $\dot{m}$ a través de una superficie paralela a la placa y a 0.2 m arriba de ésta. La placa mide 2 m de ancho y $\rho = 1.23$ kg/m^3.

4.47 Una línea de corriente está 5 cm arriba de la placa que se ilustra en la figura P4.46 en el borde de entrada. ¿A qué distancia de la placa está esa misma línea de corriente en el lugar del perfil $u(y) = 10(20y - 100y^2)$?

4.48 Agua salada estratificada fluye a una profundidad de 4 in en un canal con una distribución de velocidad $2(6y - 9y^2)$ ft/s, donde y está en pies. Si la densidad varía linealmente de 2.2 slug/ft^3 en el fondo para limpiar el agua en la parte superior, encuentre $\dot{m}$. También, demuestre que $\dot{m} \neq \overline{\rho}\ \overline{VA}$. El canal mide 5 ft de ancho.

4.49 Fluye agua como se muestra en la figura P4.49. Calcule V_2.

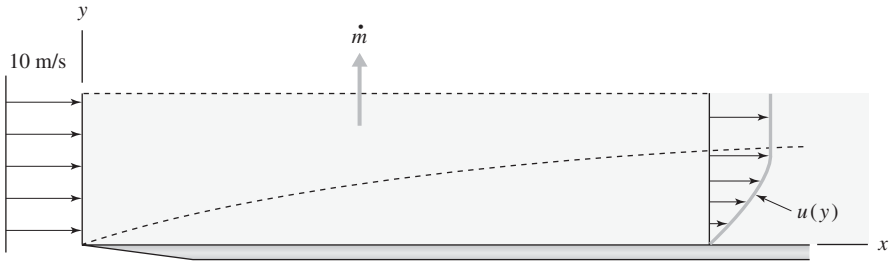


Fig. P4.46

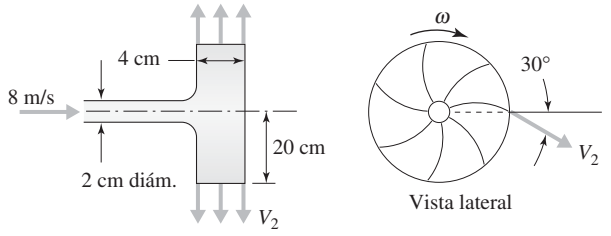


Fig. P4.49

4.50 Llueve de forma vertical sobre un estacionamiento de 9000 m^2 con una velocidad promedio de 5.0 m/s. Toda el agua fluye por una zanja rectangular abierta con una velocidad promedio de 1.5 m/s. Calcule la profundidad del flujo en la zanja de 1.5 m de ancho si 2000 gotas de agua de 3 mm de diámetro están contenidas en cada metro cúbico de lluvia.

4.51 Aire a una presión manométrica de 37 psi y a 60 ºF es forzado dentro de un neumático, que tiene un volumen de 17 ft^3, a una velocidad de 180 ft/s a través de una válvula de 1/4 in de diámetro. Determine la rapidez de cambio de la densidad en el neumático.

4.52 En la figura P4.52, si la masa del volumen de control no está cambiando, encuentre $\overline{V}_3$.

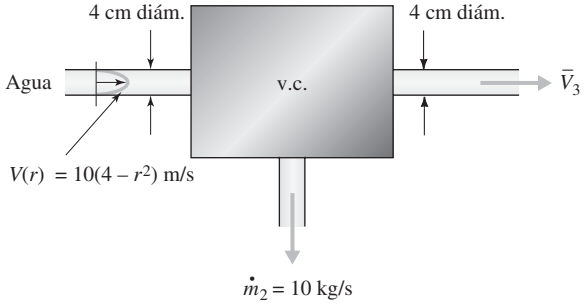


Fig. P4.52

4.53 La velocidad promedio es $\overline{V}_3 = 10$ m/s en el problema 4.52. Encuentre la rapidez a la que está cambiando la masa del volumen de control.

4.54 Encuentre la velocidad de la interfase gas-combustible que se muestra en la figura P4.54. Use $R_{gas} = 0.28$ kJ/kg · K y $d_e = 30$ cm.

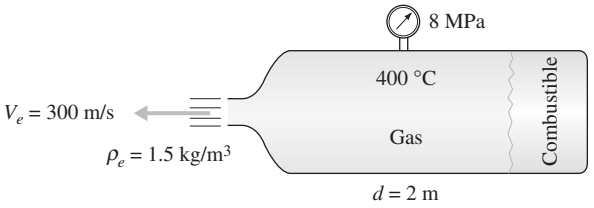


Fig. P4.54

4.55 Se suministra aire acondicionado a un gran salón de conferencias a través de cuatro entradas, cada una de las cuales transfiere 1500 cfm. Si el aire se retorna al acondicionador por medio de un solo ducto rectangular de 2 ft × 4 ft, calcule la velocidad promedio en el conducto. Haga cualesquiera suposiciones necesarias.

4.56 Un cucharón rectangular de 80 cm de profundidad, capta aire como se muestra en la figura P4.56, y lo suministra a través de un tubo de 30 cm de diámetro. Calcule la velocidad promedio del aire en el tubo si $u(y) = 20\, y^{1/5}$ m/s, donde y está en metros.

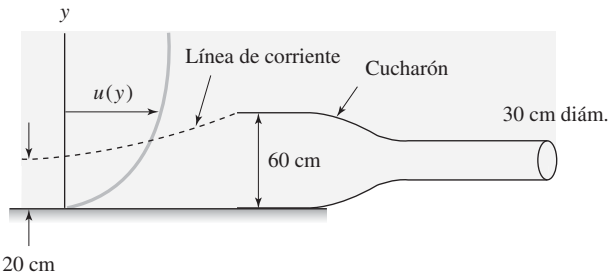


Fig. P4.56

4.57 La bomba de chorro opera al inducir un flujo debido a la alta velocidad en el tubo de 5 cm de diámetro, como se muestra en la figura P4.57. La velocidad en el tubo pequeño es $200[1 - (r/R)^2]$. Calcule la velocidad promedio a la salida.

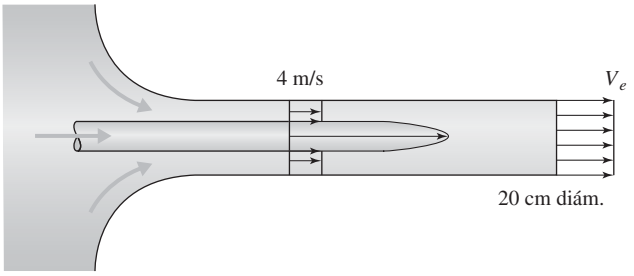


Fig. P4.57

4.58 La instalación experimental que se muestra en la figura P4.58 se usa para proporcionar líquido para el tejido. Deduzca una expresión para la tasa de almacenamiento de líquido en el tejido, en términos de la información relevante.

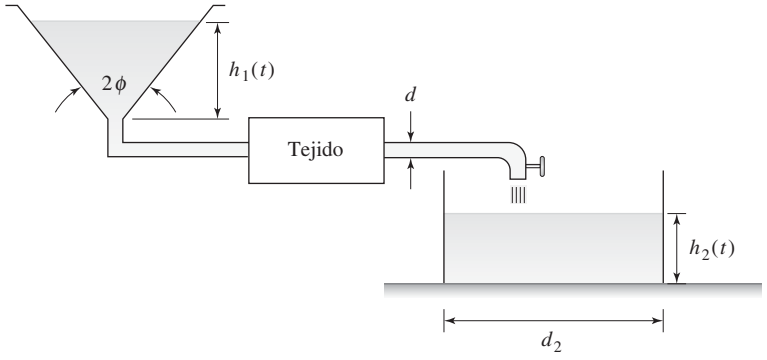


Fig. P4.58

4.59 El agua tiene una profundidad de 4 m detrás de una compuerta de desagüe en un canal rectangular que se abre de pronto (figura P4.59). Encuentre la *dh/dt* inicial si $V_2 = 8$ m/s y $V_1 = 0.2$ m/s. La longitud del canal aguas arriba es de 100 m.

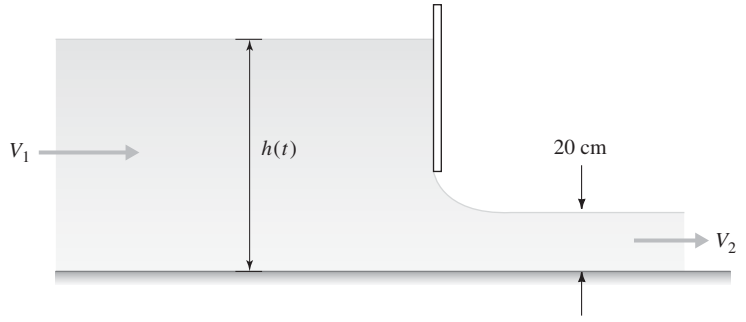


Fig. P4.59

4.60 Entran 10 mL/min de agua a un riñón a través de un tubo y sale por un tubo de 6 mm de diámetro a 20 mm/s. ¿Cuál es la rapidez del cambio de masa del agua en el riñón?

4.61 El combustible sólido en un cohete se quema a razón de 400 $e^{-t/100}$ cm^3/s (figura P4.61). Si la densidad del combustible es de 900 kg/m^3, calcule la velocidad V_e de salida cuando $t = 10$ s suponiendo que la densidad de los gases de salida es de 0.2 kg/m^3.

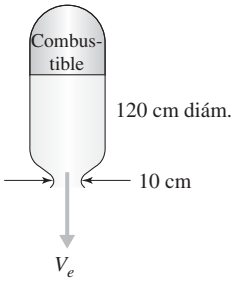


Fig. P4.61

4.62 En la figura P4.62, encuentre la rapidez de cambio de $h(t)$ si el agua es el fluido en todos los lugares:

(a) $V_1 = 10$ m/s, $\dot{m}_2 = 10$ kg/s, $Q_3 = 600$ L/min

(b) $V_1 = 0$, $\dot{m}_2 = 20$ kg/s, $Q_3 = 10$ L/s

(c) $V_1 = 5$ m/s, $\dot{m}_2 = 10$ kg/s, $Q_3 = 1000$ L/min

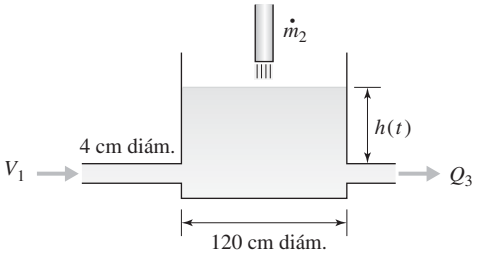


Fig. P4.62

4.63 Un tanque cilíndrico de 1 m de diámetro contiene inicialmente combustible líquido y tiene un tapón de caucho de 2 cm en el fondo, como se muestra en la figura P4.63.

Si se quita el tapón, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse el tanque? La altura inicial del líquido en el tanque es de 1.5 m. Se requiere la ecuación de Bernoulli.

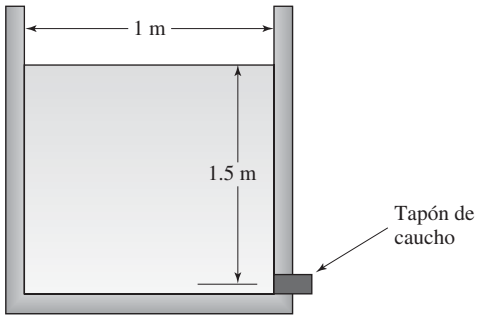


Fig. P4.63

4.64 Un tanque rígido de 1 m³ inicialmente contiene aire comprimido a 15 ºC. Se saca aire del tanque a través de un tubo de 3 cm de diámetro, como se muestra en la figura P4.64. Si la velocidad y densidad del aire del tubo son 200 m/s y 1.8 kg/m³, respectivamente, determine la rapidez inicial a la que varía la presión dentro del tanque suponiendo una temperatura constante.

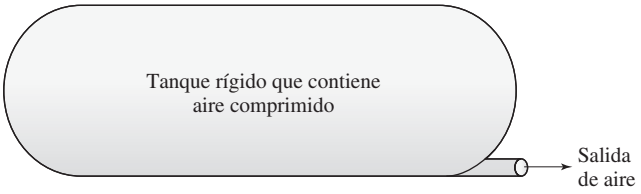


Fig. P4.64

4.65 La velocidad del agua que entra en el volumen que se muestra en la figura P4.65 es $V(t) = 10e^{-t/10}$ m/s. Suponiendo $h(0) = 0$, encuentre $h(t)$ si el volumen es:

(a) Un cono. La entrada es de 4 cm de diámetro.

(b) Una pileta de 10 m de largo. La entrada tiene una altura de 4 cm.

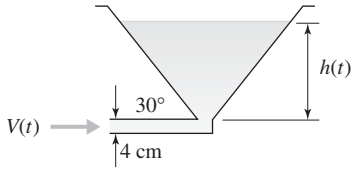


Fig. P4.65

Ecuación de la energía

4.66 En la figura P4.66, determine la rapidez de trabajo realizado por el aire en el instante mostrado si $V_{\text{pistón}} = 10$ m/s, el par de torsión $T = 20$ N·m, el gradiente de velocidad en la superficie de la banda es 100 s^{-1}, y la presión que actúa sobre el pistón es de 400 Pa. La banda mide 80 cm × 50 cm y el pistón rectangular de 40 cm de altura tiene 50 cm de profundidad (hacia el interior de la página).

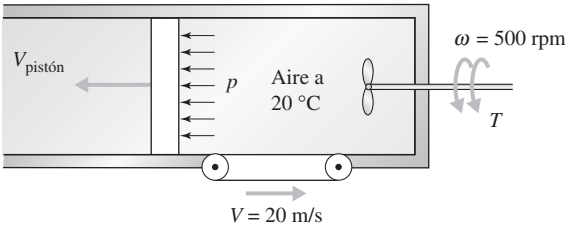


Fig. P4.66

4.67 Suponiendo que la energía interna del gas natural depende sólo de la temperatura, ¿qué sucede con las pérdidas cuando se bombea gas natural de Texas a Michigan? La temperatura permanece esencialmente constante. Consulte la ecuación 4.5.14.

4.68 Una bomba de agua aislada requiere 500 W cuando bombea 0.02 m³/s con una eficiencia de 80%. ¿Cuál es el aumento de temperatura del agua desde la entrada hasta la salida de la bomba suponiendo que las áreas de entrada y salida son iguales? El calor específico del agua es 4.18 kJ/kgºC.

4.69 Una bomba de agua requiere 5 hp para crear una carga hidráulica de bomba de 20 m. Si su eficiencia es de 87%, ¿cuál es el gasto de agua?

4.70 Una turbina hidráulica con eficiencia de 89% opera con una carga hidráulica de turbina de 40 m. ¿Cuál es la salida de la turbina si el flujo másico es:

(a) 200 kg/s?

(b) 90 000 kg/min?

(c) 8×10^6 kg/h?

4.71 La salida deseada de un conjunto de turbinas 89% eficientes en un río es 10 MW. Si la máxima carga hidráulica de turbina que puede alcanzarse es de 50 m, determine la velocidad promedio en un lugar donde el río tiene 60 m de ancho y 3 m de profundidad.

4.72 Fluye agua en un canal rectangular abierto a una profundidad de 3 ft con una velocidad de 12 ft/s. El fondo del canal baja 3 ft en una distancia corta. Calcule las dos posibles profundidades del flujo después de la caída. Desprecie todas las pérdidas.

4.73 Si la pérdida de carga hidráulica del problema 4.72 a través de la caída del canal es 0.6 ft, determine las dos posibles profundidades del flujo.

4.74 Encuentre la velocidad V_1 del agua en el tubo vertical mostrado en la figura P4.74. Suponga que no hay pérdidas.

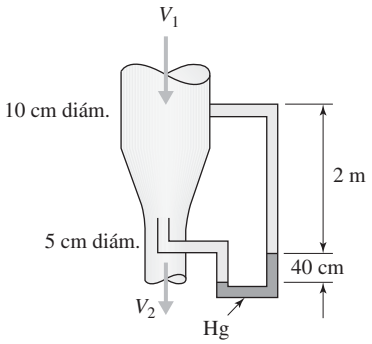


Fig. P4.74

4.75 Si el coeficiente de pérdida de carga hidráulica (basado en V_2) entre las secciones 1 y 2 del problema 4.74 es 0.05, determine V_1 del agua.

4.76 El gasto de agua en una tubería horizontal de 2 in de diámetro a una presión de 60 psi es de 120 gal/min. Si la tubería aumenta a 3 in de diámetro, calcule la presión aumentada después de la expansión si el coeficiente de pérdida (basado en V_1) es 0.37.

4.77 Fluye agua a razón de 600 L/min en una tubería horizontal de 4 cm de diámetro, con una presión de 690 kPa. Si se mide que la presión después de un ensanchamiento a 6 cm de diámetro es de 700 kPa, calcule la pérdida de carga hidráulica en el ensanchamiento.

4.78 Calcule la presión p_1 mostrada en la figura P4.78, necesaria para mantener un gasto de 0.08 m^3/s de agua en un tubo horizontal de 6 cm de diámetro que va a una boquilla, si el coeficiente de pérdida basado en V_1 es 0.2 entre el manómetro y la salida.

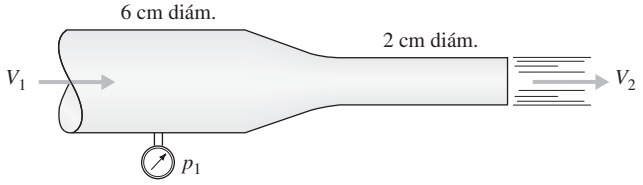


Fig. P4.78

4.79 En la figura P4.79, desprecie todas las pérdidas y pronostique el valor de H y p si:

(a) $h = 15$ cm

(b) $h = 20$ cm

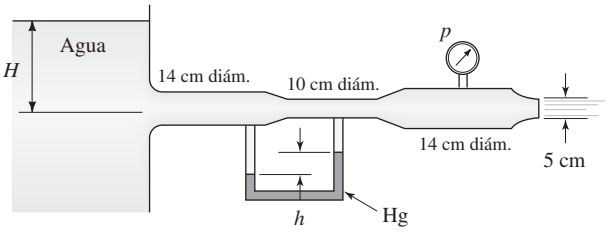


Fig. P4.79

4.80 Sale agua por las salidas rectangulares mostradas en la figura P4.80. Calcule el gasto por ancho unitario para cada una si $h = 80$ cm, $H = 2$ m. Desprecie todas las pérdidas.

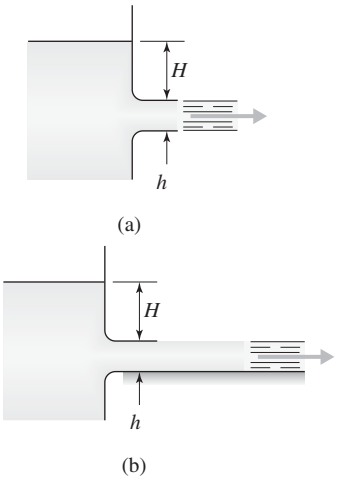


Fig. P4.80

4.81 El coeficiente de pérdida global para el tubo mostrado en la figura P4.81 es 5; hasta A, es 0.8, de A a B es 1.2, de B a C es 0.8, de C a D es 2.2. Calcule el gasto y las presiones en A, B, C y D. Se muestran las elevaciones.

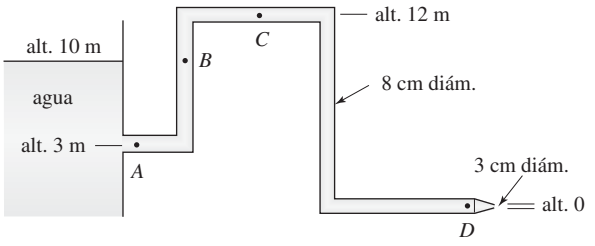


Fig. P4.81

4.82 De un depósito a presión sale agua como se muestra en la figura P4.82. Calcule el gasto si en la sección A:

(a) Conectamos una boquilla con salida de 5 cm de diámetro

(b) Conectamos un difusor con diámetro de salida de 18 cm

(c) La dejamos como tubo abierto, como se muestra

Desprecie las pérdidas para todos los casos.

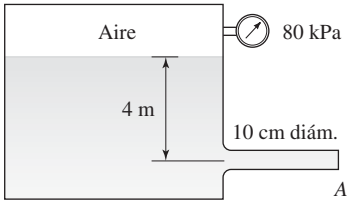


Fig. P4.82

4.83 Resuelva nuevamente el problema 4.82 suponiendo que $K_{tubo} = 1.5$, $K_{boquilla} = 0.04$ (basada en V_1), y $K_{difusor} = 0.8$ (basada en V_1).

4.84 Relacione el gasto del agua que pasa por el medidor flujo venturi que se ilustra en la figura P4.84 con el diámetro y la lectura en el manómetro. Suponga que no hay pérdidas.

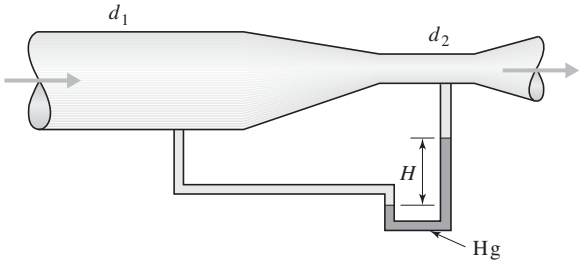


Fig. P4.84

4.85 En el medidor de flujo venturi de la figura P4.84, calcule el gasto si:

(a) $H = 20$ cm, $d_1 = 2d_2 = 16$ cm

(b) $H = 40$ cm, $d_1 = 3d_2 = 24$ cm

(c) $H = 10$ in, $d_1 = 2d_2 = 6$ in

(d) $H = 15$ in, $d_1 = 3d_2 = 12$ in

4.86 En la figura P4.86, determine la altura máxima posible H para evitar la cavitación. Sean:

(a) $d = 10$ cm, y $T_{agua} = 20$ °C

(b) $d = 4$ in, y $T_{agua} = 70$ °F

Desprecie todas las pérdidas y suponga que $P_{atm} = 100$ kPa (14.7 psi).

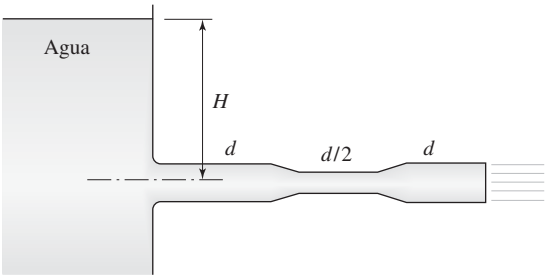


Fig. P4.86

4.87 Se observa cavitación en la pequeña sección de tubo de la figura 4.86 cuando $H = 65$ cm. Estime la temperatura del agua. Desprecie todas las pérdidas y suponga p_{atm}=100 kPa. Use:

(a) $d = 10$ cm

(b) $d = 12$ cm

4.88 En la figura P4.88, ¿cuál es la profundidad mínima H posible para evitar la cavitación? Suponga una presión de vapor de 6 kPa absoluta y un coeficiente de pérdida global de 8 basado en V_2 e incluyendo la pérdida a la salida. Desprecie las pérdidas hasta el ensanchamiento.

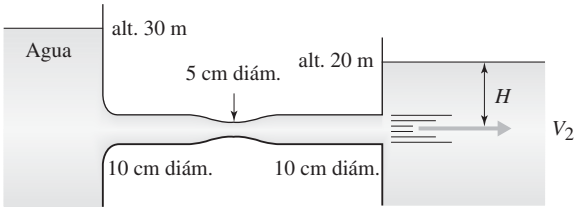


Fig. P4.88

4.89 En un tubo de 10 cm de diámetro se presenta una contracción a 6 cm, seguida por un ensanchamiento de nuevo a 10 cm. Se mide que la presión aguas arriba es de 200 kPa cuando se observa primero la cavitación en el agua a 20 ºC. Calcule el gasto. Desprecie las pérdidas. Use $p_{atm} = 100$ kPa.

4.90 En la figura P4.90, calcule el diámetro máximo D tal que se evite la cavitación si:

(a) $d = 20$ cm, $H = 5$ m y $T_{agua} = 20$ ºC

(b) $d = 8$ in, $H = 15$ ft y $T_{agua} = 70$ ºF

Desprecie todas las pérdidas y use $p_{atm} = 100$ kPa (14.7 psi).

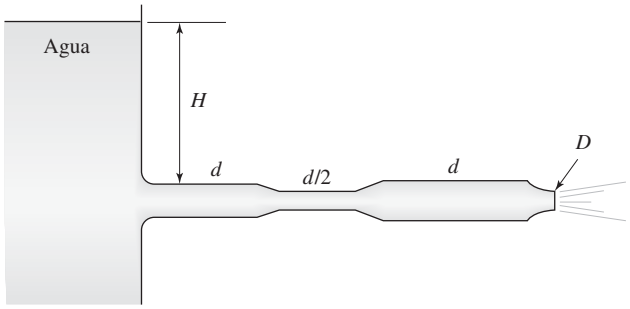


Fig. P4.90

4.91 El coeficiente de pérdida global en el sifón mostrado en la figura P4.91 es 4; hasta la sección A es 1.5. ¿A qué altura H dejará de funcionar el sifón?

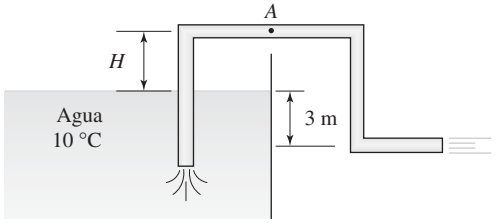


Fig. P4.91

4.92 La bomba que se muestra en la figura P4.92 es 85% eficiente. Si el aumento de presión es 120 psi, calcule la entrada de energía requerida en caballos de potencia.

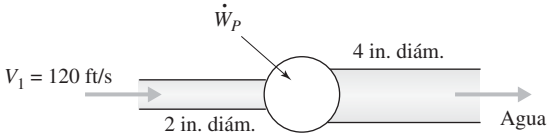


Fig. P4.92

4.93 La bomba que se muestra en la figura P4.92 es accionada por un motor de 20 kW. Si la bomba es 82% eficiente, determine el aumento de presión.

4.94 Una turbina, que es 87% eficiente, acepta 2 m³/s de agua de un tubo de 50 cm de diámetro. La caída de presión es 600 kPa y la velocidad de salida es pequeña. ¿Cuál es la salida de la turbina?

4.95 Una turbina recibe 450 ft³/s de agua de un tubo de 6 ft de diámetro a una presión de 120 psi y suministra 10 000 kW. La presión en el tubo de salida de $7\frac{1}{2}$ ft de diámetro es 18 psi. Calcule la eficiencia de la turbina.

4.96 Entra aire a un compresor con una velocidad insignificante a 85 kPa absoluta y a 20 ºC. Sale con una velocidad de 200 m/s a 600 kPa absoluta. Para un flujo másico de 5 kg/s, calcule la temperatura de salida si la potencia requerida es de 1500 kW y:

(a) No hay transferencia de calor

(b) La tasa de transferencia de calor es 60 kW

4.97 Entra aire a un compresor, en condiciones estándar, con una velocidad insignificante. A la salida de 1 in de diámetro, la presión, temperatura y velocidad son 60 psia, 300 ºF y 600 ft/s, respectivamente. Si la transferencia de calor es 10 Btu/lb de aire, encuentre la potencia requerida por el compresor.

4.98 Un pequeño río con gasto de 15 m³/s alimenta el reservorio que se muestra en la figura P4.98. Calcule la energía que está disponible continuamente si la turbina es 80% eficiente. El coeficiente de pérdida para el sistema global de tuberías es $K = 4.5$.

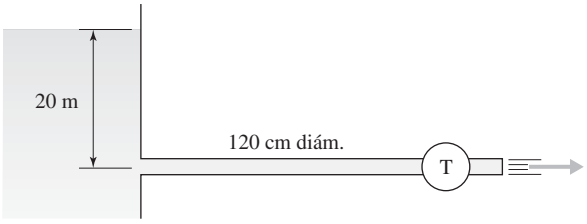


FIG. P.4.98

4.99 Para el sistema ilustrado en la figura P4.99 la velocidad promedio en el tubo es 10 m/s. Hasta el punto A, K = 1.5, de B a C, K = 6.2 y la bomba es 80% eficiente. Si p_C = 200 kPa, encuentre p_A, y p_B y la potencia requerida por la bomba.

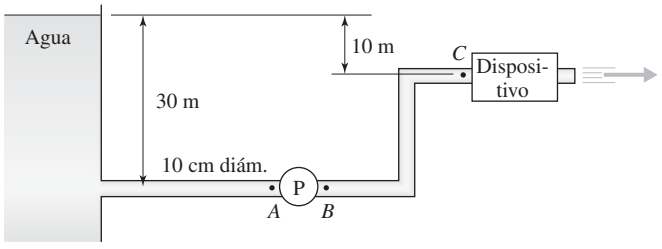


Fig. P4.99

4.100 Un motor de gasolina usa un carburador para mezclar aire y combustible. La gasolina es bombeada a razón de 6.3 cm³/s a través de una tubería de 5 mm de diámetro desde un tanque que se mantiene a 100 kPa, como se muestra en la figura P4.100. La gasolina descarga a través de una boquilla de 0.8 mm en el carburador a una presión de 95 kPa. La pérdida total de carga hidráulica en el sistema es de $210V^2/2g$, donde V es la velocidad promedio en el tubo. Si la bomba tiene una eficiencia de 75%, determine la potencia que necesita la bomba.

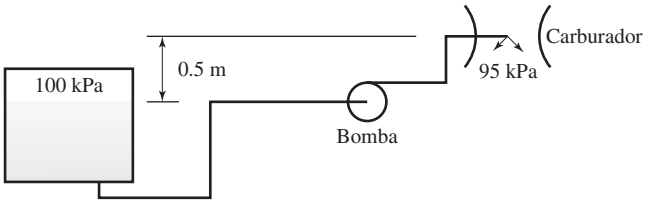


Fig. P4.100

4.101 Determine la salida de potencia de la turbina ilustrada en la figura P4.101 para un gasto de agua de 18 ft³/s. La turbina es 90% eficiente.

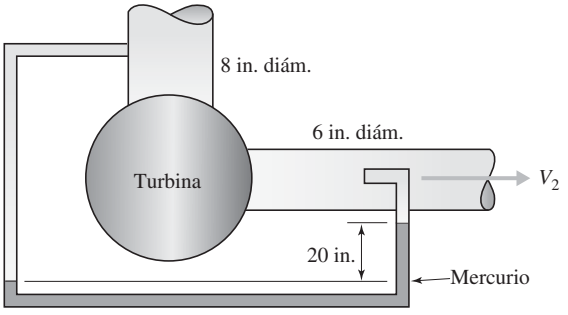


Fig. P4.101

4.102 Encuentre la potencia requerida por la bomba con eficiencia de 85% que se muestra en la figura P4.102 si el coeficiente de pérdida hasta A es 3.2, y de B a C, K = 1.5. Desprecie las pérdidas a través de la boquilla de salida. También, calcule p_A y p_B.

4.103 De un reservorio con carga hidráulica de 10 m, sale agua y fluye por un tubo horizontal de 10 cm de diámetro, luego sale a la atmósfera. En el extremo del tubo, está agregado un corto tramo de tubo de diámetro más pequeño. El coeficiente de pérdida, incluyendo la reducción, es 2.2 y después de la reducción las pérdidas son despreciables. Calcule el diámetro mínimo del tubo más pequeño si el gasto es de 0.02 m³/s.

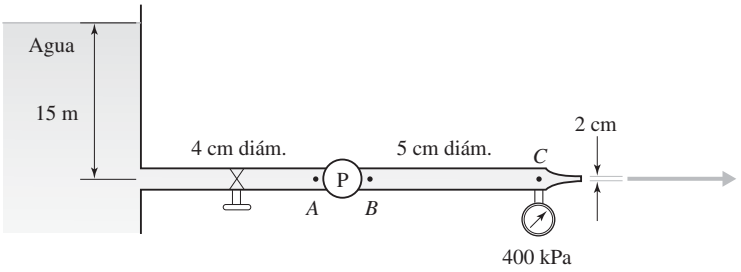


Fig. P4.102

4.104 Desprecie las pérdidas y encuentre la profundidad del agua en la sección elevada del canal rectangular que se muestra en la figura P4.104. Suponga perfiles de velocidad uniformes.

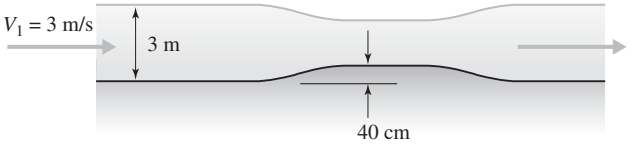


Fig. P4.104

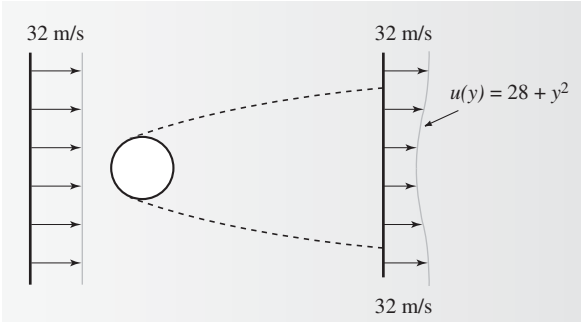


Fig. P4.105

4.105 Determine la rapidez de pérdida de energía cinética, en watts, debida al cilindro ilustrado en la figura P4.105. Suponga un flujo plano con ρ = 1.23 kg/m³ y haga el cálculo por metro de longitud del cilindro.

4.106 Calcule la pérdida de carga hidráulica entre las dos secciones que se muestran en la figura P4.106. Suponga:

(a) Un tubo con $d = 1.2$ cm

(b) Un conducto rectangular de 1.2 cm × 8 cm

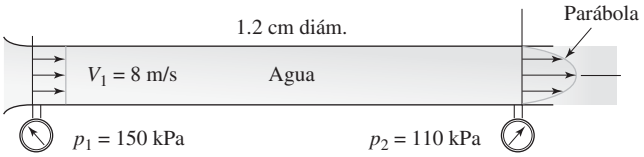


Fig. P4.106

4.107 Calcule el factor de corrección por energía cinética para el perfil de velocidad en el lugar aguas abajo en la figura P4.105.

4.108 Determine el factor de corrección por energía cinética si:

(a) $u(r) = 10(1 - r^2/R^2)$ en un tubo de 2 cm de diámetro.

(b) $u(y) = 10(1 - y^2/h^2)$ en un canal de 2 cm de altura.

4.109 Es frecuente que un perfil de velocidad turbulento en un tubo se escriba como $u(r) = u_{máx}(1 - r/R)^{1/n}$, donde n varía entre 5 y 9, siendo 7 el valor más común. Calcule una expresión para la energía cinética que pasa por una sección del tubo y el factor de corrección por energía cinética si:

(a) $n = 5$

(b) $n = 7$

(c) $n = 9$

4.110 Un avión de reacción está volando con una velocidad V_∞. Use la ecuación de la energía para relacionar el consumo de combustible $\dot{m}_f$ con otras variables de flujo como la velocidad de los gases de la combustión V_2 y la temperatura T_2, la velocidad de entrada V_1 y la temperatura T_1, la fuerza de resistencia al avance F_D que actúa sobre el avión, el flujo másico del aire de entrada $\dot{m}$, y el valor de calentamiento del combustible q_f(kJ/kg).

4.111 Un automóvil se desplaza a 100 km/h con una fuerza de resistencia al avance de 1 340 N. Se observa que el consumo de combustible es 5 km/L. Si la eficiencia del motor es 15%, determine la energía liberada por kilogramo de combustible. La densidad del combustible es 680 kg/m^3.

4.112 Un sifón de 180 m de largo y 2 cm de diámetro suministra agua a 20 ºC desde un reservorio a un campo con fines de irrigación. El agua sale a 35 cm debajo de la superficie del reservorio. Se supone que la distribución de velocidad es de $u(r) = 2V(1 - r^2/r_0^2)$, donde V es la velocidad promedio. Determine el gasto si la pérdida de carga hidráulica está dada por $32\nu LV/(D^2g)$, donde L es la longitud del sifón, D su diámetro, y ν la viscosidad cinemática del agua.

4.113 En el sistema de filtración que se muestra en la figura P4.113, está circulando agua en forma permanente a través de un filtro utilizando una bomba. La curva característica de la bomba está dada por $H_P = 15 + 11Q - 150Q^2$, donde H_P está en metros y Q en m^3/s. En el sistema se utiliza un tubo de diámetro constante de 10 cm. El coeficiente de pérdida global para el sistema basado en la velocidad promedio en el tubo es $K = 51$. Determine el gasto y la entrada de potencia para la bomba.

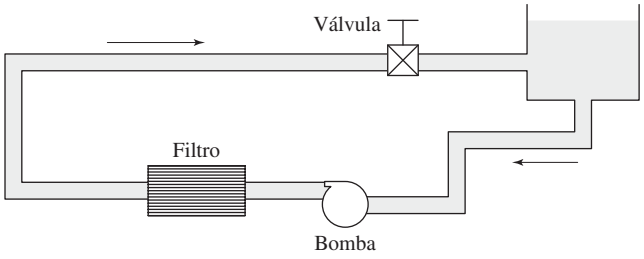
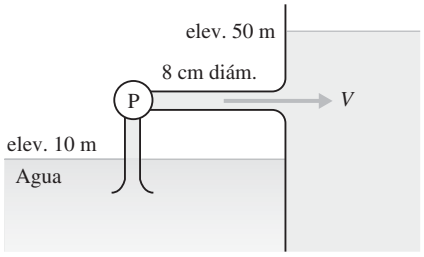
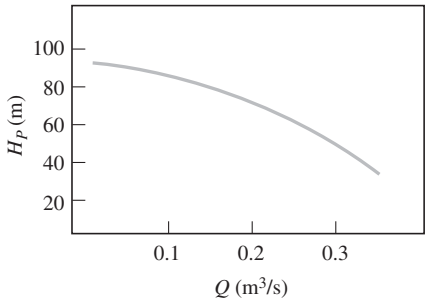


Fig. P4.113

4.114 La curva de la bomba dada por un fabricante para la bomba del sistema de flujo mostrado en la figura P4.114a está en la figura P4.114b. Calcule el gasto. El coeficiente de pérdida global es:



(a)



(b)

Fig. P4.114

(a) $K = 5$ **(b)** $K = 20$

La solución comprende un procedimiento de prueba y error, o se puede escribir la ecuación de la energía como $H_p = H_p(Q)$ y graficarla en la curva de la bomba.

4.115 Una bomba de agua tiene una entrada y dos salidas como se muestra en la figura P4.115, todas a la misma elevación. ¿Qué potencia de la bomba se requiere si ésta es 85% eficiente? Desprecie las pérdidas en el tubo.

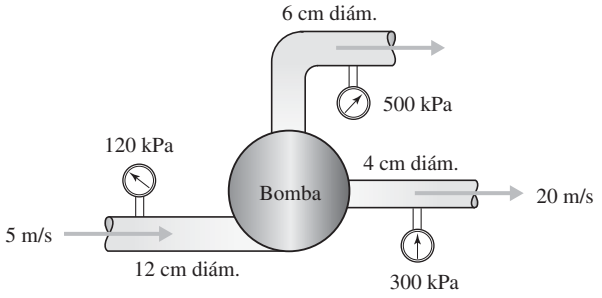


Fig. P4.115

Ecuación de la cantidad de movimiento

4.116 En un tubo de diámetro d, fluye agua a una presión p. Sale por una boquilla de diámetro $d/2$ a la atmósfera. Calcule la fuerza del agua en la boquilla si:

(a) $d = 6$ cm, $p = 200$ kPa
(b) $d = 6$ cm, $p = 400$ kPa
(c) $d = 12$ cm, $p = 200$ kPa
(d) $d = 3$ in., $p = 30$ psi
(e) $d = 3$ in., $p = 60$ psi
(f) $d = 6$ in., $p = 30$ psi

4.117 Una boquilla y una manguera están conectadas a la escalera de un camión de bomberos. ¿Qué fuerza es necesaria para sostener una boquilla alimentada por una manguera de 9 cm de diámetro con una presión de 2000 kPa? El diámetro de salida de la boquilla es de 3 cm.

4.118 Por un tubo de 10 cm de diámetro a una presión de 400 kPa fluye agua de una boquilla recta. Calcule la fuerza del agua en la boquilla si el diámetro de salida es:

(a) 8 cm **(c)** 4 cm
(b) 6 cm **(d)** 2 cm

4.119 Encuentre la fuerza horizontal del agua en el codo horizontal que se muestra en la figura P4.119.

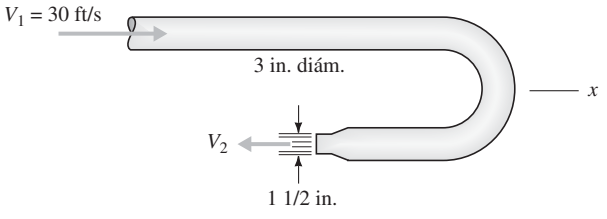


Fig. P4.119

4.120 Encuentre las componentes de la fuerza horizontal del agua en el codo horizontal que se muestra en la figura P4.120 si p_1 es:

(a) 200 kPa
(b) 400 kPa
(c) 800 kPa

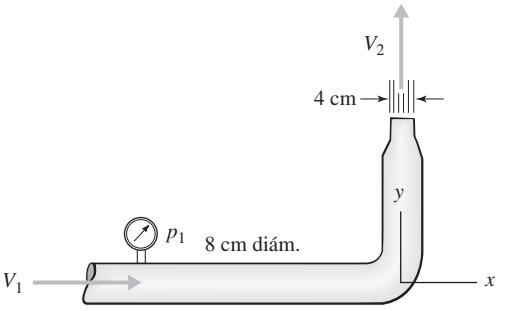


Fig. P4.120

4.121 ¿Cuál es la fuerza neta necesaria para mantener en el tubo la placa con orificio que se muestra en la figura P4.121?

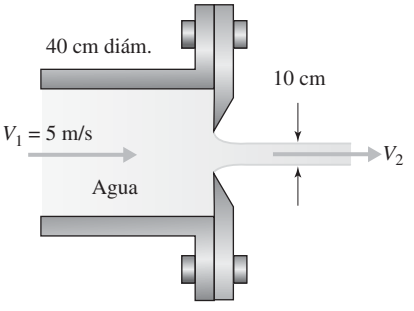


Fig. P4.121

4.122 Suponiendo perfiles de velocidad uniformes, encuentre F necesaria para detener el tapón en el tubo mostrado en la figura P4.122. Desprecie los efectos viscosos.

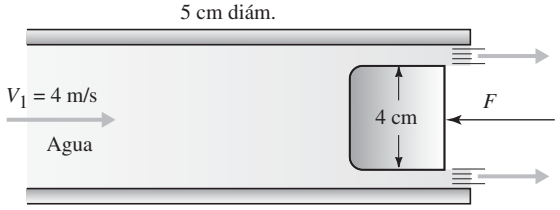


Fig. P4.122

4.123 Desprecie los efectos viscosos, suponga perfiles de velocidad uniformes y encuentre la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre la obstrucción mostrada en la figura P4.123.

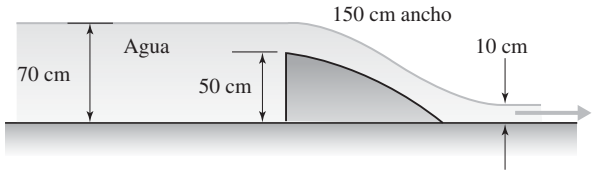


Fig. P4.123

4.124 Suponiendo distribuciones de presión hidrostática, perfiles de velocidad uniformes y efectos viscosos insignificantes, encuentre la fuerza horizontal necesaria para mantener la compuerta de desagüe en la posición mostrada en la figura P4.124.

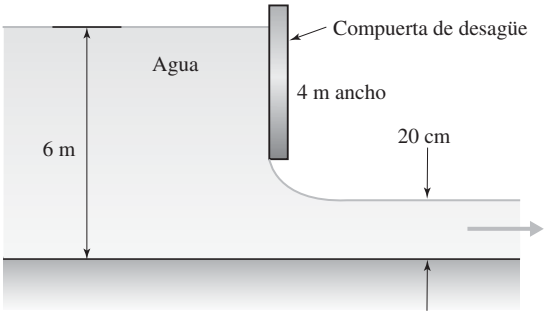


Fig. P4.124

4.125 Un salto repentino (un salto hidráulico) ocurre en un canal rectangular como se muestra en la figura P4.125. Encuentre y_2 y V_2 si:

(a) $V_1 = 8$ m/s, $y_1 = 60$ cm
(b) $V_1 = 12$ m/s, $y_1 = 40$ cm
(c) $V_1 = 20$ ft/s, $y_1 = 2$ ft
(d) $V_1 = 30$ ft/s, $y_1 = 3$ ft

Fig. P4.125

4.126 Un salto hidráulico, como se muestra en la figura P4.125, ocurre de modo que $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. Encuentre V_1 y y_2 si:

(a) $y_1 = 80$ cm
(b) $y_1 = 2$ ft

4.127 Para un gasto de 9 m³/s, encuentre V_2 y y_2 para el salto hidráulico mostrado en la figura P4.127. El canal es de 3 m de ancho. Desprecie las pérdidas hasta el salto.

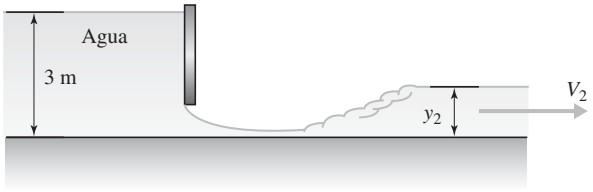


Fig. P4.127

4.128 Se mide que la velocidad es 10 ft/s aguas abajo de un salto hidráulico donde la profundidad es 6 ft. Calcule la velocidad y la profundidad antes del salto.

4.129 Para el sistema mostrado en la figura P4.129, calcule la presión p_2 aguas abajo si $p_1 = 60$ kPa y $V_1 = 20$ m/s. Desprecie las pérdidas. (*Nota:* la presión inmediatamente después de la expansión del tubo es p_1.)

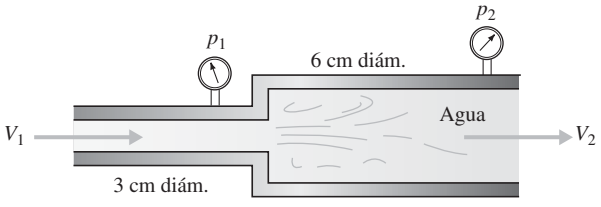


Fig. P4.129

4.130 Por un tramo de 10 cm de diámetro de una sección T horizontal que se bifurca en tubos de 5 cm de diámetro, fluye agua a 15 m/s. Encuentre la fuerza del agua en la sección T si las ramificaciones salen a la atmósfera. Desprecie los efectos viscosos.

4.131 Por el doble codo que se ilustra en la figura P4.131, fluye agua permanentemente. El agua fluye en el codo desde la parte superior a 5 m/s, y desde la izquierda a 15 m/s. Determine las componentes vertical y horizontal de la fuerza necesaria para mantener estacionario el codo.

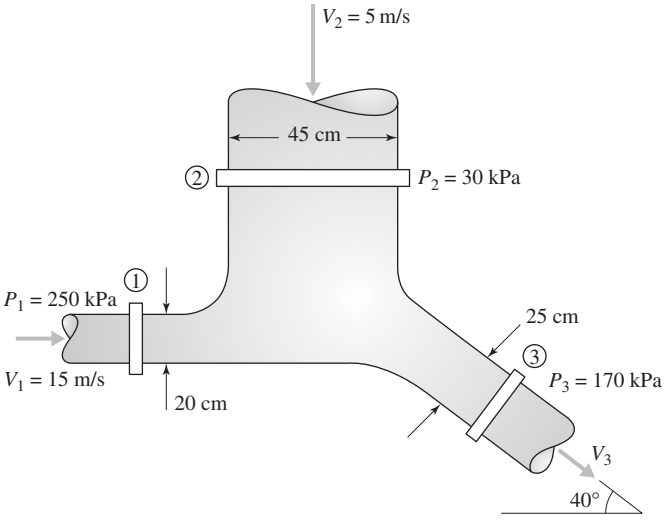


Fig. P4.131

4.132 Un chorro horizontal de agua de 10 cm de diámetro con $\dot{m}$ = 300 kg/s incide sobre una placa vertical. Calcule:

- **(a)** La fuerza necesaria para mantener estacionaria la placa
- **(b)** La fuerza necesaria para desplazar la placa del chorro a 10 m/s
- **(c)** La fuerza necesaria para acercar la placa hacia el chorro a 10 m/s

4.133 Un chorro horizontal de agua de 2½ in de diámetro incide sobre una placa vertical. Determine la velocidad del agua que sale del chorro si una fuerza de 200 lb es necesaria para:

- **(a)** Mantener estacionaria la placa
- **(b)** Desplazar la placa del chorro a 30 ft/s
- **(c)** Acercar la placa al chorro a 30 ft/s

4.134 Determine el flujo másico que sale del chorro que se muestra en la figura P4.134 si se requiere de una fuerza de 700 N para:

- **(a)** Mantener estacionario el cono
- **(b)** Desplazar el cono del chorro a 8 m/s
- **(c)** Acercar el cono al chorro a 8 m/s

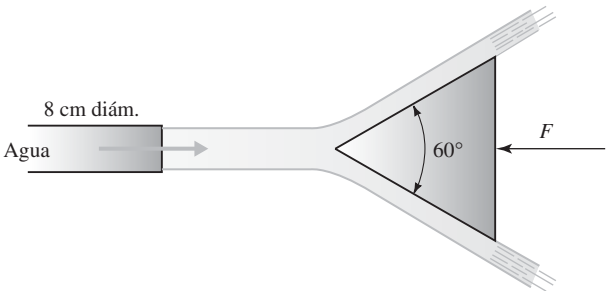


Fig. P4.134

4.135 Calcule las componentes de la fuerza del agua que actúan sobre el álabe deflector mostrado en la figura P4.135 si:

- **(a)** El álabe está estacionario
- **(b)** La álabe se mueve hacia la derecha a 60 ft/s
- **(c)** El álabe se mueve a la izquierda a 60 ft/s

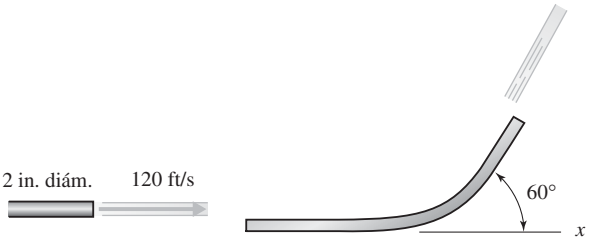


Fig. P4.135

4.136 El álabe del problema 4.135 es uno de una serie de álabes que están conectados a un rotor de 50 cm de radio que tiene una velocidad rotacional de 30 rad/s. Si hay 10 de estos chorros de agua, encuentre la salida de potencia.

4.137 Determine las componentes de la fuerza del vapor sobrecalentado que actúa sobre el álabe mostrado en la figura P4.137 si:

- **(a)** El álabe está estacionario
- **(b)** El álabe se mueve hacia la derecha a 100 m/s
- **(c)** El álabe se mueve hacia la izquierda a 100 m/s

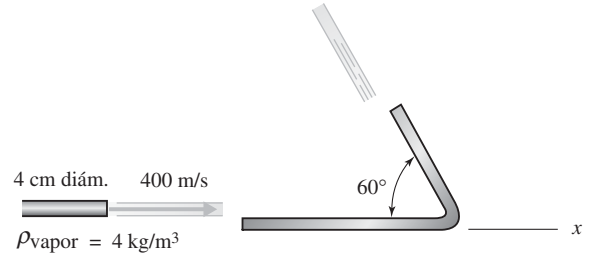


Fig. P4.137

4.138 El álabe del problema 4.137 es uno de una serie de álabes que están conectados a un rotor de 1.2 m de radio que gira a 150 rad/s. Calcule la salida de potencia si hay 15 de estos chorros de vapor.

4.139 Chorros de vapor sobrecalentado inciden sobre los álabes de la turbina mostrada en la figura P4.139. Encuentre la salida de potencia de la turbina si hay 15 chorros y α_1 es:

(a) 45° **(b)** 60° **(c)** 90°

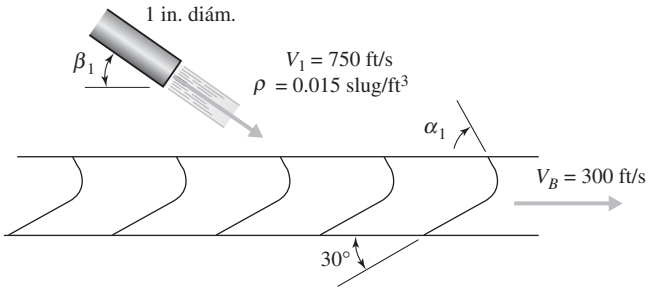


Fig. P4.139

4.140 Doce chorros de agua a alta velocidad inciden sobre los álabes como se muestra en la figura P4.140. Encuentre la salida de potencia y los ángulos de los álabes si V_B es:

(a) 20 m/s **(b)** 40 m/s **(c)** 50 m/s

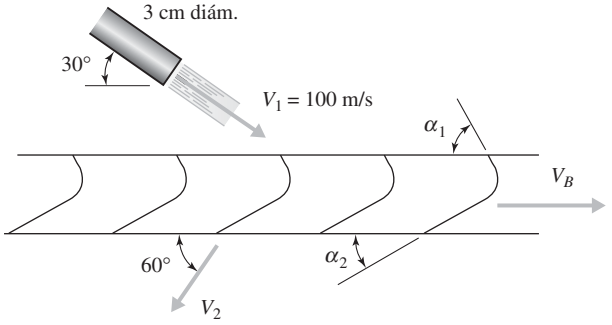


Fig. P4.140

4.141 Quince chorros de agua inciden sobre los álabes de una turbina como se muestra en la figura P4.141. Calcule la salida de potencia y los ángulos de los álabes si β_2 es:

(a) 60°
(b) 70°
(c) 80°

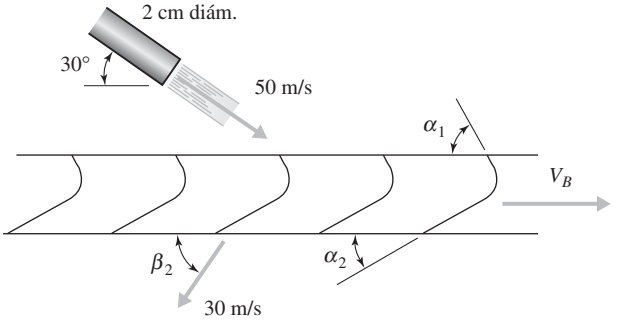


Fig. P4.141

4.142 Fluye agua del chorro rectangular como se muestra en la figura. P4.142. Encuentre la fuerza F y los flujos másicos $\dot{m}_2$ y $\dot{m}_3$ si

(a) $b = 20, h = 40$ cm, $V_1 = 40$ m/s
(b) $b = 20, h = 20$ in., $V_1 = 120$ fps

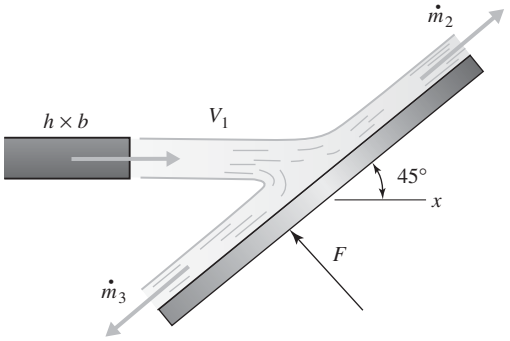


Fig. P4.142

4.143 La placa del problema 4.142a se mueve hacia la izquierda a 20 m/s. Encuentre la potencia requerida.

4.144 Calcule la velocidad con que debe moverse la placa del problema 4.142a (en la dirección x) para producir la máxima potencia de salida.

4.145 Un vehículo grande con masa de 100 000 kg reduce su velocidad al insertar un deflector de 180º en un canal de agua. Si el deflector de 60 cm de ancho entra 10 cm en el agua, calcule la desaceleración inicial si el vehículo está desplazándose a 120 km/h. También, encuentre el tiempo necesario para alcanzar una velocidad de 60 km/h.

4.146 Una máquina quitanieves, de 2.5 m de ancho, se desplaza a 50 km/h sacando nieve a una profundidad de 0.8 m. La nieve sale de la hoja normal a la dirección de movimiento de la quitanieves. ¿Qué potencia requiere la operación de barrido si la densidad de la nieve es 90 kg/m^3?

4.147 Un vehículo con masa de 5 000 kg se desplaza a 900 km/h. Es desacelerado al bajar en el agua un cucharón de 20 de ancho a una profundidad de 6 cm (figura P4.147). Si el agua es desviada 180º, calcule la distancia que el vehículo debe recorrer para que la velocidad se reduzca a 100 km/h.

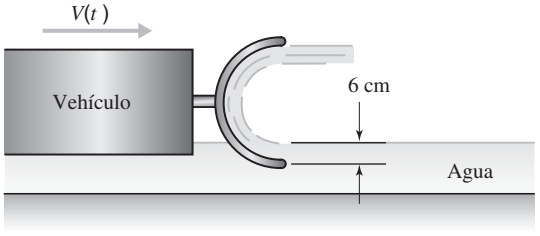


Fig. P4.147

4.148 Los motores a reacción modernos tienen álabes que se extienden para producir un empuje negativo justo después que un avión toca tierra en la pista. El flujo de aire a través de un motor particular es de 100 kg/s, y los gases de la combustión salen del motor a una velocidad de 800 m/s respecto al motor. La proporción entre combustible y aire es de 1 a 40 en este caso. Calcule el empuje negativo producido por los álabes para la configuración mostrada en la figura P4.148.

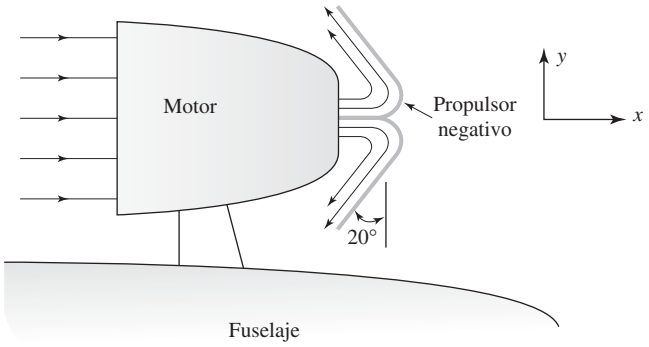


Fig. P4.148

4.149 Se requiere que un vehículo de 20 slug tenga una aceleración inicial de 6 ft/s^2. Se propone que un chorro de agua de $2\frac{1}{2}$ in de diámetro incida sobre una paleta construida en la parte posterior del vehículo para que desvíe el agua un ángulo de 180º. ¿Qué velocidad del chorro es necesaria? ¿Qué velocidad se alcanzará después de 2 segundos?

4.150 El bote para pantanos que se muestra en la figura P4.150 es impulsado a 50 km/h por una hélice de 2 m de diámetro que requiere un motor de 20 kW. Calcule el empuje sobre el bote, el gasto de aire a través de la hélice y su eficiencia.

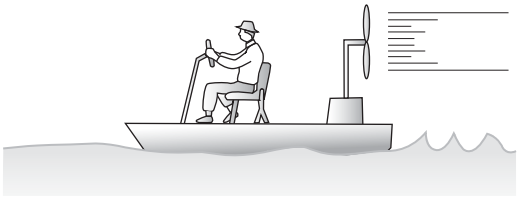


Fig. P4.150

4.151 Un avión es impulsado a una velocidad de 200 km/h por una hélice de 2.2 m de diámetro. La velocidad del aire corriente abajo de la hélice es de 320 km/h respecto al avión. Determine la diferencia de presión a través de las aspas de la hélice y la potencia requerida. Use $\rho = 1.2$ kg/m^3.

4.152 La hélice de 20 in de diámetro en un bote se mueve a 20 mph causando una velocidad de 40 mph respecto al bote. Calcule la potencia requerida y el flujo másico de agua a través de la hélice.

4.153 Un bote con motor de reacción toma 0.2 m^3/s de agua y la descarga a una velocidad de 20 m/s respecto al bote. Si éste se desplaza a 10 m/s, calcule el empuje producido y la potencia requerida.

4.154 Calcule el cambio en el flujo de la cantidad de movimiento del agua que fluye a través de la contracción plana que se ilustra en la figura P4.154 si el gasto es de 0.2 m^3/s. La pendiente de los dos perfiles es la misma. El perfil aguas arriba es creado por una placa que contiene ranuras de varios anchos.

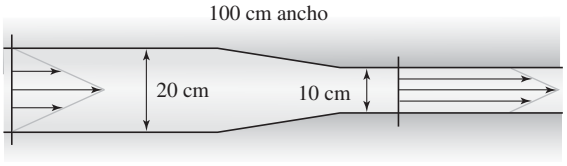


Fig. P4.154

4.155 Determine el factor de corrección por la cantidad de movimiento para el siguiente perfil mostrado en el problema 4.154:

(a) El perfil de entrada

(b) El perfil de salida

4.156 Agua a 60 ºF fluye en un tubo horizontal de $1\frac{1}{2}$ in de diámetro y experimenta una caída de presión de 0.03 psi sobre un tramo de 30 ft del tubo. Calcule el gradiente de velocidad en la pared. Recuerde que $\tau = \mu \left| du/dr \right|$.

4.157 Encuentre la fuerza de arrastre sobre las paredes entre las dos secciones del tubo horizontal mostrado en la figura P4.157.

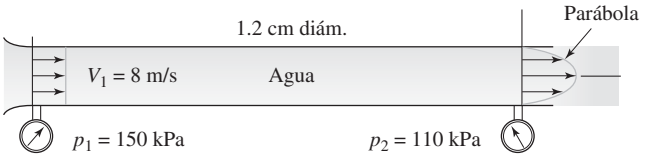


Fig. P4.157

4.158 La distribución de velocidad aguas abajo de un cilindro circular de 10 m de largo es como se muestra en la figura P4.158. Determine la fuerza del aire sobre el cilindro. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

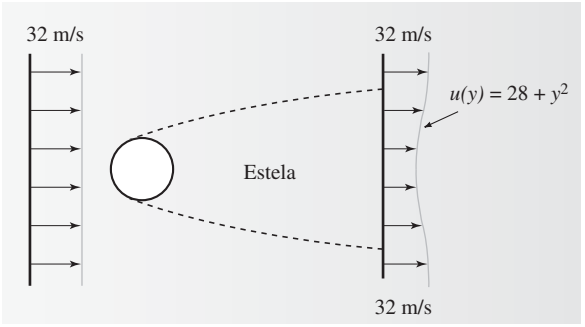


Fig. P4.158

4.159 Calcule la fuerza de arrastre que actúa sobre la placa plana de 2 m que se muestra en la figura P4.159. Fuera de la región viscosa, la velocidad es uniforme. Seleccione:

(a) Un volumen de control rectangular que se extienda fuera de la región viscosa (el flujo másico cruza la parte superior).

(b) Un volumen de control con el límite superior siendo una línea de corriente (ningún flujo másico cruza una línea de corriente).

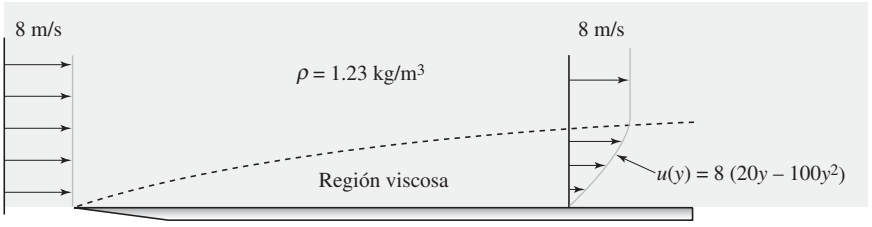


Fig. P4.159

Cantidad de movimiento y energía

4.160 Determine la pérdida de potencia en el salto hidráulico del:

(a) Problema 4.125a

(b) Problema 4.127

(c) Problema 4.128

4.161 Calcule el coeficiente de pérdida para la expansión del problema 4.129. Base el coeficiente en la velocidad V_1.

4.162 Encuentre una relación entre la aceleración de un carro cilíndrico y las variables mostradas en la figura P4.162. Desprecie la fricción. La masa inicial del carro y el agua es m_0.

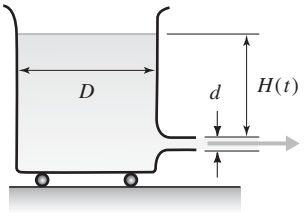


Fig. P4.162

4.163 Establezca las ecuaciones necesarias para determinar $H(t)$ para el cohete de aire/agua que se muestra en la figura P4.163.

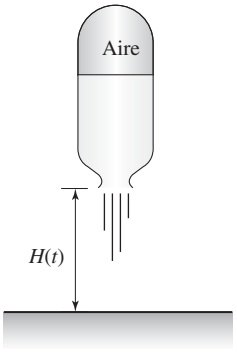


Fig. P4.163

Momento de la cantidad de movimiento

4.164 Un aspersor de agua de cuatro brazos tiene boquillas a ángulos rectos respecto a los brazos de 30 cm de largo y a ángulos de 45º respecto al suelo. Si los diámetros de salida son de 8 mm y 4 kg/s de agua salen por las cuatro boquillas, encuentre la velocidad rotacional.

4.165 Un rotor de cuatro brazos tiene toberas de $\frac{1}{2}$ in de diámetro que dejan salir agua a 200 ft/s respecto al brazo. Las boquillas están a ángulos rectos respecto a los brazos de 10 in de largo y paralelas al suelo. Si la velocidad rotacional es de 30 rad/s, encuentre la salida de potencia. Los brazos son de 1.5 in de diámetro.

4.166 Sale agua de las ranuras de 6 mm como se muestra en la figura P4.166. Calcule Ω si los dos brazos suministran 20 kg/s.

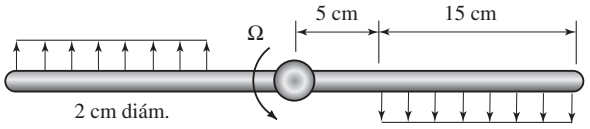


Fig. P4.166

4.167 Un motor de 1 kW impulsa el rotor que se ilustra en la figura P4.167 a 500 rad/s. Determine el gasto despreciando todas las pérdidas. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

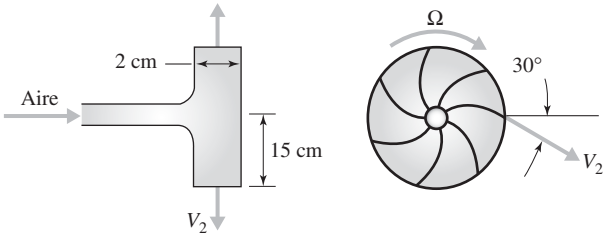


Fig. P4.167

4.168 Encuentre una expresión para Ω(t) si el aspersor del problema 4.164 se activa de pronto en $t = 0$. Suponga que los brazos son de 2 cm de diámetro.

4.169 Entra aire a la bomba de aire de tipo centrífuga, de un soplador de hojas a través del área B que se muestra en la figura P4.169. El tubo de 10 cm de diámetro y 1.2 m de largo tiene una boquilla con un área de salida de 30 cm^2. La velocidad de salida es de 240 km/h.

- **(a)** Calcule la descarga.
- **(b)** Si el coeficiente de pérdida global es 1.2, calcule la carga hidráulica de la bomba.
- **(c)** ¿Qué potencia debe suministrar la bomba al aire?
- **(d)** Si la bomba es 65% eficiente, ¿cuál es la potencia requerida de su motor de gasolina?
- **(e)** Calcule la presión a la entrada del tubo (justo corriente abajo de la bomba).
- **(f)** Si el soplador de 10 kg pende de una correa, ¿qué fuerza debe aplicarse a la manija ubicada 30 cm arriba de la boquilla? El centro de gravedad está a 70 cm arriba y a 120 cm a la izquierda de la salida.

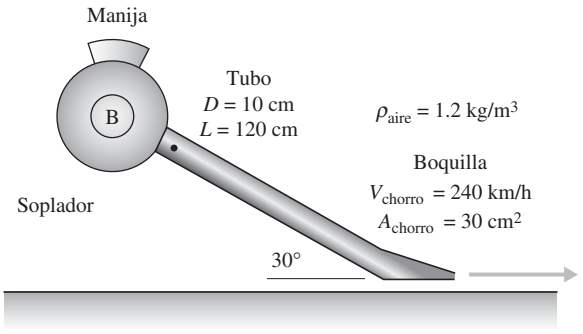


Fig. P4.169

Despegue de un avión de reacción comercial. Las mejoras actuales en la eficiencia aeronáutica y en la velocidad se deben, en parte, a la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento del aire conforme las partículas de aire se mueven relativas al avión a velocidades subsónicas y transónicas. (Mayskyphoto/Shutterstock)

5

Formas diferenciales de las leyes fundamentales

Esquema

5.1 Introducción
5.2 Ecuación diferencial de continuidad
5.3 Ecuación diferencial de la cantidad de movimiento
  5.3.1 Formulación general
  5.3.2 Ecuación de Euler
  5.3.3 Ecuaciones de Navier-Stokes
  5.3.4 Ecuaciones de vorticidad
5.4 Ecuación diferencial de la energía
5.5 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son deducir las ecuaciones diferenciales y establecer las condiciones frontera e iniciales necesarias para despejar los campos de velocidad y presión en un fluido. Las ecuaciones diferenciales parciales incluyen:

- La ecuación de continuidad
- Las ecuaciones de la cantidad de movimiento para flujos inviscidos (ecuaciones de Euler)
- Las ecuaciones de la cantidad de movimiento para flujos viscosos (ecuaciones de Navier-Stokes)
- Las ecuaciones de vorticidad
- La ecuación de la energía

Numerosos ejemplos y problemas ilustrarán varias aplicaciones relativamente sencillas de las ecuaciones diferenciales, así como la simplificación de las ecuaciones que dependen de la situación de flujo.

5.1 INTRODUCCIÓN

El material de este capítulo se puede omitir en un curso introductorio. Los capítulos subsiguientes de este libro han sido diseñados para permitir dos posibles rutas: pueden usarse las ecuaciones diferenciales generales presentadas en este capítulo, o deducirse ecuaciones únicas para una geometría particular sin referirse a estas ecuaciones generales.

En el capítulo 4 se expresaron las leyes básicas en términos de un volumen de control fijo, un volumen finito en el espacio. Es frecuente que esto se describa como aproximación global a la mecánica de fluidos. Para hallar una solución usando el volumen de control fue necesario suponer una aproximación de los integrandos (principalmente las distribuciones de velocidad y presión), o se dieron expresiones para los integrandos. Supóngase que deseamos hallar una cantidad integral, por ejemplo el gasto de una presa o la sustentación sobre una superficie aerodinámica, y que no podemos hacer una suposición razonable para la distribución de velocidad o presión. Entonces es necesario determinar las distribuciones que entran en los integrandos antes de que se pueda hallar la cantidad integral. Esto se hace resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales que expresan las leyes básicas.

CONCEPTO CLAVE *Es necesario determinar las distribuciones que entran en los integrandos antes de que se pueda hallar la cantidad integral.*

Las soluciones de las formas diferenciales de las leyes básicas no sólo nos permiten determinar cantidades integrales de interés, sino que con frecuencia contienen información en sí mismas. Por ejemplo, podemos desear conocer la ubicación exacta de la presión mínima sobre un cuerpo, o puede ser de interés la región de flujo separado de una superficie. Entonces, con frecuencia resolvemos las ecuaciones diferenciales para contestar una pregunta específica surgida acerca de un flujo especial.

Existen dos métodos principales que se emplean para deducir las formas diferenciales de las leyes fundamentales. Un método comprende la aplicación del teorema de Gauss, que permite transformar las integrales de área de las ecuaciones básicas del capítulo 4 en integrales de volumen; luego los integrandos se agrupan en una integral, que puede igualarse a cero. La integración es válida sobre cualquier volumen de control arbitrario, y entonces el integrando mismo puede igualarse a cero, dándonos la forma diferencial de la ley básica. El otro método, el que se utiliza en este libro, es identificar un elemento infinitesimal en el espacio y aplicar las leyes básicas directamente a ese elemento. Ambos métodos resultan en las formas diferenciales de las leyes básicas; el primer método, sin embargo, exige el uso de cálculo vectorial y tensorial, matemáticas que por lo general se consideran innecesarias en un primer curso de fluidos. Introducimos un poco de cálculo vectorial, pero no se usará al nivel operacional requerido por el teorema de Gauss.

La conservación de la masa, aplicada a un elemento infinitesimal, conduce a la ecuación diferencial de continuidad; relaciona los campos de densidad y velocidad.[1] La segunda ley de Newton (una relación vectorial) resulta en tres ecuaciones diferenciales parciales conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes; relacionan los campos de velocidad, presión y densidad e incluyen la viscosidad y el vector gravedad. La primera ley de la termodinámica nos da la ecuación diferencial de la energía, que relaciona el campo de temperatura con los campos de velocidad, densidad y presión e introduce el calor específico y la conductividad térmica. La mayoría de los problemas considerados en un curso introductorio son para flujos isotérmicos, incompresibles, en los que el campo de temperatura no desempeña una función;

[1]Cuando una variable dependiente depende de más de una variable independiente, se conoce como un campo, es decir, $\mathbf{V}(x, y)$ es un campo de velocidad y $p(x, y, z, t)$ es un campo de presión. Las ecuaciones diferenciales parciales que describen las cantidades de campo a menudo se llaman *ecuaciones de campo*.

para tales flujos las tres ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad nos dan cuatro ecuaciones diferenciales parciales que relacionan las tres componentes de la velocidad y la presión. De esta manera no se requiere la ecuación de la energía. No obstante, deduciremos la ecuación diferencial de la energía para su uso en un número limitado de situaciones.

Las ecuaciones diferenciales parciales requieren condiciones que especifiquen ciertos valores para las variables dependientes a valores particulares de las variables independientes. Si la variable independiente es el tiempo, las condiciones se denominan **condiciones iniciales**; si la variable independiente es una coordenada espacial, las condiciones son **condiciones frontera**. Al problema total se le conoce como *problema de valor inicial* o *problema de valor frontera.*

Condiciones iniciales: *Condiciones que dependen del tiempo.*

Condiciones frontera: *Condiciones que dependen de una coordenada espacial.*

En mecánica de fluidos las condiciones frontera resultan de:

- Las condiciones sin deslizamiento para un flujo viscoso. La viscosidad hace que el fluido se adhiera a la pared, y entonces la velocidad del fluido en la pared adquiere la velocidad de la pared. Por lo general la velocidad de la pared es cero.
- La componente normal de la velocidad en un flujo inviscido, flujo en el que los efectos viscosos son insignificantes. Cerca de una pared no porosa, el vector velocidad debe ser tangente a la pared, demandando que la componente normal sea cero.
- La presión en un flujo que tenga una superficie libre. Para problemas con una superficie libre, como un flujo con una interfase líquido-gas, la presión se conoce en la interfase. Ésta sería una situación que comprenda movimiento de ondas o en un flujo separado con cavitación.
- La temperatura de la frontera o el gradiente de temperatura en la frontera. Si la temperatura de la frontera se mantiene constante, la temperatura del fluido junto a la frontera será igual a la temperatura de la frontera. Si la frontera está aislada, el gradiente de temperatura será cero en la frontera.

CONCEPTO CLAVE *La viscosidad hace que la velocidad del fluido en la pared adopte la velocidad de la pared.*

En un flujo no permanente la condición inicial exige que se especifiquen las tres componentes de la velocidad en todos los puntos en el flujo en un instante particular, usualmente tomado como $t = 0$. Esta información sería muy difícil de obtener en muchas situaciones, por ejemplo, la atmósfera; obtener las tres componentes de la velocidad en cualquier parte de la atmósfera en un instante dado es obviamente una tarea improbable.

Las ecuaciones diferenciales toman formas muy diferentes, dependiente del sistema coordenado que se seleccione. Deducimos las ecuaciones usando coordenadas cartesianas y, a continuación, expresamos las ecuaciones en forma vectorial. Las formas que usan coordenadas cilíndricas y esféricas se presentan en la tabla 5.1 al final de este capítulo.

5.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONTINUIDAD

Empecemos nuestra búsqueda de las ecuaciones diferenciales parciales que modelan el movimiento detallado de un fluido, aplicando la conservación de la masa a un pequeño volumen en un flujo de fluido. Considere el flujo másico que pasa por cada una de las caras del volumen de control infinitesimal que se muestra en la figura 5.1. Establecemos el flujo másico neto que entra al elemento igual a la rapidez de cambio de la masa del elemento; esto es,

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \frac{\partial}{\partial t} m_{\text{elemento}} \tag{5.2.1}$$

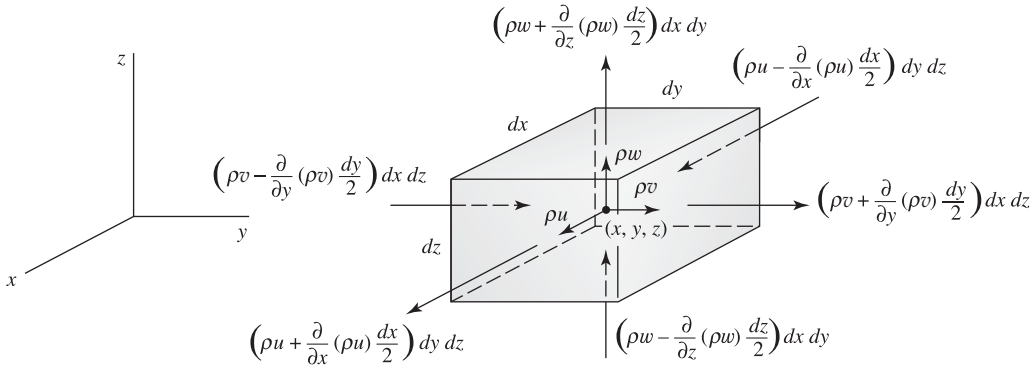


Fig. 5.1 Volumen de control infinitesimal usando coordenadas cartesianas.

Para realizar este equilibrio de masa identificamos pu, pv y pw en el centro del elemento y a continuación tratamos cada una de estas cantidades como una sola variable. Vea el análisis de presión asociado con la figura 2.3. Consulte la figura 5.1 que muestra el flujo másico a través de cada una de las seis caras; la ecuación 5.2.1 toma la forma

$$\begin{aligned}
&\left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz - \left[pu + \frac{\partial(pu)}{ax}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz \\
&+ \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dx}{2}\right]dx\,dz - \left[pv + \frac{\partial(pv)}{ay}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz \\
&+ \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy - \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dy\,dz)
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Restando los términos apropiados y dividiendo entre $dx\,dy\,dz$ resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5.2.3}$$

Como la densidad es considerada una variable, derivamos los productos y ponemos la ecuación 5.2.3 en la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{at} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial}{ax} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{5.2.4}$$

o bien, en términos de la derivada sustancial (vea la ecuación 3.2.11),

Ecuación diferencial de continuidad: *La ecuación diferencial que resulta de la conservación de la masa.*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{5.2.5}$$

Ésta es la forma más general de la **ecuación diferencial de continuidad** expresada en coordenadas cartesianas.

Podemos introducir el *operador gradiente*, llamado "del", que, en coordenadas rectangulares, es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}} \tag{5.2.6}$$

La ecuación de continuidad se puede escribir entonces en la forma

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{5.2.7}$$

donde $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$; $\nabla \cdot \mathbf{V}$ se denomina *divergencia* de la velocidad. Esta forma de ecuación de continuidad no se refiere a ningún sistema coordenado en particular, y por tanto se usa para expresar la ecuación de continuidad usando varios sistemas coordenados.

Para el caso de *flujo incompresible*, un flujo en el que la densidad de una partícula de fluido no cambia cuando se desplaza, vemos que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \tag{5.2.8}$$

Observe que esto es menos restrictivo que la suposición de densidad constante, que requeriría que cada término de la ecuación 5.2.8 fuera cero. Los flujos incompresibles que tienen gradientes de densidad se conocen a veces como *flujos estratificados* o *flujos no homogéneos*; los flujos atmosféricos y los oceánicos son ejemplos de estos flujos. Usando la ecuación 5.2.5, la ecuación de continuidad para un flujo incompresible toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{5.2.9}$$

o bien, en forma vectorial,

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{5.2.10}$$

CONCEPTO CLAVE *Para un flujo incompresible,* $\nabla\cdot\mathrm{V} = 0$.

La divergencia del vector velocidad es cero para un flujo incompresible.

En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación de continuidad para un flujo incompresible se presenta en la tabla 5.1. La expresión para *D/Dt* en coordenadas cilíndricas y esféricas también se puede consultar en la tabla 5.1.

Ejemplo 5.1

La velocidad de la componente x está dada por $u(x, y) = Ay^2$ en un flujo incompresible plano. Determine $v(x, y)$ si $v(x, 0) = 0$, como sería el caso en un flujo entre placas paralelas.

Solución

La ecuación diferencial de continuidad para un flujo incompresible plano es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ya que en un flujo plano las dos componentes de la velocidad dependen sólo de x y y. Con la $u(x, y)$ dada, encontramos que

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(Ay^2) = 0$$

Como ésta es una ecuación diferencial parcial, su solución es

$$v(x, y) = f(x)$$

Pero $v(x, 0) = 0$ requiere que $f(x) = 0$. En consecuencia,

$$v(x, y) = 0$$

es la velocidad de la componente y requerida por la conservación de la masa. Para que $v(x, y)$ no sea cero, $u(x, y)$ tendría que variar con x o $v(x, 0)$ tendría que ser diferente de cero.

Ejemplo 5.2

Fluye aire por un tubo y la velocidad en tres puntos cercanos A, B y C, separados entre sí 4 pulgadas es de 274, 285 y 291 ft/s, respectivamente, como se muestra en la figura E5.2. La temperatura y presión son 50 ºF y 50 psia, respectivamente, en el punto B. Aproxime $d\rho/dx$ en ese punto, suponiendo un flujo uniforme permanente.

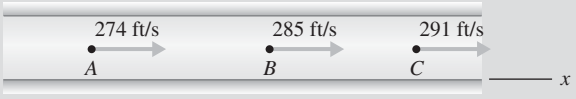


Fig. E5.2

Solución

La ecuación de continuidad (5.2.4) para este flujo permanente $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, uniforme $\left(\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$, se reduce a

$$u\frac{d\rho}{dx} + \rho\frac{du}{dx} = 0$$

Utilizamos derivadas ordinarias porque u y ρ dependen sólo de x. La derivada de la velocidad es aproximada por

$$\frac{du}{dx} \simeq \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{291 - 274}{8/12} = 25.5\ \frac{\text{ft/s}}{\text{ft}}$$

donde se ha utilizado la diferencia central más precisa.[2] La densidad es

[2]Con una diferencia hacia adelante $\Delta u/\Delta x = (291 - 285)/0.333 = 18$, una diferencia hacia atrás proporciona $\Delta u/\Delta x = (285 - 274)/0.333 = 33$. Estas dos aproximaciones son menos precisas que la diferencia central utilizada en el ejemplo. Un bosquejo de una curva general $u(x)$ podría mostrar gráficamente esto presentando tres puntos en $x - \Delta x$, x, y $x + \Delta x$ y trazando las pendientes.

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{50 \text{ lb/in}^2 \times 144 \text{ in}^2/\text{ft}^2}{1716 \text{ ft-1b/slug-°R} \times (50 + 460)°\text{R}} = 0.00823 \text{ slug/ft}^3$$

donde se usaron presión y temperatura absolutas. La derivada de la densidad se aproxima entonces y es

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{0.00823 \text{ slug/ft}^3}{285 \text{ ft/s}} \times 25.5 \text{ s}^{-1} = -0.000736 \text{ slug/ft}^4$$

Ejemplo 5.3

La componente x de la velocidad en los puntos A, B, C y D, que están separados 10 mm entre sí, se mide que es 5.76, 6.72, 7.61 y 8.47 m/s, respectivamente, en el flujo incompresible plano, permanente y simétrico, que se muestra en la figura E5.3 en el que $w = 0$. Aproxime la aceleración de la componente x en C y la componente y de la velocidad a 6 mm arriba de B.

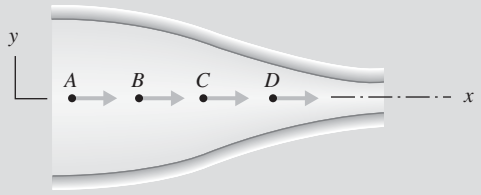


Fig. E5.3

Solución

Se encuentra que la componente deseada de la aceleración en la línea centro según la ecuación 3.2.9 es

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\,0} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\frac{\partial u}{\partial y}^{\,0} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{\,0}$$

$$\cong u\frac{\Delta u}{\Delta x} = 7.61\frac{8.47 - 6.72}{0.02} = 666 \text{ m/s}^2$$

donde hemos supuesto un flujo simétrico de modo que a lo largo de la línea centro es cero. Hemos utilizado diferencias centrales para aproximar $\partial u/\partial x$ en el punto C, como se hizo en el ejemplo 5.2 (vea la nota al pie de página número 2).

La componente y de la velocidad a 6 mm arriba de B se encuentra usando la ecuación de continuidad (5.2.9) como sigue:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} \simeq -\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{7.61 - 5.76}{0.02} = -92.5$$

$$\therefore \Delta v = -92.5\,\Delta y = -92.5 \times 0.006 = -0.555 \text{ m/s}$$

Sabemos que $v = 0$ en B; en consecuencia, en el lugar deseado, con $\Delta v = v - v_B$, resulta

$$v = -0.555 \text{ m/s}$$

Ejemplo 5.4

La ecuación de continuidad puede usarse para cambiar la forma de una expresión. Escriba la expresión $\rho\, D\tilde{u}/Dt + p\, \nabla\cdot\mathbf{V}$, que aparece en la ecuación diferencial de la energía, en términos de la entalpia h en lugar de en la energía interna $\tilde{u}$. Recuerde que $h = \tilde{u} + p/\rho$ (vea la ecuación 1.7.11).

Solución

Usando la definición de entalpía, podemos escribir

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

donde utilizamos

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

La expresión deseada es entonces

$$\rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} + p\,\nabla\cdot\mathbf{V} = \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + p\,\nabla\cdot\mathbf{V}$$

Se introduce la ecuación de continuidad (5.2.7), resultando en

$$\begin{aligned}\rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} + p\,\nabla\cdot\mathbf{V} &= \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + p\left(-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right)\\ &= \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}\end{aligned}$$

y así se ha introducido la entalpía.

5.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

5.3.1 Formulación general

Supóngase que no conocemos el campo de velocidad o el campo de presión en un flujo incompresible[3] de interés y que deseamos resolver las ecuaciones diferenciales para obtener esa información. La ecuación diferencial de continuidad es una ecuación diferencial para ayudarnos hacia este fin; no obstante, tiene tres incógnitas, las tres componentes de la velocidad. La ecuación diferencial de la cantidad de movimiento es una ecuación vectorial y por tanto nos proporciona tres ecuaciones escalares. Estas ecuaciones de componentes nos ayudarán en nuestro intento para determinar los campos de velocidad y presión. No obstante, existe una dificultad en la deducción de estas ecuaciones dado que debemos usar las componentes de esfuerzo para determinar las fuerzas requeridas en la ecuación de la cantidad de movimiento. Identifiquemos estas componentes de esfuerzo.

Hay nueve componentes de esfuerzo que actúan en un punto particular en flujo de fluido. Son las nueve componentes en el tensor esfuerzo τ_{ij}. No estudiaremos en detalle las propiedades de un tensor esfuerzo en este estudio de mecánica de fluidos, porque no tenemos que maximizar o minimizar el esfuerzo (como se requeriría

[3]Un flujo incompresible, cuando se refiere en un análisis general, como en esta sección, generalmente se referirá a un flujo de densidad constante. Esto es cierto en la mayor parte de la bibliografía sobre de mecánica de fluidos, incluyendo los libros de texto sobre el tema.

en un curso de mecánica de sólidos); no obstante, debemos usar las nueve componentes de esfuerzo en nuestras deducciones y, a continuación, relacionar las componentes de esfuerzo con los campos de velocidad y presión con las ecuaciones apropiadas. Las componentes de esfuerzo que actúan en un punto se ven en elementos rectangulares en dos y tres dimensiones en la figura 5.2. Estos elementos son considerados como un punto exagerado, un punto cúbico; las componentes de esfuerzo actúan en la dirección positiva en una cara positiva (un vector normal apunta en la dirección coordenada positiva) y en la dirección negativa en una cara negativa (un vector normal apunta en la dirección coordenada negativa). El primer subíndice en una componente de esfuerzo denota la cara sobre la cual actúa la componente, y el segundo subíndice denota la dirección en la cual actúa; la componente τ_{xy} actúa en la dirección y positiva en una cara x positiva y en la dirección y negativa en una cara x negativa, como se muestra en la figura 5.2a. Una componente de esfuerzo que actúa perpendicular a una cara se conoce como **esfuerzo normal**; las componentes σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz} son esfuerzos normales. Una componente de esfuerzo que actúa tangencial a una cara se denomina **esfuerzo cortante**; τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz} y τ_{zy} son las componentes del esfuerzo cortante.

Esfuerzo normal: *Componente de esfuerzo que actúa perpendicular a un área.*

Esfuerzo cortante: *Componente de esfuerzo que actúa tangencial a un área.*

Hay nueve componentes de esfuerzo que actúan en un punto particular en un fluido. Para deducir la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento, considere las fuerzas que actúan en la partícula infinitesimal de fluido mostrada en la figura 5.3. Se muestran sólo las fuerzas que actúan en caras positivas. Se supone que las componentes de esfuerzo son funciones de x, y, z y t, y por tanto los valores de las componentes de esfuerzo cambian de una cara a otra porque la ubicación de cada cara es ligeramente diferente. Se supone que la fuerza de cuerpo actúa en una dirección arbitraria.

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula de fluido, para la dirección de la componente x, es $\Sigma F_x = ma_x$. Para la partícula mostrada en la figura 5.3, ésta toma la forma

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy \\
&\quad - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz \\
&\quad - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy + \rho g_x\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz \frac{Du}{Dt}
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

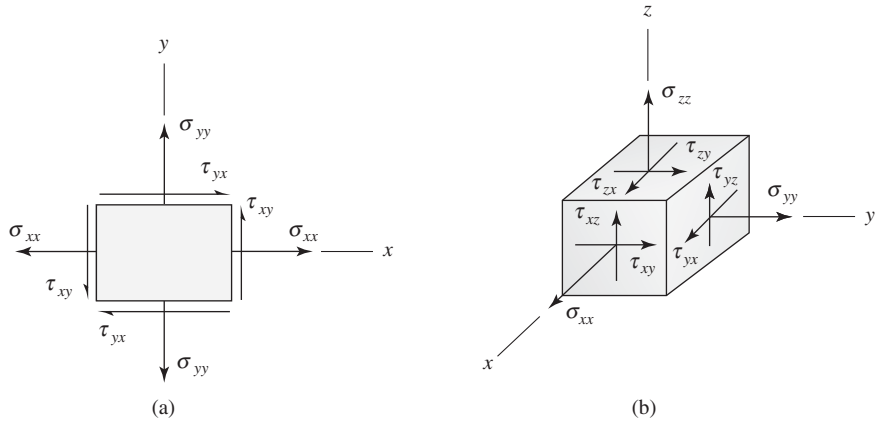


Fig. 5.2 Componentes de esfuerzo en coordenadas cartesianas: (a) componentes de esfuerzo bidimensionales; (b) componentes de esfuerzo tridimensionales.

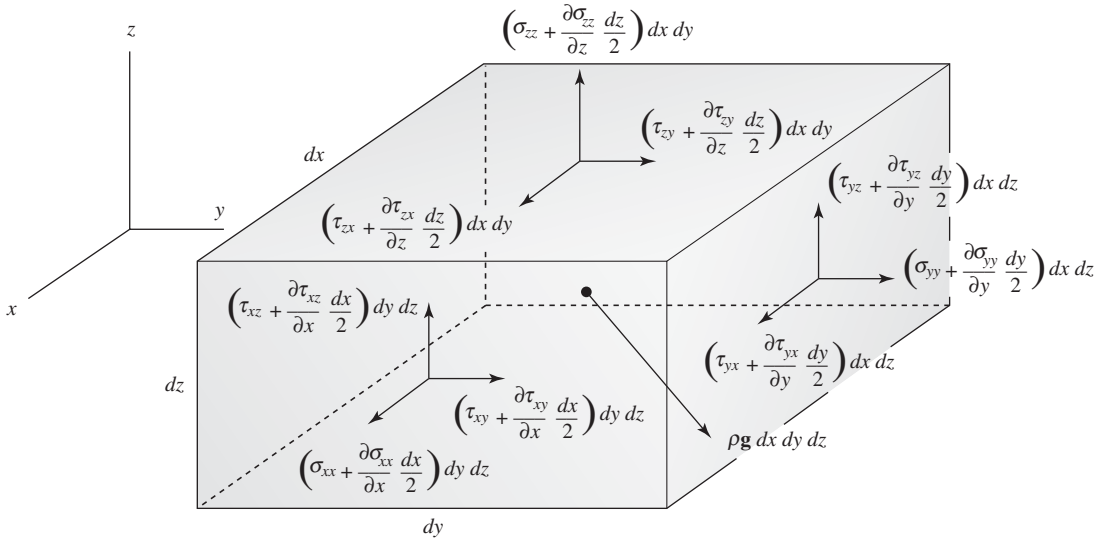


Fig. 5.3 Fuerzas que actúan sobre una partícula infinitesimal de fluido.

donde la componente del vector gravedad **g** que actúa en la dirección x es g_x, y Du/Dt es la aceleración de la componente x de la aceleración de la partícula de fluido (vea la ecuación 3.2.9). Después que dividamos entre el volumen $dx\,dy\,dz$, la ecuación anterior puede simplificarse en

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \tag{5.3.2}$$

Análogamente, para las direcciones y y z tendríamos

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \tag{5.3.3}$$

Podemos demostrar, al tomar momentos respecto a los ejes que pasan por el centro del elemento infinitesimal, que

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{5.3.4}$$

Esto es, el tensor de esfuerzo es simétrico; entonces hay en realidad seis componentes de esfuerzo independientes.

El tensor esfuerzo puede mostrarse en la forma usual como

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.3.5}$$

Los subíndices i y j toman valores numéricos 1, 2 o 3. Entonces τ_{12} representa el elemento τ_{xy}, en la primera fila, segunda columna.

5.3.2 Ecuación de Euler

Buenas aproximaciones de las componentes del tensor de esfuerzo para muchos flujos, en especial para flujos alejados de una frontera (flujo alrededor de una superficie aerodinámica) o en regiones de cambio repentino (flujo a través de una contracción) se muestran mediante la matriz

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{5.3.6}$$

Para estos flujos, hemos supuesto que las componentes del esfuerzo cortante que resultan de efectos viscosos son tan insignificantes y que las componentes del esfuerzo normal son iguales al negativo de la presión; esto es precisamente lo que hicimos en la figura 3.16 al deducir la ecuación de Bernoulli. Si estas componentes de esfuerzo se introducen de nuevo en las ecuaciones 5.3.2 y 5.3.3 se obtiene para este flujo sin fricción,

CONCEPTO CLAVE *Con frecuencia suponemos que las componentes del esfuerzo cortante son tan pequeñas que son insignificantes.*

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Las ecuaciones escalares anteriores pueden escribirse entonces como la ecuación vectorial

$$\rho \frac{D}{Dt}(u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) - \rho\mathbf{g} \tag{5.3.8}$$

En forma vectorial, tenemos la bien conocida **ecuación de Euler**

Ecuación de Euler: *Son las tres ecuaciones diferenciales que resultan al aplicar la segunda ley de Newton y despreciar los efectos viscosos.*

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho\mathbf{g} \tag{5.3.9}$$

Si suponemos un flujo permanente de densidad constante, la ecuación 5.3.9 puede integrarse a lo largo de una línea de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli, un resultado que no nos sorprende porque se impusieron las mismas suposiciones al deducir la ecuación de Bernoulli en el capítulo 3; esto se ilustra en el ejemplo 5.6.

Con las ecuaciones diferenciales de la cantidad de movimiento en la forma de las ecuaciones 5.3.7, hemos agregado tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para dar cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. Con las condiciones iniciales y frontera apropiadas, sería posible una solución que dé los campos de velocidad y presión para este flujo incompresible inviscido.

Ejemplo 5.5

Se propone que un campo de velocidad sea

$$u = \frac{10y}{x^2 + y^2} \qquad v = -\frac{10x}{x^2 + y^2} \qquad w = 0$$

(a) ¿Es éste un posible flujo incompresible? (b) Si es así, encuentre el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo de aire sin fricción con el eje z vertical . Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

Solución

(a) La ecuación de continuidad (5.2.9) se usa para determinar si es posible el campo de velocidad. Para este flujo incompresible tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

Sustituyendo en las componentes de velocidad, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10y}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{10x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-10y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-10x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}[-20xy + 20xy] = 0$$

La cantidad entre corchetes es cero obviamente; en consecuencia, el campo de velocidad dado es un posible flujo incompresible.

(b) El gradiente de presión se encuentra usando la ecuación de Euler. En forma de componentes tenemos lo siguiente:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancelto{0}{\rho g_x}$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial z}} + \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right]$$

$$= -1.23\left[\frac{10y}{x^2 + y^2}\frac{-20xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2 + y^2}\frac{(x^2 + y^2)10 - 10y(2y)}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{123x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \cancelto{0}{\rho g_y}$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial z}} + \cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right]$$

$$= -1.23\left[\frac{10y}{x^2 + y^2}\frac{(x^2 + y^2)(-10) + 10x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2 + y^2}\frac{20xy}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{123y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\rho \cancelto{0}{\frac{Dw}{Dt}} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = 1.23 \text{ kg/m}^3 \times (-9.81) \text{ m/s}^2 = -12.07 \text{ N/m}^3$$

Entonces, $$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \frac{123}{(x^2 + y^2)^2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) - 12.07\hat{\mathbf{k}} \text{ N/m}^3$$

Ejemplo 5.6

Suponga un flujo permanente de densidad constante e integre la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente en un flujo plano.

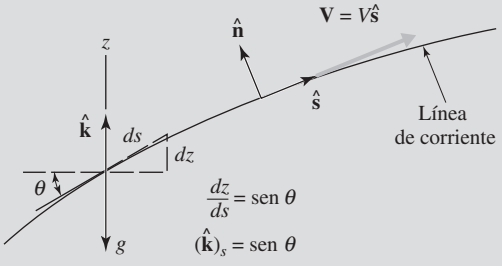


Fig. E5.6

Solución

Primero, expresemos la derivada sustancial en coordenadas de la línea de corriente. Como el vector velocidad es tangente a la línea de corriente, podemos escribir

$$\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{s}}$$

donde $\hat{\mathbf{s}}$ es el vector unitario tangente a la línea de corriente y V es la magnitud de la velocidad, como se muestra en la figura E5.6. La derivada sustancial es entonces, para este flujo plano,

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V\frac{\partial(V\hat{\mathbf{s}})}{\partial s} + \cancelto{0}{(V)_n}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + V^2\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s}$$

La cantidad $\partial\hat{\mathbf{s}}/\partial s$ resulta del cambio del vector unitario $\hat{\mathbf{s}}$; el vector unitario no puede cambiar de magnitud (siempre debe tener una magnitud de 1), sólo puede cambiar de dirección. Por tanto, la derivada $\partial\hat{\mathbf{s}}/\partial s$ es en una dirección normal a la línea de corriente y no entra en la ecuación de componentes de la corriente. Para un flujo permanente $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$. En consecuencia, en la dirección de la corriente, la ecuación de Euler (5.3.9) toma la forma

$$\rho V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial z}{\partial s}$$

reconociendo que la componente de $\hat{\mathbf{k}}$ a lo largo de la línea de corriente puede expresarse como $(\hat{\mathbf{k}})_s = \partial z/\partial s$ (vea el bosquejo anterior). Observe que usamos derivadas parciales en esta ecuación dado que la velocidad y la presión también varían con la coordenada normal.

La ecuación anterior puede escribirse, suponiendo densidad constante de modo que $\partial\rho/\partial s = 0$, como

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho g z\right) = 0$$

Integrar a lo largo de la línea de corriente resulta en

$$\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$$

o bien,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{const.}$$

Ésta es, por supuesto, la ecuación de Bernoulli. Hemos integrado a lo largo de una línea de corriente suponiendo densidad constante, flujo permanente, efectos viscosos insignificantes y un marco de referencia inercial, de modo que era de esperarse que surgiera la ecuación de Bernoulli.

5.3.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

Fluidos newtonianos: *Fluidos que poseen una relación lineal entre el esfuerzo y los gradientes de velocidad.*

Fluido isotrópico: *Fluido cuyas propiedades son independientes de la dirección en una posición determinada.*

Muchos fluidos presentan una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad. Estos fluidos se denominan **fluidos newtonianos** e incluyen fluidos comunes como agua, aceite y aire. Si, además de linealidad, requerimos que el fluido sea **isotrópico**,[4] es posible relacionar las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad usando sólo dos propiedades del fluido, la *viscosidad* μ y el *segundo coeficiente de la viscosidad* λ. Las relaciones entre el esfuerzo y el gradiente de velocidad, a menudo conocidas como *ecuaciones constitutivas,*[5] se formulan como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{V} & \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
\sigma_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{V} & \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{V} & \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Para la mayoría de los gases, y para gases monoatómicos exactamente, el segundo coeficiente de la viscosidad está relacionado con la viscosidad mediante

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{5.3.11}$$

una condición que se conoce como *hipótesis de Stokes*. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión; esto es,

$$-\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = p \tag{5.3.12}$$

Con las ecuaciones 5.3.10 puede demostrarse que esto siempre es verdadero para un líquido en el que $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$ y con la hipótesis de Stokes también es verdadero para un gas.

Si sustituimos las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de la cantidad de movimiento (5.3.2) y (5.3.3), resulta, aplicando la hipótesis de Stokes,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Fluido homogéneo *Fluido cuyas propiedades son independientes de la posición.*

donde hemos supuesto un **fluido homogéneo**, es decir, las propiedades del fluido (por ejemplo la viscosidad) son independientes de la posición.

Para un flujo incompresible, la ecuación de continuidad permite que las ecuaciones anteriores se reduzcan a

[4] La condición de isotropía existe si las propiedades del fluido son independientes de la dirección. Los polímeros son ejemplos de fluidos anisótropos.

[5] Los detalles del desarrollo de las ecuaciones constitutivas se pueden encontrar en cualquier libro de texto sobre el tema de mecánica del medio continuo.

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (5.3.14)$$
$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Ecuaciones de Navier-Stokes: *Las tres ecuaciones diferenciales que resultan de aplicar la segunda ley de Newton a un fluido incompresible, isotrópico y homogéneo.*

Éstas son las **ecuaciones de Navier-Stokes**, denominadas así en honor a Louis M. H. Navier (1785-1836) y George Stokes (1819-1903); con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. La viscosidad y la densidad son propiedades del fluido que se suponen conocidas. Con las condiciones frontera e iniciales apropiadas es posible resolver las ecuaciones. Varias geometrías relativamente sencillas permiten soluciones analíticas; algunas de las soluciones se presentan en el capítulo 7. También se han determinado soluciones numéricas para muchos flujos de interés; en el capítulo 14 se presentan métodos computacionales. Debido a que son ecuaciones diferenciales parciales no lineales (los términos de aceleración hacen que las ecuaciones sean no lineales como se observa en las ecuaciones 3.2.9), no podemos estar seguros de que la solución encontrada en realidad se demuestre en el laboratorio; esto es, las soluciones no son únicas. Por ejemplo, un flujo laminar y un flujo turbulento pueden tener condiciones iniciales y frontera idénticas, pero los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes no han sido resueltas para un flujo turbulento. Todos los flujos turbulentos son no permanentes y tridimensionales y, por tanto, deben retenerse los términos de la derivada respecto al tiempo. Esto requiere una condición inicial en todas las variables dependientes; es decir, u, v, w y p deben ser conocidas en todos los puntos en el campo de flujo en $t = 0$. Esta información sería extremadamente difícil, cuando no imposible, de obtener. Para evitar esta situación, para flujos turbulentos se introducen cantidades promediadas respecto al tiempo, lo cual se estudiará en un capítulo posterior.

Podemos expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en forma vectorial al multiplicar las ecuaciones 5.3.14 por $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente, y sumándolas. Reconocemos que

$$\frac{Du}{Dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{Dv}{Dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{Dw}{Dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\nabla} p \qquad (5.3.15)$$
$$\nabla^2 u\hat{\mathbf{i}} + \nabla^2 v\hat{\mathbf{j}} + \nabla^2 w\hat{\mathbf{k}} = \nabla^2\mathbf{V}$$

donde hemos introducido el laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (5.3.16)$$

Al combinar lo anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes (5.3.14) toman la forma vectorial

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (5.3.17)$$

Con esta forma vectorial podemos expresar las ecuaciones de Navier-Stokes usando otros sistemas coordenados. Las ecuaciones para coordenadas cilíndricas y esféricas se dan en la tabla 5.1.

Ejemplo 5.7

Simplifique la ecuación de Navier-Stokes de la componente x para un flujo permanente en un canal rectangular horizontal, suponiendo que todas las líneas de corriente son paralelas a las paredes. Sea la dirección x la dirección del flujo (figura E5.7).

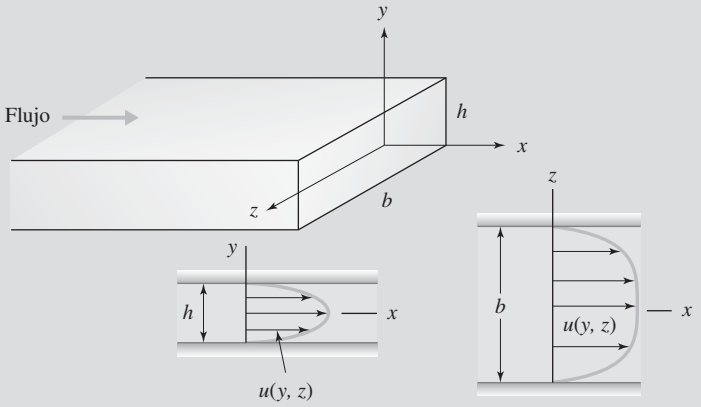


Fig. E5.7

Solución

Si las líneas de corriente son paralelas a las paredes, sólo la componente x de la velocidad será diferente de cero. Si hacemos $v = w = 0$ la ecuación de continuidad (5.2.9) para un flujo incompresible se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lo cual muestra que $u = u(y, z)$. La aceleración es entonces

$$\frac{Du}{Dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancelto{0}{v}\frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{w}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

La ecuación de la cantidad de movimiento de la componente x se simplifica entonces en

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancelto{0}{\rho g_x} + \mu\left(\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

o bien,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Con las condiciones frontera apropiadas (condiciones sin deslizamiento), podría buscarse una solución para la ecuación anterior. Daría los perfiles de velocidad trazados en la figura E5.7.

5.3.4 Ecuaciones de vorticidad

Existen ciertos fenómenos de flujo de fluidos que no se pueden explicar o entender sin hacer referencia a las ecuaciones de vorticidad, ecuaciones que se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes (en el ejemplo 5.8 se aborda ese fenómeno). Además de proporcionar una visión de esos fenómenos, las ecuaciones de vorticidad no contienen los términos de presión o gravedad que se encuentran en las ecuaciones de Navier-Stokes pero sí los que involucran sólo velocidad. Como las condiciones frontera con mucha frecuencia comprenden sólo la velocidad, las ecuaciones de vorticidad son a veces las ecuaciones preferidas para obtener soluciones numéricas.

Para deducir las ecuaciones de vorticidad, tomamos el rotacional de la ecuación 5.3.17, la forma vectorial de las ecuaciones de Navier-Stokes. Éste es un trabajo difícil, de modo que no presentaremos aquí todos los pasos sino que simplemente resumiremos el proceso. Primero, definamos la vorticidad de la ecuación 3.2.18 en forma vectorial usando el operador del; con la ecuación 5.2.6, vemos que las tres ecuaciones escalares 3.2.18 pueden escribirse como una sola ecuación vectorial

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} \tag{5.3.18}$$

donde $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}$ es el rotacional de la velocidad. El *rotacional* es el producto cruz del operador del y una función vectorial. Segundo, escribamos la aceleración en forma vectorial como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{V} \tag{5.3.19}$$

donde hemos usado las ecuaciones 3.2.8, 3.2.10 y 5.2.6. Por último, tomemos el rotacional de la ecuación vectorial de Navier-Stokes (5.3.17):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left[\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} \right] = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\nabla} \times \nabla^2 \mathbf{V} \tag{5.3.20}$$

El rotacional del gradiente de una función escalar y el rotacional de una constante son cero. Además, como podemos intercambiar la diferenciación, podemos escribir

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \nabla^2 \mathbf{V} = \nabla^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \end{gathered} \tag{5.3.21}$$

El paso difícil, que dejaremos como problema de tarea, se presenta al tener que demostrar que

$$\boldsymbol{\nabla} \times [(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}] = (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} \tag{5.3.22}$$

Ecuación de vorticidad: *Ecuación derivada al tomar el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes. La ecuación de vorticidad no contiene términos que impliquen presión o gravedad.*

La ecuación 5.3.20 se convierte entonces, suponiendo que ρ y μ sean constantes, en la **ecuación de vorticidad**,

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V} + \nu\,\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{5.3.23}$$

La ecuación de vorticidad se puede escribir como tres ecuaciones escalares. Usando coordenadas cartesianas, las tres ecuaciones de vorticidad son

$$\begin{aligned}
\frac{D\omega_x}{Dt} &= \omega_x\frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\nabla^2\omega_x \\
\frac{D\omega_y}{Dt} &= \omega_x\frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial v}{\partial z} + \nu\nabla^2\omega_y \\
\frac{D\omega_z}{Dt} &= \omega_x\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial w}{\partial z} + \nu\nabla^2\omega_z
\end{aligned} \tag{5.3.24}$$

CONCEPTO CLAVE *Las ecuaciones de vorticidad comprenden sólo la velocidad y sus derivadas.*

Como la vorticidad es el rotacional de la velocidad, observe que todos los términos en las ecuaciones de vorticidad comprenden sólo la velocidad y sus derivadas. En consecuencia, las ecuaciones de vorticidad con frecuencia se convierten en las preferidas cuando se resuelven problemas que requieran las ecuaciones diferenciales de movimiento. De hecho, nos referimos a líneas de vórtice y a los tubos de vórtice como similares a líneas de corriente y a tubos de corriente. Una **línea de vórtice** es una línea a la que es tangente el vector vorticidad. Un **tubo de vórtice**, o simplemente un *vórtice*, es un tubo cuyas paredes contienen líneas de vórtice. Un vórtice se muestra en la figura 5.4.

Línea de vórtice: *Línea a la que es tangente el vector vorticidad.*

Tubo de vórtice: *Haz de líneas de vórtice.*

Puede llegarse a una conclusión interesante si se considera la ecuación de vorticidad 5.3.23. Si un flujo inviscido es irrotacional en todas partes (es decir, $\boldsymbol{\omega} = 0$ en todos los puntos en el flujo), debe permanecer irrotacional porque $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$. Esto se conoce como la *persistencia de irrotacionalidad.* Además, si un flujo uniforme se aproxima a un objeto, se introduce vorticidad (rotación de partículas de fluido) al flujo sólo por la acción de la viscosidad. Sin efectos viscosos, no puede crearse vorticidad en un flujo irrotacional de entrada.

CONCEPTO CLAVE *No puede crearse vorticidad en un flujo irrotacional sin efectos viscosos.*

Es frecuente que los flujos planos sean de interés particular. Si $w = 0$, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ la única componente de vorticidad diferente de cero es ω_z. Para tal flujo, la ecuación de vorticidad toma la forma simplificada

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \nu\nabla^2\omega_z \tag{5.3.25}$$

Observamos que son necesarios los efectos viscosos para causar cambios de vorticidad en un flujo plano.

CONCEPTO CLAVE *Son necesarios los efectos viscosos para causar cambios de vorticidad en un flujo plano.*

El siguiente ejemplo ilustra un fenómeno de flujo que puede ser explicado fácilmente con el uso de la ecuación de vorticidad.

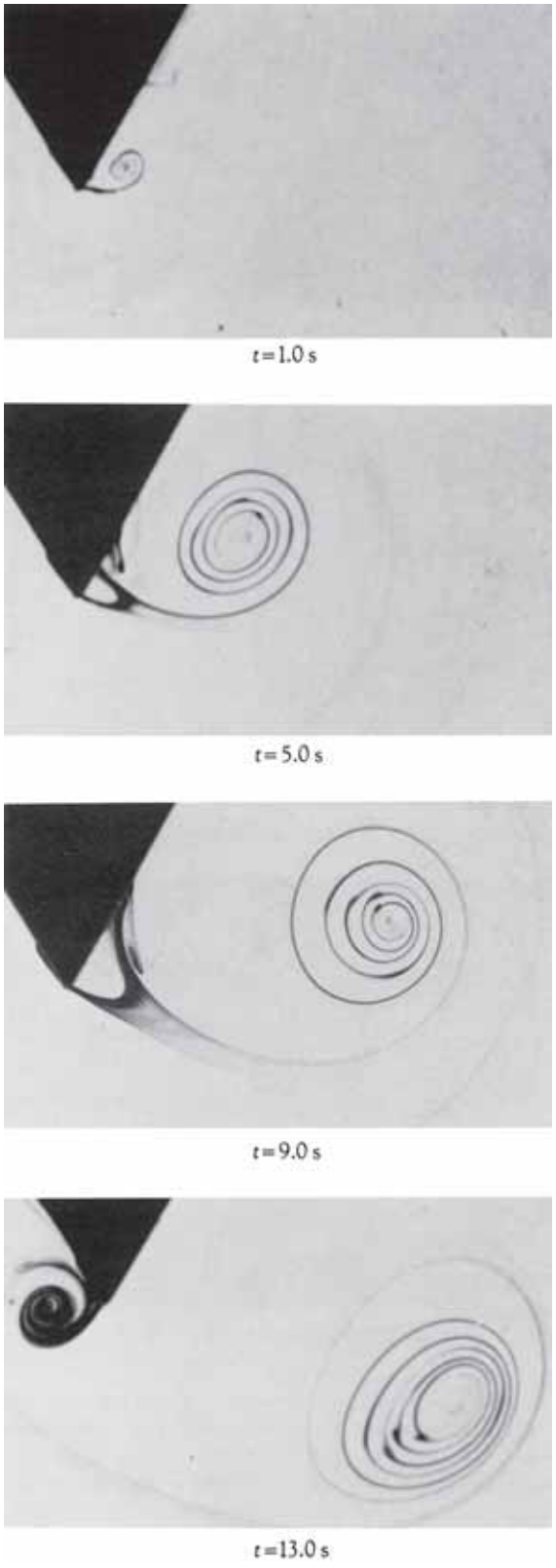
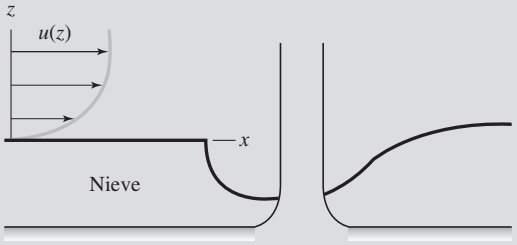


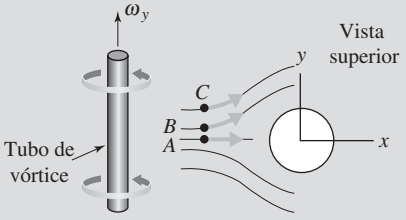
Fig. 5.4 Inicio de un vórtice en una cuña. Un pistón impulsa agua normal al eje de una cuña. Se inyecta un tinte en el agua a través de pequeños agujeros en la superficie de la cuña. El número de Reynolds característico es del orden de 1000. El pistón se detiene en 12.5 s, produciendo un vórtice de parada en la última fotografía. (Fotografía de D.I. Pullin y A.E. Perry.)

Ejemplo 5.8

En una tormenta de nieve, la nieve en realidad se ahueca enfrente de un árbol, o poste, como se indica en la figura E5.8a. Explique este fenómeno de acuerdo con las ecuaciones de vorticidad.



(a)



(b)

Fig. E5.8

Solución

Sea la velocidad próxima al árbol en la dirección x con un gradiente de velocidad $\partial u/\partial z$ cerca del suelo. Las componentes de la vorticidad son entonces (vea las ecuaciones 3.2.21)

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \omega_z = 0$$

La ecuación de vorticidad (5.3.24) para ω_y, ignorando los efectos viscosos sobre la corta longitud de flujo, se reduce a

$$\frac{D\omega_y}{Dt} = \omega_y \frac{\partial v}{\partial y}$$

Observe de la figura E5.8b que en la vecindad del árbol $\partial v/\partial y$ es positiva puesto que $v_C > v_B > v_A$. (Puede demostrarse que $\partial v/\partial y$ también es positiva para y negativa.) Como ω_y y $\partial v/\partial y$ son positivas, $D\omega_y/Dt$ es positiva y ω_y aumenta conforme los tubos de vórtice se aproximan al árbol. Esta vorticidad incrementada crea un fuerte vórtice frente al árbol, resultando en que la nieve se ahueque como se muestra. Este mismo fenómeno ocurre en una tormenta de arena o en un flujo de agua alrededor de un poste en el lecho de un río.

5.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ENERGÍA

La mayoría de los problemas de interés en mecánica de fluidos no involucra gradientes de temperatura, sino flujos en los que la temperatura es constante en todas partes. Para estos flujos no es necesario introducir la ecuación diferencial de la energía. Existen situaciones, sin embargo, para flujos compresibles e incompresibles, en los que son importantes los gradientes de temperatura y para tales flujos puede ser necesaria la ecuación diferencial de la energía. Deduciremos la ecuación diferencial de la energía suponiendo efectos viscosos insignificantes, lo que de manera significativa simplifica la deducción. Como los esfuerzos cortantes que resultan de la viscosidad son muy pequeños para muchas aplicaciones, esta suposición puede ser aceptable. Estos esfuerzos cortantes, sin embargo, son responsables de las altas temperaturas que provocan que los satélites se incendien en su reingreso a la atmósfera; si son considerables, deben incluirse en cualquier análisis.

CONCEPTO CLAVE *Los esfuerzos cortantes son responsables de las altas temperaturas que incendian satélites.*

Considere el elemento infinitesimal de fluido mostrado en la figura 5.5. La tasa de transferencia de calor $\dot{Q}$ a través de un área A está dada por la *ley de Fourier de la transferencia de calor,* denominada así en honor a Jean B. J. Fourier (1768-1830):

$$\dot{Q} = -KA\,\frac{\partial T}{\partial n} \tag{5.4.1}$$

donde n es la dirección normal al área, T es la temperatura y K es la *conductividad térmica*, supuesta constante. La rapidez de trabajo realizado por una fuerza es la magnitud de la fuerza multiplicada por la velocidad en la dirección de la fuerza; para una fuerza de presión pA, es

$$\dot{W} = pAV \tag{5.4.2}$$

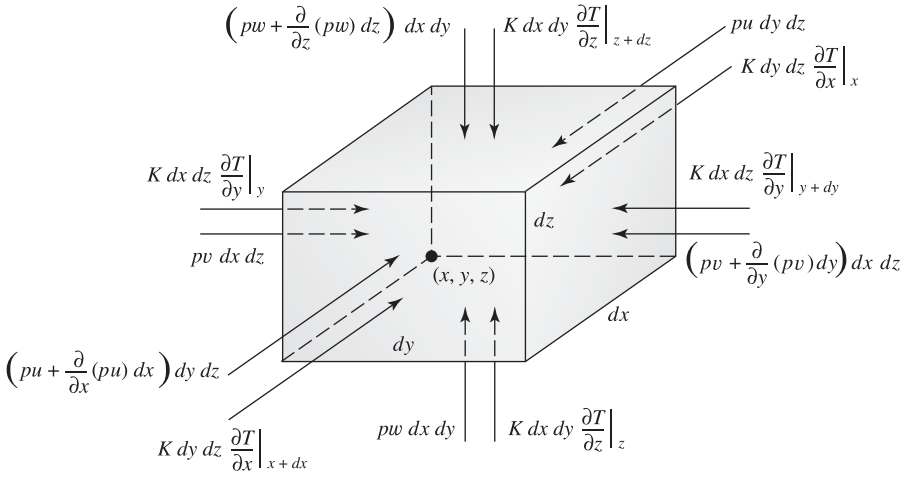


Fig. 5.5 Tasa de transferencia de calor y rapidez de trabajo sobre un elemento infinitesimal de fluido.

donde V es la velocidad en la dirección de la fuerza de presión. La primera ley de la termodinámica (consulte la ecuación 1.7.6) aplicada a la partícula de fluido es

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{DE}{Dt} \tag{5.4.3}$$

donde D/Dt se usa porque estamos siguiendo una partícula de fluido en el instante mostrado. Para la partícula que ocupa el elemento infinitesimal de la figura 5.5, las relaciones anteriores nos permiten escribir[6]

$$\begin{aligned} &K\,dy\,dz\left(\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(pu)\,dx\,dy\,dz \\ &+ K\,dx\,dz\left(\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y+dy} - \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(pv)\,dx\,dy\,dz \\ &+ K\,dx\,dy\left(\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z+dz} - \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(pw)\,dx\,dy\,dz \\ &= \rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + gz + \tilde{u}\right) \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

donde E incluye la energía cinética, potencial e interna, y el eje z se supone vertical. Además, como la masa de una partícula de fluido es constante, $\rho\,dx\,dy\,dz$ está fuera del operador D/Dt. Dividimos ambos lados entre $dx\,dy\,dz$. El resultado es

$$\begin{aligned} &K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(pu) - \frac{\partial}{\partial y}(pv) - \frac{\partial}{\partial z}(pw) \\ &\qquad = \rho\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + gz + \tilde{u}\right) \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Esto puede reacomodarse como sigue:

$$\begin{aligned} &K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - u\,\frac{\partial p}{\partial x} - v\,\frac{\partial p}{\partial y} - w\,\frac{\partial p}{\partial z} \\ &= \rho u\,\frac{Du}{Dt} + \rho v\,\frac{Dv}{Dt} + \rho w\,\frac{Dw}{Dt} + \rho g\,\frac{Dz}{Dt} + \rho\,\frac{D\tilde{u}}{Dt} \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Las ecuaciones escalares de Euler (5.3.7) son aplicables para este flujo inviscido; por tanto, los últimos tres términos a la izquierda son iguales a los primeros cuatro términos a la derecha si reconocemos que

$$\frac{Dz}{Dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial t}} + u\,\cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial x}} + v\,\cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial y}} + w\,\frac{\partial z}{\partial z} = w \tag{5.4.7}$$

[6]Hemos utilizado la esquina inferior en (x, y, z) a partir de la cual se han medido las diversas cantidades. Matemáticamente, hacemos que Δx, Δy y Δz tiendan a cero por lo que no importa si se mide desde una esquina o desde el centro del elemento.

ya que x, y, z y t son variables independientes. La ecuación de la energía simplificada entonces toma la forma

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} = K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{5.4.8}$$

En forma vectorial esto se expresa como

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} = K\nabla^2 T - p\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} \tag{5.4.9}$$

Antes de simplificar esta ecuación para un flujo de gas incompresible, escribámosla en términos de entalpía en lugar de energía interna. Usando

$$\tilde{u} = h - \frac{p}{\rho} \tag{5.4.10}$$

la ecuación de la energía se convierte, usando la ecuación 5.2.7, en

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = K\nabla^2 T + \frac{Dp}{Dt} \tag{5.4.11}$$

Vea en el ejemplo 5.4 los detalles de esta conversión.

Tenemos dos casos especiales a considerar. Primero, para un flujo de líquido podemos usar $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = 0$ y con $\tilde{u} = c_p T$, donde c_p es el calor específico,[7] la ecuación 5.4.9 se simplifica a

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha\nabla^2 T \tag{5.4.12}$$

donde hemos introducido la *difusividad térmica* α definida por

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} \tag{5.4.13}$$

[7]El calor específico de un líquido a menudo aparece en las tablas como c_p. El calor específico a volumen constante para un líquido es aproximadamente igual a c_p. Por tanto a menudo simplemente eliminamos el subíndice y hacemos $c_p = c$ para un líquido. Se supone que es una constante, pero depende de la temperatura. Aquí utilizaremos c_p.

En un flujo de gas incompresible, se presenta un resultado interesante. En el ejemplo 5.10 demostraremos que

$$\left|\frac{Dp}{Dt}\right| \ll |p\ \nabla\cdot\mathbf{V}| \tag{5.4.14}$$

Entonces, al comparar las ecuaciones 5.4.9 y 5.4.11, es la ecuación 5.4.11 la que se simplifica a

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T \tag{5.4.15}$$

para un flujo de gas incompresible si hacemos la suposición de un gas ideal de que

$$dh = c_p\, dT \tag{5.4.16}$$

Si los efectos viscosos no son insignificantes, la deducción incluiría la entrada de trabajo debido a las componentes del esfuerzo cortante. Esto sumaría un término en el lado derecho de todas las ecuaciones diferenciales de la energía anteriores; este término se denomina *función de disipación* Φ, que, en coordenadas cartesianas, es

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{5.4.17}$$

Con la adición de la ecuación de la energía, ahora podemos considerar problemas que comprendan las variaciones de temperatura en un flujo. Estos problemas están presentes en flujos compresibles en los que la presión y la densidad están relacionadas con la temperatura mediante una ecuación de estado. En flujos de gas incompresible (número de Mach < 0.3) y flujos de líquidos, es frecuente que las variaciones de temperatura sean insignificantes al punto que la ecuación diferencial de la energía no sea de interés. No obstante, si existe un campo de temperatura en un flujo líquido o en un flujo de gas incompresible (intercambiadores de calor, flujos atmosféricos, inversiones en lagos, flujos de lubricación, flujos de convección libre), la ecuación de la energía proporciona una ecuación adicional que relaciona las cantidades de interés. Para flujos de líquidos que comprendan gradientes de temperatura es con frecuencia necesario suponer que $\mu = \mu(T)$; en flujos de convección libre debemos suponer que $\rho = \rho(T)$. En flujos de gas incompresible por lo general podemos suponer que la viscosidad es constante dado que la variación de la temperatura es muy pequeña.

Ejemplo 5.9

Un líquido de densidad constante fluye por un canal ancho horizontal y rectangular, cuyas paredes se mantienen a una temperatura más alta que la del líquido, como se muestra en la figura E5.9. Suponga una variable μ, incluya la disipación viscosa y escriba las ecuaciones diferenciales descriptivas para un flujo permanente.

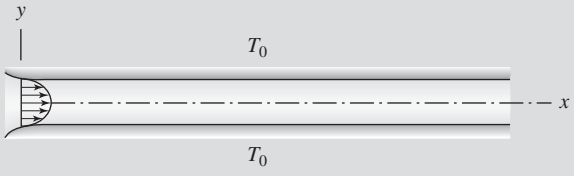


Fig. E5.9

Solución

Hagamos coincidir el eje x con la línea centro del canal y sea vertical el eje y. La ecuación de continuidad tomaría la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ya que $w = 0$ para el canal ancho.

El flujo será principalmente en la dirección x, pero debemos tomar en cuenta la variación de la componente y de v. No habrá variación en la dirección z. Las aceleraciones para este flujo permanente serán

$$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

Los términos de esfuerzo de las ecuaciones 5.3.2 y 5.3.3 usando las ecuaciones 5.3.10 con $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, suponiendo una variable μ, se convierten en

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Las ecuaciones de la cantidad de movimiento son entonces

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

La ecuación de la energía se simplifica a

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{2\mu}{c_p}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

donde hemos supuesto que K es constante. Las ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, anteriores, aunque se ven formidables cuando se trata de obtener una solución analítica, podrían resolverse numéricamente con las condiciones frontera apropiadas, y para un gasto lo suficientemente bajo de modo que exista un flujo laminar (un flujo turbulento siempre es no permanente y en tres dimensiones).

Ejemplo 5.10

Demuestre que para un gas ideal $|Dp/Dt| \ll |p\,\nabla \cdot \mathbf{V}|$ en un flujo a baja velocidad, concluyendo por tanto que la ecuación 5.4.15 es la ecuación apropiada.

Solución

Consideremos un flujo permanente uniforme en un tubo de modo que $|\mathbf{V}| = u$ y $Dp/Dt = u\,\partial p/\partial x$. Entonces el problema se puede enunciar como sigue: Demuestre que

$$\left|u\frac{\partial p}{\partial x}\right| \ll \left|p\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

Los efectos viscosos son pequeños y no cambiarían la conclusión, de modo que podemos ignorar cualesquiera efectos viscosos posibles. Entonces la ecuación de Euler (5.3.7) nos permite usar

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Usando la definición de la velocidad del sonido (ecuación 1.7.17) y la ecuación de estado, vemos que

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \quad \text{o} \quad p = c^2\frac{\rho}{k}$$

Entonces

$$p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^2}{k}\rho\frac{\partial u}{\partial x}$$

Nuestro problema se puede expresar ahora como: Demuestre que

$$\left|\rho u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{c^2}{k}\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

O bien, simplemente, ¿es verdad que

$$u^2 \ll \frac{c^2}{k}?$$

Se puede observar que esto es verdadero porque hemos supuesto, para un flujo de gas a baja velocidad, que la velocidad del gas es mucho menor que la velocidad del sonido (por ejemplo, $u < 0.3c$ o $\mathrm{M} < 0.3$). Sabemos que k es de orden unitario ($k = 1.4$ para el aire), de modo que no afectará nuestra conclusión de que

$$\left|\frac{Dp}{Dt}\right| \ll |p\,\nabla \cdot \mathbf{V}|$$

5.5 RESUMEN

Ahora hemos completado nuestra deducción de las ecuaciones diferenciales parciales que se usan para describir flujos de interés. Resumamos las ecuaciones en forma vectorial para un flujo incompresible:

Continuidad: $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{5.5.1}$$

Cantidad de movimiento: $$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}p + \rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{5.5.2}$$

Energía: $$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T + \Phi \quad \text{Líquidos} \tag{5.5.3}$$

Energía: $$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T + \Phi \qquad \text{Gases incompresibles} \tag{5.5.4}$$

Para expresar estas ecuaciones en las formas anteriores, hemos supuesto:

- Un fluido newtoniano (una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad).
- Un fluido isotrópico (las propiedades del fluido son independientes de la dirección).
- Un fluido homogéneo (las propiedades del fluido, μ, c_p y K no dependen de la posición).
- Un flujo incompresible (la densidad de una partícula es constante, es decir, $D\rho/Dt = 0$; no pedimos que ρ = constante. Para un flujo de gas requerimos que M < 0.3).
- Un marco de referencia inercial.

La ecuación de vorticidad también es de interés. Es

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{5.5.5}$$

En los métodos numéricos a veces se utiliza esta ecuación de vorticidad.

En las deducciones de las ecuaciones diferenciales en este capítulo no hemos hecho mención del flujo laminar o turbulento. Las ecuaciones son aplicables a una u otra clase de flujo. Algunos flujos laminares en geometrías relativamente sencillas se han resuelto analíticamente, y muchos otros se han resuelto numéricamente. No obstante, los flujos turbulentos no han sido resueltos incluso para la geometría más sencilla. Un flujo turbulento es siempre un flujo no permanente, y la presencia de los términos de derivadas respecto al tiempo demandan condiciones iniciales; esto es, en el instante $t = 0$ debemos especificar u, v, w y p en todos los puntos en la región de interés, información que es difícil, si no imposible, de obtener hasta en un flujo simple por una tubería.

CONCEPTO CLAVE *Las ecuaciones diferenciales son aplicables tanto para flujos laminares como turbulentos.*

Tabla 5.1 Leyes fundamentales para flujos incompresibles.

Continuidad

Cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \,\mathrm{sen}\,\theta)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}=0$$

Cantidad de movimiento

Cartesianas

$$\frac{Du}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g_x+\nu\nabla^2 u$$

$$\frac{Dv}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+g_y+\nu\nabla^2 v$$

$$\frac{Dw}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\nabla^2 w$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Cilíndricas

$$\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+g_r+\nu\left(\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+g_\theta+\nu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\nabla^2 v_z$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Esféricas

$$\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+g_r+\nu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta-v_\phi^2\cot\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+g_\theta+\nu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{Dv_\phi}{Dt}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+g_\phi+\nu\left(\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}+\frac{2}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Energía

Cartesianas

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=K\nabla^2 T+2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

Cilíndricas

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=K\nabla^2 T+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)^2\right]$$

Esféricas

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=K\nabla^2 T+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)^2\right]+\mu\left[\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right)^2+\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

Esfuerzos

Cartesianas

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\qquad \tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\qquad \tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Cilíndricas

$$\sigma_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\qquad \tau_{r\theta}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)\qquad \tau_{\theta z}=\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\qquad \tau_{rz}=\mu\left[\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]$$

Esféricas

$$\sigma_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{\phi\phi}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)$$

$$\tau_{r\theta}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\theta\phi}=\mu\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]$$

$$\tau_{r\phi}=\mu\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]$$

PROBLEMAS

Ecuación diferencial de continuidad

5.1 El teorema de divergencia (también conocido como teorema de Gauss) establece que

$$\int_A \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{\forall} \nabla\cdot\mathbf{V}\, d\forall$$

donde $\mathbf{V}$ representa cualquier vector y A rodea por completo al volumen $\forall$. Aplique este teorema a la ecuación integral de continuidad 4.3.3 y deduzca la ecuación diferencial de continuidad 5.2.5.

5.2 Use el elemento infinitesimal que se muestra en la figura P5.2 y deduzca la ecuación diferencial de continuidad en coordenadas cilíndricas. El vector velocidad es $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$.

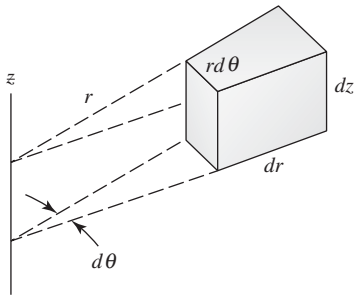


Fig. P5.2

5.3 Use los elementos infinitesimales que se muestran en la figura P5.3 y deduzca la ecuación diferencial de continuidad en coordenadas esféricas. El vector velocidad es $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$.

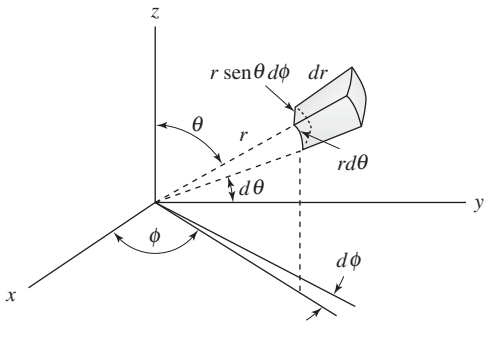


Fig. P5.3

5.4 Por un tubo de diámetro constante fluye un flujo compresible uniforme. Escriba la ecuación diferencial simplificada de continuidad para el flujo permanente.

5.5 El flujo incompresible de aire sobre la cadena montañosa que se muestra en la figura P5.5 puede ser aproximado por un flujo permanente plano. Si el eje z es vertical y se permite que varíe la densidad, escriba las ecuaciones diferenciales que resulten de consideraciones de conservación de la masa.

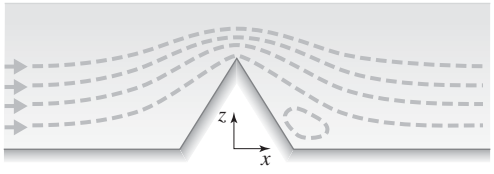


Fig. P5.5

5.6 Un flujo estratificado de agua salada, en la que con la profundidad aumenta la densidad, fluye por una obstrucción en el fondo del canal de la figura P5.6. Suponiendo un flujo permanente plano con el eje z vertical, escriba las ecuaciones que resulten de la ecuación diferencial de continuidad.

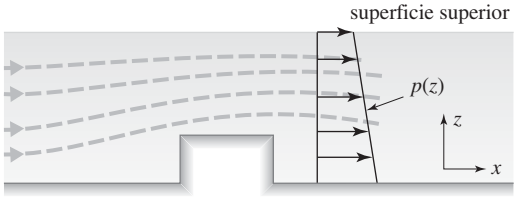


Fig. P5.6

5.7 Demuestre que para un flujo compresible isotérmico,

$$\frac{1}{p}\frac{Dp}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{V}$$

5.8 Un fluido incompresible fluye radialmente hacia un lavabo (tratado como una línea o un punto en el origen). Determine una expresión para la componente radial de la velocidad si es:

(a) Un lavabo línea **(b)** Un lavabo punto

5.9 Considere el flujo de un fluido permanente, laminar e incompresible en un canal divergente bidimensional como se muestra en la figura P5.9. Las paredes inclinadas del canal son rectas, y el fluido entra a la sección divergente con velocidad $V_1 = 40$ m/s. Dada $H = 1$ m y suponiendo un ancho unitario,

(a) Determine una expresión para la componente u de la velocidad como una función de la posición x a lo largo del canal. (u no depende de y.)

(b) Determine una expresión para la aceleración del fluido en la dirección x.

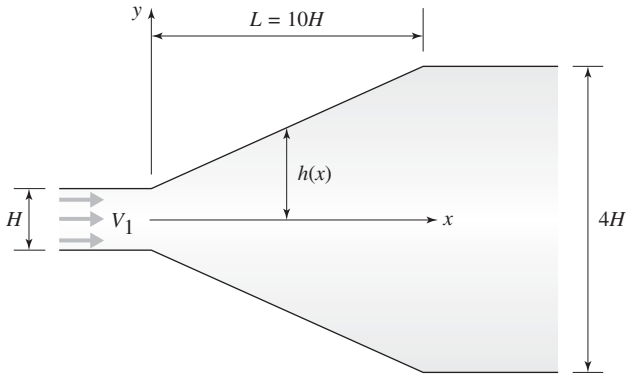


Fig. P5.9

5.10 Para las mismas condiciones dadas en el problema 5.9, determine:

(a) Una expresión para la componente v de la velocidad

(b) Una expresión para la aceleración en la dirección y

5.11 Un flujo compresible ocurre tal que

$$u = 200xy \qquad v = 200(x^2 + y^2) \qquad w = 0 \text{ m/s}$$

Encuentre la rapidez con la que está cambiando la densidad en el punto (2 m, 1 m) donde $\rho = 2.3$ kg/m^3.

5.12 Si en un flujo plano incompresible, la componente de la velocidad u = constante, ¿qué podemos decir acerca de la componente y de la velocidad? ¿Acerca de la densidad?

5.13 En un flujo incompresible sabemos que u y v son diferentes de cero pero constantes en magnitud. ¿Qué podemos inferir acerca de w a partir de la ecuación diferencial de continuidad? ¿Acerca de la densidad?

5.14 En un flujo plano incompresible, $u = Ax$. Encuentre $v(x, y)$ si $v(x, 0) = 0$.

5.15 Si la componente u de la velocidad está dada por

$$u(x, y) = 10 + \frac{5x}{x^2 + y^2}$$

en un flujo plano incompresible, determine $v(x, y)$. Sea $v(x, 0) = 0$.

5.16 La componente θ de la velocidad está dada por

$$v_\theta = -\left(10 + \frac{0.4}{r^2}\right)\cos\theta$$

Encuentre la componente r de la velocidad para el flujo plano incompresible si $v_r(0.2, \theta) = 0$.

5.17 En un flujo plano incompresible

$$v_\theta = 20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{40}{r}$$

Encuentre $v_r(r, \theta)$ si $v_r(1, \theta) = 0$.

5.18 En un flujo axisimétrico incompresible ($v_\phi = 0$), la componente de la velocidad v_θ está dada por

$$v_\theta = -\left(10 + \frac{40}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta$$

Encuentre $v_r(r, \theta)$ si $v_r(2, \theta) = 0$.

5.19 La velocidad del aire en un tubo se mide en puntos con separación de 2 in entre ellos y resulta ser 453, 486 y 526 ft/s, respectivamente. En el punto medio la temperatura es 40 ºF y la presión es 18 psia. Encuentre $d\rho/dx$ en el punto medio de este flujo permanente uniforme.

5.20 Se propone que la velocidad de la componente x en el eje x (figura P5.20) sea $u(x) = -20\,(1 - e^{-x})$ m/s. Aproxime la velocidad de la componente y en el punto (2, 0.2) en este flujo incompresible plano. Las coordenadas están en metros.

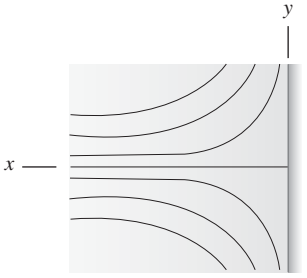


Fig. P5.20

5.21 Suponga que el flujo del problema 5.20 es axisimétrico y sustituya y con r y x con z. Aproxime la velocidad de la componente r en (2, 0.2). Las coordenadas están en metros.

5.22 La componente de la velocidad a lo largo del eje x (figura P5.22) es $u(x) = 10 - 40/x^2$ m/s. ¿Cuál es el radio del cilindro? Aproxime la velocidad de la componente y en (–3, 0.1) suponiendo un flujo incompresible. Las coordenadas están en metros.

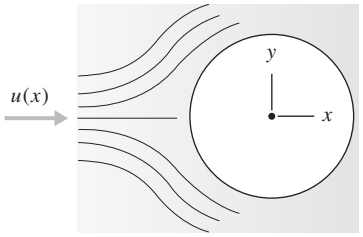


Fig. P5.22

5.23 Suponga que el flujo del problema 5.22 representa el flujo alrededor de una esfera y sea $v_r(r) = (40/r^2) - 10$ m/s a lo largo del eje x negativo. ¿Cuál es el radio de la esfera? Aproxime la componente θ de la velocidad en (–3, 0.1) suponiendo un flujo incompresible. Las coordenadas están en metros.

5.24 La componente x del vector velocidad se mide en los puntos A, B y C a 5 mm entre ellos, como 11.3, 12.6 y 13.5 m/s, respectivamente, en el flujo plano permanente, incompresible, que se muestra en la figura P5.24. Estime:

(a) La componente y de la velocidad 4 mm arriba del punto B.

(b) La aceleración en el punto B.

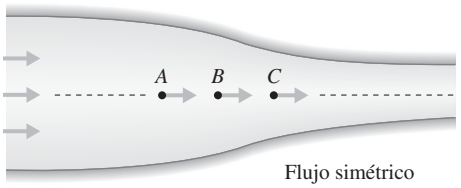


Fig. P5.24

Ecuación diferencial de la cantidad de movimiento

5.25 Sume las fuerzas que actúan sobre el elemento de la figura 5.3 en la dirección y y demuestre que resulta la ecuación 5.3.3a.

5.26 ¿El campo de velocidad

$$u = \frac{10x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{10y}{x^2 + y^2} \qquad w = 0$$

representa un posible flujo incompresible? Si es así, encuentre el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo sin fricción con fuerzas de cuerpo insignificantes.

5.27 ¿El campo de velocidad

$$v_r = 10\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -10\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$v_z = 0$$

representa un posible flujo incompresible? Si es así, encuentre el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo sin fricción con fuerzas de cuerpo insignificantes.

5.28 Considere el campo de velocidad

$$v_r = 10\left(1 - \frac{8}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -10\left(1 + \frac{4}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$v_\phi = 0$$

¿Representa un flujo incompresible? Si es así, encuentre el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo sin fricción con fuerzas de cuerpo insignificantes.

5.29 Para el flujo plano permanente mostrado en la figura P5.29, encuentre una expresión para $D\mathbf{V}/Dt$ en términos de las coordenadas (s, n) tangencial y normal a una línea de corriente. Sea R el radio de curvatura.

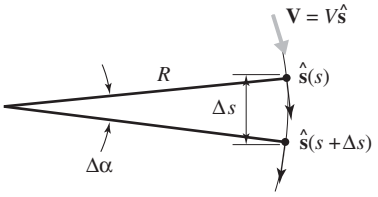


Fig. P5.29

5.30 Escriba la ecuación de Euler si la velocidad hace referencia a un marco de referencia que gira con una velocidad angular constante.

5.31 Un campo de velocidad está dado por $u = 30(y - 24y^2)$ ft/s, $v = 0$ y $w = 0$. Presente las componentes del esfuerzo en $y = 0.1$ in usando $\mu = 10^{-5}$ lb-s/ft^2 y $p = 30$ psi. Encuentre la relación τ_{xy}/σ_{xx}.

5.32 El campo de velocidad cercano a una superficie es aproximado por $u = 10(2y/\delta - y^2/\delta^2)$, donde $\delta = Cx^{4/5}$. Si $\delta = 8$ m en $x = 1000$ m, encuentre $v(x,y)$ suponiendo que $w = 0$ y $v(x,0) = 0$. Además, presente las tres componentes del esfuerzo en (1000, 0) usando $\mu = 2 \times 10^{-5}$ N·s/m^2 y $p = 100$ kPa. Suponga un flujo incompresible.

5.33 Demuestre que para un flujo permanente Du/Dt puede escribirse como $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,u$ y que $D\mathbf{V}/Dt = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}$. Verifique usando coordenadas rectangulares.

5.34 Escriba las ecuaciones diferenciales de la cantidad de movimiento de flujo compresible (5.3.13) como una ecuación en forma vectorial.

5.35 Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo permanente incompresible entre placas paralelas suponiendo que $u = u(y)$; $w = 0$. Escriba las tres ecuaciones.

5.36 Considere dos placas largas paralelas, horizontales, con un fluido incompresible y viscoso colocado entre ellas. Las dos placas se mueven en direcciones opuestas con dos velocidades constantes diferentes, como se muestra en la figura P5.36. No hay gradiente de presión y la única fuerza de cuerpo se debe al peso. Comenzando con las ecuaciones de Navier-Stokes, determine una expresión para el perfil de velocidad para el flujo laminar entre las dos placas.

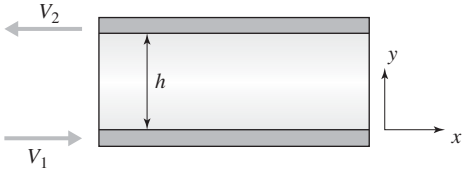


Fig. P5.36

5.37 Considere el flujo de fluido permanente, laminar e incompresible entre dos placas paralelas verticales fijas. Si el fluido se mueve hacia abajo entre las dos placas, use las ecuaciones de Navier-Stokes para determinar una expresión para el perfil de velocidad.

5.38 Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo permanente e incompresible en un tubo horizontal, suponiendo que $v_z = v_z(r)$, $v_\theta = 0$. Escriba las tres ecuaciones.

5.39 Un fluido incompresible fluye en forma permanente entre dos cilindros concéntricos infinitamente largos, con el cilindro externo fijo y el cilindro interno moviéndose con una velocidad V_c, como se muestra en la figura P5.39. Para un flujo axisimétrico laminar, completamente desarrollado entre los dos cilindros horizontales, determine una expresión para la velocidad V_c necesaria para producir un arrastre cero en el cilindro interior.

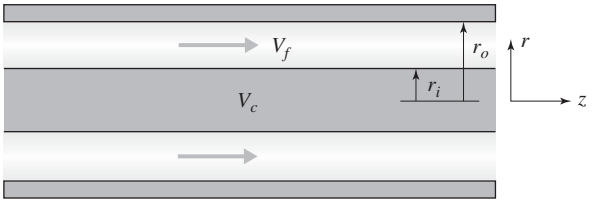


Fig. P5.39

5.40 Fluye un fluido en el pequeño espacio libre entre esferas giratorias concéntricamente tal que $v_\theta = v_\theta(r)$ y $v_\phi = 0$. Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo permanente incompresible ignorando la gravedad.

5.41 Considere un fluido viscoso entre dos cilindros verticales infinitamente largos y concéntricos con el cilindro interno, de radio r_i, fijo. El cilindro externo tiene un radio r_o y gira con velocidad angular ω. Para un flujo laminar permanente, incompresible, axisimétrico, determine una expresión para el perfil de velocidad usando las ecuaciones de Navier-Stokes.

5.42 Sustituya las ecuaciones constitutivas (5.3.10) para un flujo incompresible en las ecuaciones diferenciales de la cantidad de movimiento 5.3.2 y 5.3.3 y deduzca las ecuaciones de Navier-Stokes .

5.43 En las ecuaciones 5.3.14 se supone que la viscosidad es constante. Si la temperatura no es constante, como en un flujo de líquido con gradientes de temperatura, debemos hacer $\mu = \mu(T)$ de modo que $\mu = \mu(x, y, z)$ dado que $T = T(x, y, z)$. Modifique las ecuaciones 5.3.14 para tomar en cuenta la viscosidad variable.

5.44 Una placa plana grande oscila debajo de un líquido, como se muestra en la figura P5.44. Escriba la ecuación diferencial que describa el movimiento si el flujo laminar plano se mueve sólo paralelo a la placa. Suponga que μ = constante.

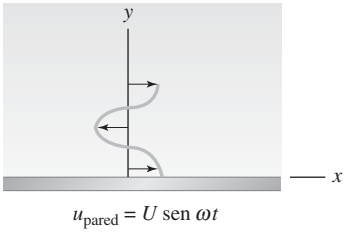


Fig. P5.44

5.45 Para un flujo de gas en el que la hipótesis de Stokes no es aplicable, el promedio negativo de los tres esfuerzos normales, denotado $\overline{p}$, puede ser diferente de la presión p. Encuentre una expresión para $(\overline{p} - p)$.

Vorticidad

5.46 Demuestre que la relación (5.3.22) es verdadera, usando para ello coordenadas rectangulares.

5.47 Existe un flujo uniforme sobre la placa plana de la figura P5.47 orientada paralelamente al flujo. La placa tiene un borde de ataque muy afilado. Identifique el término que es responsable de la creación de vorticidad.

Fig. P5.47

5.48 Ignore los efectos viscosos y determine el perfil de velocidad justo corriente abajo de la contracción en la sección 2 del flujo plano mostrado en la figura P5.48. *Sugerencia:* En un flujo inviscido, el fluido no se adhiere en la pared.

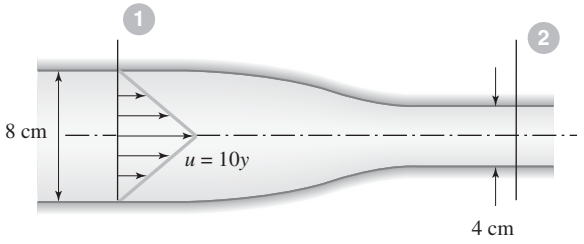


Fig. P5.48

5.49 En el ejemplo 5.8, ¿ω_x permanece igual a cero cuando el tubo de vórtice se aproxima al árbol? Si no es así, explique por qué.

Ecuación diferencial de la energía

5.50 Deduzca la ecuación diferencial de la energía para un flujo incompresible al aplicar el teorema de Gauss (vea el problema 5.1) a la ecuación integral de la energía (4.5.13) suponiendo que $\dot{W}_s = \dot{W}_{\text{cortante}} = \dot{W}_l = 0$ y usando $\dot{Q}_s = \int_{\text{s.c.}} K \boldsymbol{\nabla} T \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$. Suponga que no hay efectos viscosos.

5.51 Verifique que la ecuación 5.4.5 se obtiene de la ecuación 5.4.4. Recuerde la definición de una segunda derivada.

5.52 Verifique que la ecuación 5.4.11 se obtiene de la ecuación 5.4.9.

5.53 Simplifique la ecuación diferencial de la energía, para un flujo líquido en el que los gradientes de temperatura son bastante grandes y las componentes de la velocidad son muy pequeñas, como en un lago calentado desde arriba.

5.54 Explique en qué término de la ecuación diferencial de la energía se consideran las temperaturas extremadamente altas que existen en los satélites durante su reingreso a la atmósfera.

5.55 La distribución de la velocidad en un tubo de 2.0 cm de diámetro está dada por $u(r) = 10\,(1 - 10\,000 r^2)$ m/s. Encuentre la magnitud de la función de disipación en la pared, en la línea centro y a la mitad entre ellos para aire a 20 ºC.

5.56 La placa del problema 5.44 se calienta. Escriba la ecuación diferencial simplificada de la energía y la ecuación simplificada de Navier-Stokes suponiendo:

(a) μ = const.
(b) $\mu = \mu(T)$.

Los ciclistas olímpicos estadounidenses utilizan túneles de viento para mejorar su técnica. El ciclista está suspendido por lo que es posible medir su sustentación y resistencia al avance. (© imagebroker/Alamy)

6

Análisis dimensional y similitud

Esquema

6.1 Introducción
6.2 Análisis dimensional
  6.2.1 Motivación
  6.2.2 Repaso de dimensiones
  6.2.3 Teorema π de Buckingham
  6.2.4 Parámetros adimensionales comunes
6.3 Similitud
  6.3.1 Información general
  6.3.2 Flujos confinados
  6.3.3 Flujos con superficie libre
  6.3.4 Flujos con números de Reynolds altos
  6.3.5 Flujos compresibles
  6.3.6 Flujos periódicos
6.4 Ecuaciones diferenciales normalizadas
6.5 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Establecer los parámetros necesarios para guiar estudios experimentales.
- Presentar la técnica usada para aplicar los resultados de estudios de modelos a prototipos para una variedad de situaciones de flujo.
- Extraer los parámetros de flujo de las ecuaciones diferenciales y condiciones frontera usadas para guiar estudios computacionales.
- Dar ejemplos y problemas que ilustren la forma en que se usan los parámetros de flujo adimensionales, cómo los estudios de modelos nos permiten predecir cantidades de interés en un prototipo, y cómo se usan las ecuaciones diferenciales normalizadas.

6.1 INTRODUCCIÓN

Existen numerosos problemas de interés en el campo de la mecánica de fluidos en el mundo real del diseño que no pueden resolverse usando sólo ecuaciones diferenciales e integrales. Con frecuencia es necesario recurrir a métodos experimentales para establecer relaciones entre las variables de interés. Como los estudios experimentales suelen ser bastante costosos, es necesario mantener al mínimo los experimentos requeridos. Esto se hace usando una técnica llamada *análisis dimensional*, que está basada en la noción de la **homogeneidad dimensional**, es decir, que todos los términos en una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Por ejemplo, si escribimos la ecuación de Bernoulli en la forma

Homogeneidad dimensional: *Condición donde todos los términos de una ecuación tienen las mismas dimensiones.*

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \tag{6.1.1}$$

observamos que la dimensión de cada uno de los términos es de longitud. Además, si se saca z_1 como factor del lado izquierdo y z_2 del lado derecho, tendríamos

$$\frac{V_1^2}{2gz_1} + \frac{p_1}{\gamma z_1} + 1 = \left(\frac{V_2^2}{2gz_2} + \frac{p_2}{\gamma z_2} + 1\right)\frac{z_2}{z_1} \tag{6.1.2}$$

En esta forma de la ecuación de Bernoulli, todos los términos son adimensionales y hemos escrito la ecuación como una combinación de parámetros adimensionales, que es la idea básica en el análisis dimensional que se presenta en la siguiente sección.

Es frecuente que en el trabajo experimental se nos pida realizar experimentos en objetos demasiado grandes para ensayar con ellos a un costo razonable. Esto incluiría flujos sobre vertederos y presas; interacciones de olas con muelles y rompeolas; flujos alrededor de submarinos y barcos; flujos subsónicos y supersónicos alrededor de aviones; flujos alrededor de estadios y edificios, como se muestra en la figura 6.1; flujos a través de grandes bombas y turbinas; y flujos alrededor de automóviles y camiones. Estos flujos suelen ser estudiados en laboratorios usando modelos que son más pequeños que el prototipo, el dispositivo real. Esto reduce considerablemente los costos cuando se comparan con estudios a escala completa y permite la observación de varias configuraciones o condiciones de flujo.

CONCEPTO CLAVE *Es frecuente el uso de modelos para estudiar flujos de fluido.*

También existen flujos de interés que comprenden dimensiones muy pequeñas, por ejemplo el flujo alrededor del álabe de una turbina, el flujo en un tubo capilar, el flujo alrededor de un microorganismo, el flujo a través de una pequeña válvula de control, y el flujo alrededor y dentro de una gotita que cae. Estos flujos requerirían que el modelo fuera más grande que el prototipo para hacer observaciones con un grado aceptable de precisión.

Similitud: *Estudio de la predicción de las condiciones de un prototipo a partir de observaciones en un modelo.*

Similitud es el estudio de la predicción de las condiciones de un prototipo a partir de observaciones en un modelo. Presentaremos esto con el siguiente análisis dimensional. La similitud comprende el uso de parámetros adimensionales obtenidos en un análisis dimensional.

Teorema π de Buckingham: *Teoría que organiza pasos para asegurar la homogeneidad dimensional.*

Existen dos métodos que pueden usarse en el estudio de un análisis dimensional; aquí presentaremos ambos. Primero, usamos el **teorema π de Buckingham**, que organiza los pasos para asegurar la homogeneidad dimensional y que requiere de un cierto grado de conocimiento del fenómeno en estudio para incluir las cantidades de interés apropiadas. En segundo término, de las ecuaciones diferenciales y condiciones frontera necesarias para describir el fenómeno que se investiga, extraemos los parámetros adimensionales que influyen en una situación particular de flujo.

Fig.6.1 Modelo a escala de los rascacielos de una ciudad. Se estudia el flujo del aire alrededor de los edificios. Los elementos ásperos en el piso generan la turbulencia deseada en las paredes. (© James Leynse/Corbis)

Análisis dimensional, 588

6.2 ANÁLISIS DIMENSIONAL

6.2.1 Motivación

CONCEPTO CLAVE *Debe utilizarse el menor número posible de combinaciones de parámetros.*

En el estudio de los fenómenos que comprenden flujos de fluidos, ya sea de forma analítica o experimental, intervienen invariablemente muchos parámetros de flujo y geométricos. Con objeto de ahorrar tiempo y dinero, debe utilizarse el menor número posible de combinaciones de parámetros. Por ejemplo, considere la caída de presión a través de la válvula corrediza de la figura 6.2. Podemos sospechar que la caída de presión depende de parámetros como la velocidad media V en el tubo, de la densidad ρ del fluido, la viscosidad μ del fluido, el diámetro d del tubo, y la altura h. Esto puede expresarse como

CONCEPTO CLAVE *Sólo trabajamos con fluidos isotrópicos newtonianos. Los fluidos que no son isotrópicos tendrían parámetros adicionales relacionados con las ecuaciones de esfuerzo-deformación.*

$$\Delta p = f(V, \rho, \mu, d, h) \tag{6.2.1}$$

Ahora, si realizamos un estudio experimental de este problema, consideremos la estrategia de hallar la dependencia de la caída de presión respecto a los parámetros que intervienen. Podríamos determinar todos los parámetros excepto la velocidad e investigar la dependencia de la caída de presión en la velocidad promedio. Entonces el diámetro podría ser cambiado y repetir el experimento. Esto llevaría al conjunto de resultados que se muestra en la figura 6.3a. A continuación de ese conjunto de experimentos podría cambiarse la altura h, lo cual lleva a las curvas de la figura 6.3b. De nuevo, podrían estudiarse diferentes fluidos, lo que conduciría a las curvas con ρ y μ cambiando valores.

CONCEPTO CLAVE *Cualquier ecuación se puede escribir en términos de parámetros adimensionales.*

A continuación considere la noción de que cualquier ecuación que relacione cierto conjunto de variables, por ejemplo la ecuación 6.2.1, puede escribirse en tér-

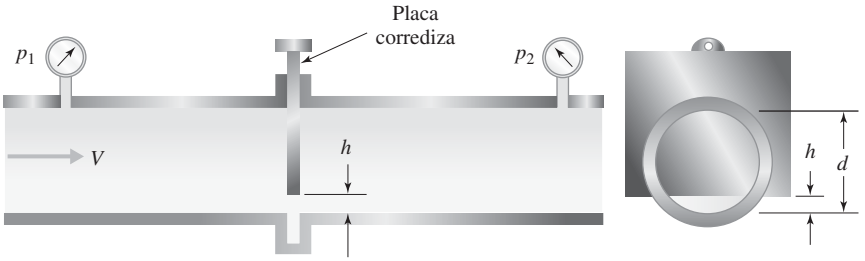


Fig. 6.2 Flujo a través de una válvula corrediza.

minos de parámetros adimensionales, como se hizo con la ecuación de Bernoulli (6.1.2). Podemos organizar las variables de la ecuación 6.2.1 en parámetros adimensionales (los pasos necesarios para hacer esto se presentarán en una sección subsiguiente) como sigue:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f\left(\frac{V\rho d}{\mu}, \frac{h}{d}\right) \tag{6.2.2}$$

Obviamente, ésta es una relación mucho más sencilla. Podríamos realizar un experimento con una h/d fija (por ejemplo $h/d = 0.1$) al variar $V\rho d/\mu$ (esto se hace simplemente haciendo variar V), resultando en la curva que se muestra en la figura 6.4. La cantidad h se cambia de modo que $h/d = 0.5$ y se repite la prueba. Por último, todo el experimento se presenta en una figura, como en la figura 6.4. Esto redujo en gran medida el trabajo y el costo para determinar la forma real de $f(V\rho d/\mu, h/d)$; podríamos usar sólo un tubo y una válvula y usaríamos sólo un fluido.

No siempre es claro, sin embargo, cuáles parámetros deberían incluirse en una ecuación como la 6.2.1. La selección de estos parámetros requiere de una comprensión detallada de la física involucrada. En la selección de los parámetros que afectan la caída de presión a través de la válvula corrediza, se supuso que la densidad y viscosidad son parámetros importantes, mientras que no lo son los parámetros como el grosor de la placa corrediza, la presión en el tubo y la gravedad. Debe recordarse que la selección de los parámetros apropiados es un primer paso crítico en la aplicación del análisis dimensional.

6.2.2 Repaso de dimensiones

Antes de presentar la técnica del análisis dimensional, repasemos las dimensiones de las cantidades de interés en un curso introductorio de mecánica de fluidos. Todas las cantidades tienen alguna combinación de dimensiones de longitud, tiempo, masa y

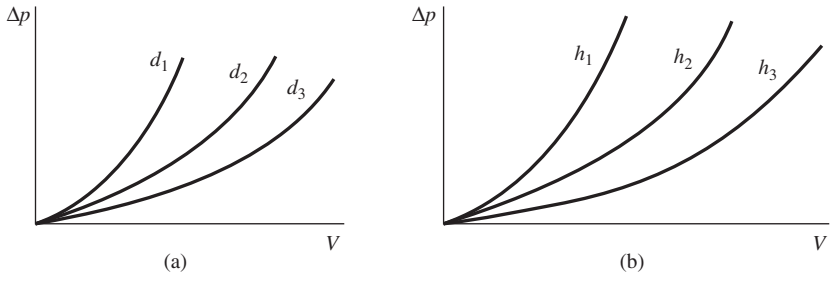


Fig. 6.3 Curvas de caída de presión contra velocidad: (a) ρ, μ, h fijas; (b) ρ, μ, d fijas.

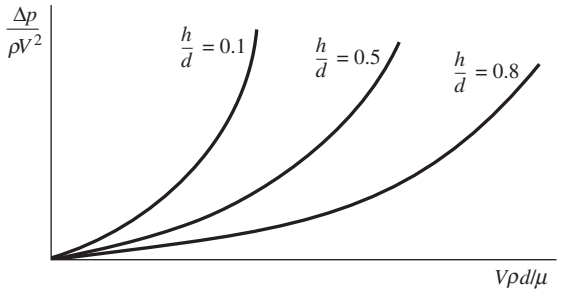


Fig. 6.4 Caída de presión adimensional contra velocidad adimensional.

fuerza que están relacionadas por la segunda ley de Newton,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{6.2.3}$$

CONCEPTO CLAVE *En todo este capítulo usaremos el sistema M-L-T.*

En términos de dimensiones, se escribe como

$$F = \frac{ML}{T^2} \tag{6.2.4}$$

donde F, M, L y T son las dimensiones de fuerza, masa, longitud y tiempo, respectivamente. Así, vemos que es suficiente usar sólo tres dimensiones básicas. Elegimos el sistema *M-L-T* porque podemos eliminar la dimensión de fuerza con la ecuación 6.2.4.

Si estuviéramos considerando situaciones de flujo más complicadas como las que comprenden interacciones de campo electromagnético, o donde intervienen gradientes de temperatura, necesitaríamos incluir las dimensiones adicionales apropiadas. No obstante, en este libro tales fenómenos no se introducirán, excepto para el flujo compresible de un gas ideal; para ese caso, una ecuación de estado relaciona los efectos térmicos con las dimensiones anteriores. Esto es,

$$p = \rho RT \tag{6.2.5}$$

donde T representa temperatura. Esto nos permite escribir

$$[RT] = [p/\rho] = \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{ML/T^2}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{T^2} \tag{6.2.6}$$

donde los corchetes representan "las dimensiones de". Observe que la ecuación de estado no introduce dimensiones adicionales.

Las cantidades de interés en la mecánica de fluidos aparecen con sus respectivas dimensiones en la tabla 6.1. Una consulta a esta tabla simplificará escribir las dimensiones de las cantidades introducidas en los problemas.

6.2.3 Teorema π de Buckingham

En un problema físico dado, la variable dependiente x_1 puede expresarse en términos de las variables independientes como

$$x_1 = f(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \tag{6.2.7}$$

Tabla 6.1 Símbolos y dimensiones de cantidades usadas en mecánica de fluidos

Cantidad	*Símbolo*	*Dimensiones*
Longitud	l	L
Tiempo	t	T
Masa	m	M
Fuerza	F	ML/T^2
Velocidad	V	L/T
Aceleración	a	L/T^2
Frecuencia	ω	T^{-1}
Gravedad	g	L/T^2
Área	A	L^2
Gasto	Q	L^3/T
Flujo másico	$\dot{m}$	M/T
Presión	p	M/LT^2
Esfuerzo	τ	M/LT^2
Densidad	ρ	M/L^3
Peso específico	γ	M/L^2T^2
Viscosidad	μ	M/LT
Viscosidad cinemática	ν	L^2/T
Trabajo	W	ML^2/T^2
Potencia, flujo térmico	$\dot{W}, \dot{Q}$	ML^2/T^3
Tensión superficial	σ	M/T^2
Módulo de volumen	B	M/LT^2

Análisis dimensional, 521-523

donde n representa el número total de variables. Por consulta de la ecuación 6.2.1, Δp es la variable dependiente y V, ρ, μ, d y h son las variables independientes. El *teorema π de Buckingham*, llamado así en honor de Edgar Buckingham (1867-1940), establece que $(n - m)$ grupos adimensionales de variables, llamados términos π, donde m es el número[1] de dimensiones básicas incluidas en las variables, pueden relacionarse por

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}) \tag{6.2.8}$$

donde π_1 incluye la variable dependiente y los términos π restantes incluyen sólo variables independientes, como en la ecuación 6.2.2.

CONCEPTO CLAVE *Debe presentarse una dimensión al menos dos veces o ninguna.*

Además, se observa que un requisito para una aplicación exitosa del análisis dimensional es que una dimensión debe presentarse al menos dos veces o ninguna. Por ejemplo, la ecuación $\Delta p = f(V, l, d)$ está mal expresada porque la presión comprende las dimensiones de fuerza y V, l y d no contienen esa dimensión.

El procedimiento empleado para aplicar el teorema π se resume como sigue:

1. Escribir la forma funcional de la variable dependiente que depende de las $(n - 1)$ variables independientes. Este paso requiere el conocimiento del fenómeno en estudio. Todas las variables que afectan la variable dependiente deben incluirse. Éstas incluyen variables geométricas, propiedades del fluido y efectos externos que influyen en la variable en estudio. Las cantidades que no tienen influencia en la variable dependiente no deben incluirse. Tampoco deben incluirse variables que dependan unas de otras; por ejemplo, no deben incluirse el radio y el diámetro. Las variables en el lado derecho de la ecuación 6.2.7 deben ser independientes.

[1]Hay situaciones en las que m es menor que el número de dimensiones básicas. Esto se ilustra en el ejemplo 6.2.

2. Identificar m **variables repetitivas**, variables que se combinarán con cada variable restante para formar los términos π. Las variables repetitivas seleccionadas de entre las variables independientes deben incluir todas las dimensiones básicas, pero no deben formar un término π por sí mismas. Un ángulo no puede ser variable repetitiva dado que es adimensional y forma un término π por sí mismo.
3. Formar los términos π al combinar las variables repetitivas con cada una de las variables restantes.
4. Escribir la forma funcional de los $(n - m)$ términos π adimensionales.

Variables repetitivas: *Variables que se combinarán con cada variable restante para formar los términos π.*

El paso 3 puede efectuarse por medio de un procedimiento algebraico; también ilustraremos un procedimiento en los ejemplos que consiste en observación.

Ahora se ilustrará el procedimiento algebraico con un ejemplo. Supóngase que deseamos combinar las variables de tensión superficial σ, velocidad V, densidad ρ y longitud l en un término π; esto se puede escribir como

$$\pi = \sigma^a V^b \rho^c l^d \tag{6.2.9}$$

El objetivo es determinar a, b, c y d para que el grupo sea adimensional. En términos de dimensiones (consulte la tabla 6.1), la ecuación 6.2.9 es

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{M}{T^2}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c L^d \tag{6.2.10}$$

Igualando exponentes en cada una de las dimensiones básicas:

$$\begin{aligned} M&: \quad 0 = a + c \\ L&: \quad 0 = b - 3c + d \\ T&: \quad 0 = -2a - b \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Las tres ecuaciones algebraicas se resuelven simultáneamente y se obtiene

$$a = -c \qquad b = 2c \qquad d = c \tag{6.2.12}$$

de modo que el término π se convierte en

$$\pi = \left(\frac{\rho l V^2}{\sigma}\right)^c \tag{6.2.13}$$

CONCEPTO CLAVE *Un parámetro adimensional elevado a cualquier potencia permanece adimensional.*

Un parámetro adimensional elevado a cualquier potencia permanece adimensional; en consecuencia, se puede seleccionar que c sea cualquier otro número diferente de cero. Comúnmente se selecciona como $c = 1$, dependiendo de la relación deseada. Si se selecciona $c = 1$, el término π es

$$\pi = \frac{\rho l V^2}{\sigma} \tag{6.2.14}$$

En realidad, podríamos haber seleccionado $c = 1$ en la ecuación 6.2.9 y proseguido con sólo tres incógnitas. O bien, si se hubiera deseado tener σ en el numerador a la primera potencia, podríamos haber hecho $a = 1$ y b, c y d como incógnitas.

Una nota final: si resulta sólo un término π, la forma funcional establecería que el término π debe ser una constante dado que el lado derecho de la ecuación 6.2.8 no contendría términos π adicionales. Esto resultaría en una expresión que incluiría una constante arbitraria que podría ser determinada mediante análisis o experimentación.

Ejemplo 6.1

Se va a estudiar la fuerza de arrastre F_D en un cilindro de diámetro d y longitud l. ¿Qué forma funcional relaciona las variables adimensionales si un fluido con velocidad V fluye normal al cilindro?

Solución

Primero, debemos determinar las variables que tengan alguna influencia sobre la fuerza de arrastre. Si incluimos variables que no influyen en la fuerza de arrastre, tendríamos términos π adicionales que la experimentación mostraría que no son importantes; si no incluimos una variable que influya en la fuerza de arrastre, la experimentación también expondría ese problema. La experiencia ese esencial al elegir las variables correctas; en este ejemplo incluiremos como variables influyentes la velocidad V de corriente libre, la viscosidad μ, la densidad ρ del fluido, además del diámetro d y la longitud l del cilindro, resultando en $n = 6$ variables. Esto se escribe como

$$F_D = f(d, l, V, \mu, \rho)$$

Se observa que las variables incluyen $m = 3$ dimensiones. Consultando la tabla 6.1 tenemos

$$[F_D] = \frac{ML}{T^2} \qquad [V] = \frac{L}{T} \qquad [\mu] = \frac{M}{LT} \qquad [d] = L \qquad [l] = L \qquad [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

En consecuencia, podemos esperar $n - m = 6 - 3 = 3$ términos π.

Elegimos variables repetitivas con las combinaciones más sencillas de dimensiones tales que no formen un término π por sí mismas (podríamos no incluir d y l como variables repetitivas); se elige que las variables repetitivas sean d, V y ρ. Estas tres variables se combinan con cada una de las variables restantes para formar los términos π. En lugar de escribir ecuaciones semejantes a la ecuación 6.2.9 para los términos π, formemos los términos π por inspección. Cuando las variables repetitivas se combinan con F_D observamos que sólo F_D y ρ tienen la dimensión de masa; por lo tanto, F_D debe dividirse entre ρ. Sólo F_D y V tienen la dimensión de tiempo; por lo tanto, F_D debe dividirse entre V^2. Entonces F_D dividida entre ρ tiene L^4 en el numerador; cuando se divide entre V^2 da como resultado que L^2 queda en el numerador. Por lo tanto, debemos tener d^2 en el denominador resultando en

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 d^2}$$

Cuando d, V y ρ se combinan con l tenemos

$$\pi_2 = \frac{l}{d}$$

Los últimos términos π resultan de combinar μ con d, V y ρ. La dimensión de masa desaparece si dividimos μ entre ρ. La dimensión de tiempo desaparece si dividimos μ entre V. Esto deja una dimensión de longitud en el numerador; por lo tanto, d es necesaria en el denominador, resultando en

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho V d}$$

La relación funcional adimensional que relaciona los términos π es

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \qquad \text{o} \qquad \frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f_1\left(\frac{l}{d}, \frac{\mu}{\rho V d}\right)$$

En lugar de la relación original de seis variables hemos reducido la relación a una que contiene tres términos π, una expresión mucho más sencilla. Para determinar la forma particular de la relación funcional previa, en realidad tendríamos que resolver el problema; se necesitaría de experimentación si no se dispusiera de métodos analíticos o numéricos. Con frecuencia éste es el caso en mecánica de fluidos.

Observe que podríamos haber incluido varias variables adicionales en nuestra lista original, por ejemplo la gravedad g, el ángulo θ que forma la velocidad con el cilindro, y la rugosidad e de la superficie del cilindro. No incluir variables que sean significativas, o incluir variables que no sean significativas es cuestión de experiencia. El pricipiante debe aprender cómo identificar variables significativas; no obstante, es frecuente que hasta el investigador experimentado no sepa qué hacer para correlacionar ciertos fenómenos; a menudo se requiere de mucha experimentación para descubrir los parámetros apropiados.

Ejemplo 6.2

Se va a estudiar la elevación de un líquido en un tubo capilar y se anticipa que la elevación h dependerá de la tensión superficial σ, del diámetro d del tubo, del peso específico γ del líquido, y del ángulo β de adhesión entre el líquido y el tubo. Escriba la forma funcional de las variables adimensionales.

Solución

La expresión que relaciona las variables es

$$h = f(\sigma, d, \gamma, \beta)$$

Las dimensiones de las variables son

$$[h] = L \qquad [\gamma] = \frac{M}{L^2T^2} \qquad [\beta] = 1 \text{ (adimensional)} \qquad [\sigma] = \frac{M}{T^2} \qquad [d] = L$$

Por observación vemos que M/T^2 se presenta en las combinaciones de σ y γ, de aquí que M y T sean dimensiones no independientes en este problema. Hay sólo dos agrupaciones independientes de dimensiones básicas, L y M/T^2. Entonces $m = 2$, y elegimos σ y d como las variables repetitivas. Cuando se combina con h, el primer término π es

$$\pi_1 = \frac{h}{d}$$

Cuando σ y d se combinan con γ, el segundo término es

$$\pi_2 = \frac{\gamma d^2}{\sigma}$$

Por último, como el ángulo β es adimensional, forma un término π por sí mismo; esto es,

$$\pi_3 = \beta$$

La forma funcional final que relaciona los términos es

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \qquad \text{o} \qquad \frac{h}{d} = f_1\left(\frac{\gamma d^2}{\sigma}, \beta\right)$$

Nota: en este ejemplo no podríamos haber elegido el ángulo β como variable repetitiva porque ya es un término π adimensional. Tampoco podríamos haber seleccionado tres variables repetitivas porque M y T no eran independientes.

Del mismo modo, observe que podríamos haber considerado que la gravedad debería haberse incluido en el problema. Si se hubiera incluido arriba, no habría aparecido en ninguno de los términos π, indicando que no debía haberse incluido. Si se hubieran incluido la densidad y la gravedad, en lugar del peso específico, habría resultado la relación previa porque $\gamma = \rho g$; esto, a propósito, hubiera evitado la necesidad de observar que M/T^2 era una agrupación dimensional.

Una nota final respecto a la forma funcional de los términos π: la relación anterior también podría haberse escrito como

$$\frac{h}{d} = f_1\left(\frac{\sigma}{\gamma d^2}, \beta\right)$$

Además, podría seleccionarse un conjunto diferente de variables repetitivas. Esto simplemente expresa la ecuación funcional final en una forma diferente pero equivalente. En realidad, se puede demostrar que una segunda forma es una combinación de los términos π a partir de una forma inicial.

Ejemplo 6.2a Oscilaciones en un tubo en U, 547-550

Ejemplo 6.2b Flujo de un depósito, 555-558

Ejemplo 6.2c Similitud geométrica y dinámica, 542-543

6.2.4 Parámetros adimensionales comunes

Considere una relación relativamente general entre la caída de presión Δp, una longitud característica l, una velocidad característica V, la densidad ρ, la viscosidad μ, la gravedad g, la tensión superficial σ, la velocidad del sonido c, y una frecuencia angular ω, escrita como

$$\Delta p = f(l, V, \rho, \mu, g, c, \omega, \sigma) \tag{6.2.15}$$

El teorema π aplicado a este problema, con l, V y ρ como variables repetitivas, resulta en

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_1\left(\frac{V\rho l}{\mu}, \frac{V^2}{lg}, \frac{V}{c}, \frac{l\omega}{V}, \frac{V^2\rho l}{\sigma}\right) \tag{6.2.16}$$

Números adimensionales, 524-528

Cada uno de los términos π de esta expresión es un parámetro adimensional común que aparece en numerosas situaciones de flujos de fluidos. Son identificados como sigue:

$$\text{Número de Euler, Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

$$\text{Número de Reynolds, Re} = \frac{V\rho l}{\mu}$$

$$\text{Número de Froude,}^2 \text{ Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}}$$

$$\text{Número de Mach, M} = \frac{V}{c} \tag{6.2.17}$$

$$\text{Número de Strouhal,}^2 \text{ St} = \frac{l\omega}{V}$$

$$\text{Número de Weber,}^2 \text{ We} = \frac{V^2 l\rho}{\sigma}$$

[2]Los números de Froude, Strouhal y Weber fueron nombrados en honor de William Froude (1810-1879), Vincenz Strouhal (1850-1922) y Moritz Weber (1871-1951), respectivamente.

La importancia física de cada parámetro puede determinarse al observar que cada número adimensional puede escribirse como la relación entre dos fuerzas. Las fuerzas observadas son

$$
\begin{aligned}
F_P &= \text{fuerza de presión} = \Delta pA \sim \Delta pl^2 \\
F_I &= \text{fuerza inercial} = mV\frac{dV}{ds} \sim \rho l^3 V\frac{V}{l} = \rho l^2 V^2 \\
F_\mu &= \text{fuerza viscosa} = \tau A = \mu\frac{du}{dy}A \sim \mu\frac{V}{l}l^2 = \mu lV \\
F_g &= \text{fuerza de gravedad} = mg \sim \rho l^3 g \\
F_B &= \text{fuerza de compresibilidad} = BA \sim \rho\frac{dp}{d\rho}l^2 = \rho c^2 l^2 \\
F_\omega &= \text{fuerza centrífuga} = mr\omega^2 \sim \rho l^3 l\omega^2 = \rho l^4\omega^2 \\
F_\sigma &= \text{fuerza de tensión superficial} = \sigma l
\end{aligned}
\tag{6.2.18}
$$

Entonces vemos que

$$
\begin{aligned}
\text{Eu} &\propto \frac{\text{fuerza de presión}}{\text{fuerza inercial}} \\
\text{Re} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza viscosa}} \\
\text{Fr} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza de gravedad}} \\
\text{M} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza de compresibilidad}} \\
\text{St} &\propto \frac{\text{fuerza centrífuga}}{\text{fuerza inercial}} \\
\text{We} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza de tensión superficial}}
\end{aligned}
\tag{6.2.19}
$$

CONCEPTO CLAVE *Las relaciones entre fuerzas nos permiten anticipar los parámetros significativos en un flujo.*

Considerando los parámetros adimensionales en términos de las relaciones entre fuerzas nos permite anticipar los parámetros significativos en un flujo de interés particular. Si las fuerzas viscosas son importantes, como en el flujo del tubo de la figura 3.8 o en el flujo en la capa límite de la figura 3.10, sabemos que el número de Reynolds es un parámetro adimensional significativo. Si las fuerzas de tensión superficial son instrumentales al afectar el flujo, como en la formación de gotitas o el flujo por un vertedero con una altura hidrostática pequeña, esperamos que el número de Weber sea importante. Puede aplicarse un análisis similar a otras situaciones de flujo de fluido.

Obviamente, todos los efectos incluidos en la relación general (6.2.16) no serían de interés en ninguna otra situación. Sería muy poco probable que los efectos de la compresibilidad y los efectos de la tensión superficial influyan simultáneamente en un flujo. Además, es frecuente que haya más de una longitud de importancia con lo que se introducen más relaciones geométricas adimensionales. No obstante, hemos introducido los parámetros de flujo adimensionales más comunes de interés en mecánica de fluidos. La tabla 6.2 resume esta sección.

Tabla 6.2 Parámetros adimensionales comunes en mecánica de fluidos

Parámetro	*Expresión*	*Situaciones de flujo donde el parámetro es importante*
Número de Euler	$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$	Flujos donde la caída de presión es importante: la mayoría de las situaciones de flujo
Número de Reynolds	$\frac{\rho l V}{\mu}$	Flujos donde influyen efectos viscosos: flujos internos, flujos en capa límite
Número de Froude	$\frac{V}{\sqrt{lg}}$	Flujos donde influyen efectos de la gravedad: flujos con superficie libre, principalmente
Número de Mach	$\frac{V}{c}$	La compresibilidad es importante en estos flujos, comúnmente si $V > 0.3c$
Número de Strouhal	$\frac{l\omega}{V}$	Flujo con una componente no permanente que se repite periódicamente
Número de Weber	$\frac{V^2 l\rho}{\sigma}$	La tensión superficial influye en el flujo; un flujo con interfase puede ser un flujo como ese

6.3 SIMILITUD

6.3.1 Información general

Como se indica en la introducción, *similitud* es el estudio de predecir condiciones en un prototipo a partir de observaciones en un modelo. Cuando no es práctica una solución analítica o numérica, o cuando los cálculos se basan en simplificaciones del flujo de modo que se introduce incertidumbre, por lo general es aconsejable realizar pruebas en un modelo si las pruebas no son prácticas en un prototipo a escala completa, sea éste demasiado grande o demasiado pequeño.

Si se decide que ha de realizarse un estudio en un modelo, es necesario desarrollar los medios por los cuales una cantidad medida en el modelo, denotada por un subíndice m, puede usarse para predecir la cantidad asociada en el prototipo, denotada por un subíndice p. Podemos desarrollar esos medios si tenemos una **similitud dinámica** entre el modelo y el prototipo, es decir, si las fuerzas que actúan en masas correspondientes en el flujo en el modelo y en el flujo en el prototipo están a la misma proporción en todos los campos de flujo. Supongamos que fuerzas inerciales, fuerzas de presión, fuerzas viscosas y fuerzas de gravedad, están presentes; entonces la similitud dinámica exige que, en puntos correspondientes de los campos de flujo,

Similitud dinámica: *Las fuerzas que actúan sobre masas correspondientes en el flujo del modelo y en el flujo del prototipo están a la misma proporción en todos los flujos.*

$$\frac{(F_I)_m}{(F_I)_p} = \frac{(F_P)_m}{(F_P)_p} = \frac{(F_\mu)_m}{(F_\mu)_p} = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \text{const.} \tag{6.3.1}$$

Que se pueden reacomodar para obtener

$$\left(\frac{F_I}{F_P}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_p \qquad \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_p \qquad \left(\frac{F_I}{F_g}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_g}\right)_p \tag{6.3.2}$$

las cuales, en la sección anterior, se demostró que eran

$$\text{Eu}_m = \text{Eu}_p \qquad \text{Re}_m = \text{Re}_p \qquad \text{Fr}_m = \text{Fr}_p \tag{6.3.3}$$

Si las fuerzas anteriores fueran las únicas presentes, podríamos escribir

$$F_I = f(F_P, F_\mu, F_g) \tag{6.3.4}$$

Reconociendo que sólo hay una dimensión básica, que es la fuerza, el análisis dimensional nos permite escribir (vea la ecuación 6.2.8) la ecuación previa en términos de relaciones de fuerza o

$$\text{Eu} = f(\text{Re}, \text{Fr}) \tag{6.3.5}$$

Por lo tanto, podríamos concluir que si el número de Reynolds y el de Froude son iguales en el modelo y en el prototipo, el número de Euler también debe ser igual. Entonces, la similitud dinámica entre el modelo y el prototipo está garantizada al igualar el número de Reynolds y el de Froude del modelo con los del prototipo, respectivamente. Si aquí se incluyeran las fuerzas de compresibilidad, el análisis anterior resultaría en que el número de Mach se incluiría en la ecuación 6.3.5.

Similitud dinámica, 195

Podemos escribir la relación de la fuerza inercial como

$$\frac{(F_I)_m}{(F_I)_p} = \frac{a_m m_m}{a_p m_p} = \text{const.} \tag{6.3.6}$$

demostrando que la relación de la aceleración entre puntos correspondientes en el modelo y el prototipo es una constante siempre que la relación de masas de elementos de fluido correspondientes sea una constante. Podemos escribir la relación de la aceleración como

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{V_m^2/l_m}{V_p^2/l_p} = \text{const.} \tag{6.3.7}$$

demostrando que la relación de la velocidad entre puntos correspondientes es una constante siempre que la relación de la longitud sea una constante. Que la relación de la velocidad sea una constante entre todos los puntos correspondientes de los campos de flujo es el enunciado de la **similitud cinemática**. Esto resultaría en que el patrón de líneas de corriente alrededor del modelo es igual que alrededor del prototipo, excepto por un factor de escala. Que la relación de la longitud sea constante entre todos los puntos correspondientes en los campos de flujo es la demanda de la **similitud geométrica**, que resulta en que el modelo tiene la misma forma que el prototipo. Por lo tanto, para asegurar una similitud total entre el modelo y el prototipo, se requiere que:

Similitud cinemática: *Condición donde la relación de la velocidad es una constante entre todos los puntos correspondientes en los flujos.*

CONCEPTO CLAVE *El patrón de líneas de corriente alrededor del modelo es igual que alrededor del prototipo.*

- Se satisfaga la similitud geométrica
- La relación de masas de elementos de fluido correspondientes sea constante
- Los parámetros adimensionales apropiados en la ecuación 6.2.17 sean iguales

Similitud geométrica: *Condición donde el modelo tiene la misma forma que el prototipo.*

Suponiendo que exista una similitud total entre el modelo y el prototipo, ahora podemos predecir cantidades de interés en un prototipo a partir de mediciones en un modelo. Si medimos una fuerza de arrastre F_D en un modelo y deseamos predecir el arrastre correspondiente en el prototipo, podríamos igualar la relación entre las

fuerzas de arrastre con la relación de las fuerzas inerciales (vea la ecuación 6.2.18) como

$$\frac{(F_D)_m}{(F_D)_p} = \frac{(F_I)_m}{(F_I)_p} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m^2}{\rho_p V_p^2 l_p^2} \tag{6.3.8}$$

Si medimos la entrada de potencia suministrada a un modelo y deseamos predecir las necesidades de potencia de un prototipo, partiríamos de que la potencia es fuerza por velocidad y escribimos

Similitud y escala, 494, 534, 535

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_p} = \frac{(F_I)_m V_m}{(F_I)_p V_p} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m^2 V_m}{\rho_p V_p^2 l_p^2 V_p} \tag{6.3.9}$$

Por lo tanto, podemos predecir una cantidad del prototipo si seleccionamos el fluido del modelo (esto produce ρ_m/ρ_p), la relación de escala (esto da l_m/l_p), y el número adimensional apropiado de la tabla 6.2 (esto da V_m/V_p). Lo anterior se ilustrará con ejemplos.

6.3.2 Flujos confinados

Un flujo confinado es aquel que no tiene superficie libre (una superficie líquido-gas) o interfase (dos líquidos diferentes que forman una interfase). Está confinado a moverse dentro de una región especificada; tales flujos incluyen flujos externos alrededor de cuerpos, por ejemplo aeronaves, edificios y submarinos, así como flujos internos en tuberías y conductos.

CONCEPTO CLAVE *La gravedad no influye en el patrón de flujo en flujos confinados.*

La gravedad no influye en el patrón de flujo en flujos confinados; esto es, si la gravedad pudiera cambiar de magnitud, el patrón de flujo y las cantidades de flujo asociadas no cambiarían. El efecto dominante es el de la viscosidad en flujos confinados incompresibles (todos los flujos de líquido y de gas en los que M < 0.3). Es obvio que la tensión superficial no es un factor, como lo sería en la formación de burbujas, y para flujos permanentes no habría efectos no permanentes debido a oscilaciones en el flujo. Las tres fuerzas relevantes son fuerzas de presión, fuerzas inerciales y fuerzas viscosas. Por lo tanto, en flujos confinados se logra la similitud dinámica si las relaciones entre fuerzas viscosas, inerciales y de presión entre el modelo y el prototipo son iguales. Esto lleva a la conclusión (vea la ecuación 6.3.5) que Eu = f(Re), de modo que sólo es necesario considerar el número de Reynolds como el parámetro adimensional dominante en un flujo incompresible confinado. Si los efectos de compresibilidad son significativos, el número de Mach también sería importante.

CONCEPTO CLAVE *El número de Reynolds es el parámetro adimensional dominante en un flujo incompresible confinado.*

Ejemplo 6.3

Se realiza una prueba en un diseño propuesto para una bomba grande que suministrará 1.5 m^3/s de agua con un impulsor de 40 cm de diámetro con un aumento de presión de 400 kPa. Se usa un modelo con 8 cm de diámetro. ¿Qué gasto debe usarse y qué aumento de presión debe esperarse? El fluido para el modelo es agua a la misma temperatura que el agua del prototipo.

Solución

Para que exista similitud en este problema de flujo incompresible confinado, los números de Reynolds deben ser iguales; esto es

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$$

$$\frac{V_m d_m}{\nu_m} = \frac{V_p d_p}{\nu_p}$$

Reconociendo que $\nu_m = \nu_p$ si las temperaturas son iguales, vemos que

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{d_p}{d_m}$$

$$= \frac{0.4}{0.08} = 5$$

La relación de gastos se encuentra reconociendo que $Q = VA$:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m d_m^2}{V_p d_p^2}$$

$$= 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

Entonces encontramos que

$$Q_m = \frac{Q_p}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

El aumento de presión adimensional se encuentra usando el número de Euler:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_m = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_p$$

Por tanto, el aumento de presión para el modelo es

$$\Delta p_m = \Delta p_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{V_m^2}{V_p^2}$$

$$= 400 \times 1 \times 5^2 = 10\,000 \text{ kPa}$$

Observe que en este ejemplo vemos que la velocidad en el modelo es igual a la velocidad en el prototipo multiplicada por la relación de longitud, y el aumento de presión en el modelo es igual al aumento de presión en el prototipo multiplicada por el cuadrado de la relación de longitud. Si la relación de longitud fuera muy grande, es obvio que en verdad sería muy difícil mantener la equivalencia del número de Reynolds. Esta observación se examina con más detalle en la sección 6.3.4.

6.3.3 Flujos con superficie libre

Un flujo con superficie libre es aquel en el que parte de la frontera involucra una condición frontera de presión. Esto incluye flujos sobre vertederos y presas, como se muestra en la figura 6.5; flujos en canales y vertederos; flujos que comprenden dos fluidos separados por una interfase; y flujos alrededor de cuerpos flotantes con

Fig. 6.5 Modelo de la esclusa y presa Bonneville en el río Columbia. (Cortesía del U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station.)

olas y alrededor de cuerpos sumergidos con cavitación presente. En todos estos flujos la ubicación de la superficie libre es desconocida, al igual que la velocidad de la superficie libre; es la presión la que debe ser igual[3] en cualquiera de los lados de la interfase. En flujos con superficie libre, la gravedad controla tanto la ubicación como el movimiento de la superficie libre. Esto introduce el número de Froude debido a la influencia de las fuerzas de gravedad. Si consideramos flujos que no exhiben movimientos periódicos, que tienen efectos insignificantes de tensión superficial y de compresibilidad, podemos ignorar la influencia de St, M y We. Eso deja a consideración sólo los efectos viscosos. Existen muchos flujos con superficie libre en los que son significativos los efectos viscosos. Considere, no obstante, que en casi todos los estudios de modelos el agua es el único fluido económico a usar; si el fluido del prototipo también es agua, como es con frecuencia, de los números de Froude encontraríamos

CONCEPTO CLAVE
Usamos el número de Froude para modelar un flujo con superficie libre.

$$\frac{V_m^2}{l_m g_m} = \frac{V_p^2}{l_p g_p} \qquad \therefore \frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{l_m}{l_p}\right)^{1/2} \tag{6.3.10}$$

suponiendo que $g_m = g_p$. Igualando los números de Reynolds (usando $\nu_m = \nu_p$):

$$\frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \qquad \therefore \frac{V_m}{V_p} = \frac{l_p}{l_m} \tag{6.3.11}$$

[3]La tensión superficial, si es significativa, resulta en una diferencia de presión a través de la interfase.

Así tenemos un conflicto. Si usamos el mismo fluido en el estudio del modelo como en el flujo del prototipo, no podemos satisfacer el criterio del número de Froude ni el criterio del número de Reynolds. Si pedimos que se satisfagan ambos criterios mediante el uso de fluidos diferentes para el modelo y el prototipo ($\nu_m \neq \nu_p$), debemos seleccionar un fluido para el modelo con una viscosidad $\nu_m = \nu_p(l_m/l_p)^{3/2}$ (esto resulta de igualar los números de Froude y Reynolds). Es probable que un fluido con esta viscosidad sea una imposibilidad o que no sea práctico. Por lo tanto, al modelar flujos con superficie libre en los que los efectos viscosos sean importantes, igualamos los números de Froude e incluimos los efectos viscosos mediante alguna otra técnica. Por ejemplo, si medimos el arrastre total en el modelo de un barco, aproximaríamos el arrastre viscoso (usando alguna técnica no incluida aquí) y lo restaríamos del arrastre total, dejando el arrastre debido a la resistencia por el oleaje. El arrastre por el oleaje en el prototipo se pronosticaría entonces usando una similitud, y el arrastre viscoso aproximado se sumaría al arrastre por el oleaje, dando el arrastre esperado en el barco. Para mejores diseños, el arrastre viscoso en cascos de barcos puede ser del mismo orden de magnitud que el arrastre por oleaje.

Ejemplo 6.4

Se utiliza un modelo a escala 1:20 de una embarcación de superficie para probar la influencia del arrastre por oleaje en un diseño propuesto. Se mide un arrastre por oleaje de 6.2 lb a una velocidad de 8 ft/s en un modelo. ¿A qué velocidad corresponde en el prototipo, y qué arrastre por oleaje se predice para el prototipo? Desprecie los efectos viscosos y suponga el mismo fluido para el modelo y el prototipo.

Solución

El número de Froude debe igualarse tanto para el modelo como para el prototipo. Así,

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_p \qquad \frac{V_m}{\sqrt{l_m g}} = \frac{V_p}{\sqrt{l_p g}}$$

Esto da, reconociendo que g no varía significativamente en la superficie de la Tierra,

$$V_p = V_m\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^{1/2} = 8.0\sqrt{20} = 35.8 \text{ ft/s}$$

Para hallar el arrastre por oleaje en el prototipo, igualamos la relación del arrastre con la relación de la fuerza inercial:

$$\frac{(F_D)_m}{(F_D)_p} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m^2}{\rho_p V_p^2 l_p^2}$$

Esto nos permite calcular el arrastre por oleaje en el prototipo, usando $\rho_p = \rho_m$, como

$$(F_D)_p = (F_D)_m \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2}$$

$$= 6.2 \times \frac{35.8^2}{8^2} \times 20^2 = 49\,700 \text{ lb}$$

Nota: Podríamos haber usado la relación de la fuerza de gravedad en lugar de la relación de la fuerza inercial, pero no podríamos haber usado la relación de la fuerza viscosa dado que se supuso que las fuerzas viscosas eran insignificantes.

6.3.4 Flujos con números de Reynolds altos

CONCEPTO CLAVE
Cuando se comparan los números de Reynolds, la velocidad en el modelo es con frecuencia prohibitivamente grande.

En un flujo confinado en el que el número de Reynolds es el parámetro adimensional que garantiza la similitud dinámica vemos que, si se usa el mismo fluido en el modelo y en el prototipo, la velocidad en el estudio del modelo es $V_m = V_p l_p / l_m$; en el modelo, la velocidad es la del prototipo multiplicada por el factor de escala. Es frecuente que esto resulte en velocidades que son prohibitivamente grandes en el estudio del modelo. También son grandes las presiones encontradas en el estudio del modelo, como se muestra en el ejemplo 6.3, y el consumo de energía también es muy grande. Debido a estos problemas, puede que los números de Reynolds no se igualen en estudios que contengan números de Reynolds grandes.

Hay, no obstante, alguna justificación para no igualar el número de Reynolds en estudios de modelos. Considere un coeficiente de arrastre común C_D contra la curva del número de Reynolds, como se muestra en la figura 6.6 para un cuerpo romo (la curva completa se presenta en la figura 8.8). El coeficiente de arrastre es un arrastre adimensional, definido como $C_D = \text{drag}/\frac{1}{2}\rho V^2 A$. A un número de Reynolds lo suficientemente alto, entre alrededor de 10^3 y 10^5, el flujo es insensible a cambios en el número de Reynolds; observe que el coeficiente de arrastre es esencialmente constante e independiente de Re. Eso implica que el campo de flujo es similar en $\text{Re} = 10^3$ al de $\text{Re} = 10^5$. Entonces, si $\text{Re}_p = 10^5$, sólo es necesario que $10^3 < \text{Re}_m < 10^5$ para que los efectos viscosos tengan el mismo efecto en el modelo y en el prototipo. Es frecuente que esto permita igualar otro parámetro de interés, por ejemplo el número de Froude o el número de Mach. Existen, no obstante, flujos con números de Reynolds altos en los que los efectos de la compresibilidad y los efectos de la superficie libre son insignificantes, de modo que ni el número de Froude ni el de Mach son aplicables. Ejemplos incluyen flujo alrededor de automóviles, de grandes chimeneas y de dirigibles. Para estos flujos debemos asegurar sólo que el número de Reynolds se encuentre dentro del intervalo donde el coeficiente de resistencia al avance sea constante. Deberíamos observar que para números de Reynolds bastante grandes ($\text{Re} > 5 \times 10^5$ en la figura 6.6), el flujo también puede hacerse independiente del número de Reynolds. Si ese es el caso, sólo es necesario que Re_m sea lo suficientemente grande.

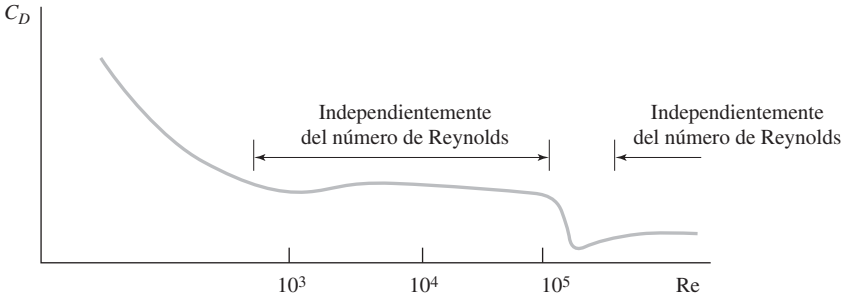


Fig. 6.6 Coeficiente de resistencia al avance contra número de Reynolds para cuerpos romos comunes.

Ejemplo 6.5

Se usa un modelo a escala 1:10 de un automóvil para medir la resistencia al avance en un diseño propuesto. Debe simular una velocidad de 90 km/h del prototipo. ¿Qué velocidad debe usarse en un túnel de viento si se igualan los números de Reynolds? Para esta condición, ¿cuál es la relación de las fuerzas de resistencia al avance?

Solución

Se utiliza el mismo fluido para el modelo y el prototipo; por tanto, igualando los números de Reynolds resulta en

$$\frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \qquad \therefore \quad V_m = V_p \frac{l_p}{l_m}$$
$$= 90 \times 10 = 900 \text{ km/h}$$

Esta velocidad, por supuesto, introduciría efectos de compresibilidad, efectos que no existen en el prototipo. Por tanto, sería inapropiado el estudio del modelo propuesto. Si utilizamos esta velocidad en el modelo, la relación de las fuerzas de resistencia al avance sería

$$\frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2} \qquad \therefore \qquad \frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = 1$$

Así, vemos que la fuerza de resistencia al avance en el modelo es igual a la fuerza de resistencia al avance en el prototipo si se usan los mismos fluidos cuando se igualan los números de Reynolds.

Ejemplo 6.6

En el ejemplo 6.5, al igualar los números de Reynolds, se observó que la velocidad en el estudio del modelo estaba en el régimen de flujo compresible (es decir, M > 0.3 o $V_m >$ 360 km/h). Para conducir un estudio aceptable del modelo, ¿podríamos usar una velocidad de 90 km/h o un modelo con una longitud característica de 10 cm? Supóngase que el coeficiente de resistencia al avance ($C_D = F_D/\frac{1}{2}\rho V^2 A$, donde A es el área proyectada) es independiente de Re para Re > 10^5. Si es así, ¿qué fuerza de resistencia al avance en el prototipo correspondería a una fuerza de resistencia al avance de 1.2 N medida en el modelo?

Solución

El estudio del modelo propuesto en un túnel de viento ha de conducirse con $V_m = 90$ km/h y $l_m = 0.1$ m. Usando $\nu = 1.6 \times 10^{-5}$ m^2/s, el número de Reynolds es

$$\text{Re}_m = \frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{(90 \times 1000/3600) \times 0.1}{1.6 \times 10^{-5}} = 1.56 \times 10^5$$

Este número de Reynolds es mayor que 10^5, de modo que supondremos que existe similitud entre el modelo y el prototipo. La velocidad de 90 km/h es lo suficientemente alta.

La fuerza de resistencia al avance en el prototipo que se desplaza a 90 km/h correspondiente a 1.2 N en el modelo se encuentra a partir de

$$\frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2} \qquad \therefore (F_D)_p = (F_D)_m \frac{\cancel{\rho_p}^{1}}{\cancel{\rho_m}} \frac{\cancel{V_p^2}^{1}}{\cancel{V_m^2}} \frac{l_p^2}{l_m^2} = 1.2 \times 10^2 = 120 \text{ N}$$

Observe que en este ejemplo hemos supuesto que el coeficiente de resistencia al avance es independiente de Re para Re > 10^5. Si el coeficiente de resistencia al avance continúa variando arriba de Re = 10^5 (esto sería evidente a partir de datos experimentales), el análisis precedente tendría que modificarse según corresponda.

6.3.5 Flujos compresibles

En la mayoría de situaciones de flujos compresibles el número de Reynolds es tan grande (consulte la figura 6.6) que no es un parámetro de importancia; los efectos de la compresibilidad conducen al número de Mach como parámetro adimensional de primer orden para estudios de modelos. Así, para un estudio particular de un modelo se requiere que

$$\mathrm{M}_m = \mathrm{M}_p \qquad \text{o} \qquad \frac{V_m}{c_m} = \frac{V_p}{c_p} \tag{6.3.12}$$

Si el estudio del modelo se realiza en un túnel de viento y el fluido para el prototipo es aire, podemos suponer que $c_m \simeq c_p$ si la temperatura es igual en los dos flujos. Para ese caso, la velocidad en el estudio del modelo es igual a la velocidad asociada con el prototipo. Por supuesto, si las velocidades del sonido son diferentes, la relación de la velocidad será diferente de la unidad, en conformidad.

Ejemplo 6.7

El aumento de presión de la corriente libre a la nariz de una sección del fuselaje de un avión se mide en un túnel de viento que es de 34 kPa a 20 ºC, con una velocidad del aire en el túnel de viento de 900 km/h. Si la prueba es simular un vuelo a una elevación de 12 km, ¿cuál es la velocidad en el prototipo y el aumento de presión esperado en la nariz?

Solución

Para hallar la velocidad en el prototipo correspondiente a una velocidad del aire de 900 km/h en el túnel de viento, igualamos los números de Mach

$$\mathrm{M}_m = \mathrm{M}_p \qquad \text{o} \qquad \frac{V_m}{\sqrt{kRT_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{kRT_p}}$$

Entonces

$$V_p = V_m\left(\frac{kRT_p}{kRT_m}\right)^{1/2} = 900\left(\frac{216.7}{293}\right)^{1/2} = 774 \text{ km/h}$$

La presión en la nariz del fuselaje del prototipo se encuentra usando el número de Euler como sigue:

$$\frac{\Delta p_m}{\rho_m V_m^2} = \frac{\Delta p_p}{\rho_p V_p^2}$$

$$\therefore \quad \Delta p_p = \Delta p_m \frac{\rho_p}{\rho_m}\frac{V_p^2}{V_m^2}$$

$$= 34 \times 0.2546 \times \frac{774^2}{900^2} = 6.4 \text{ kPa}$$

La relación de la densidad y la temperatura T_p se obtuvieron del apéndice B.

6.3.6 Flujos periódicos

En muchas situaciones de flujo existen regiones en los flujos en las que ocurren movimientos periódicos. Estos flujos incluyen el movimiento periódico del fluido (en la sección 8.3.2 esto se llama formación de vórtices) que tiene lugar cuando un fluido pasa delante de un cuerpo cilíndrico como un puente, una torre de TV, un cable o un edificio alto; el flujo adelante de un generador eólico; y el flujo que pasa a través de una turbomaquinaria. En flujos como éstos es necesario igualar los números de Strouhal, que se pueden escribir como

$$\frac{V_m}{\omega_m l_m} = \frac{V_p}{\omega_p l_p} \tag{6.3.13}$$

para que el movimiento periódico sea modelado correctamente.

Además del número de Strouhal, puede haber más parámetros adimensionales que deban igualarse: en flujos viscosos, el número de Reynolds; en flujos con superficie libre, el número de Froude; y en flujos compresibles, el número de Mach.

Ejemplo 6.8

Una gran turbina de viento, diseñada para operar a 50 km/h, debe probarse en un laboratorio construyendo un modelo a escala 1:15. ¿Qué velocidad del aire debe usarse en un túnel de viento, qué velocidad angular debe usarse para simular una velocidad del prototipo de 5 rpm, y qué salida de potencia se espera del modelo si la salida del prototipo está diseñada para que sea de 500 kW?

Solución

La velocidad en el túnel de viento puede ser cualquier velocidad mayor que la necesaria para proporcionar un número de Reynolds lo suficientemente grande. Seleccionemos la misma velocidad con la que opera el prototipo, es decir, 50 km/h, y calculemos la longitud característica mínima que demandaría un número de Reynolds de 10^5; esto da

$$\mathrm{Re} = \frac{Vl}{\nu} \qquad 10^5 = \frac{(50 \times 1000/3600) \times l}{1.6 \times 10^{-5}} \qquad \therefore l = 0.12 \text{ m}$$

Es obvio que en un túnel de viento razonablemente grande podemos mantener una longitud característica (por ejemplo, la longitud de los álabes) así de grande.

La velocidad angular se encuentra igualando los números de Strouhal. Lo que resulta en

$$\frac{V_m}{\omega_m l_m} = \frac{V_p}{\omega_p l_p} \qquad \therefore \omega_m = \omega_p \frac{V_m}{\cancel{V_p}} \frac{l_p}{l_m} = 5 \times 1 \times 15 = 75 \text{ rpm}$$

suponiendo que las velocidades del viento sean iguales.

La potencia se encuentra si se observa que potencia es fuerza por velocidad:

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_p} = \frac{\rho_m V_m^3 l_m^2}{\rho_p V_p^3 l_p^2}$$

o bien,

$$\dot{W}_m = \dot{W}_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{\cancel{V_m^3}}{\cancel{V_p^3}} \frac{\cancel{l_m^2}}{\cancel{l_p^2}} = 500 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2 = 2.22 \text{ kW}$$

6.4 ECUACIONES DIFERENCIALES NORMALIZADAS

CONCEPTO CLAVE *Al utilizar ecuaciones diferenciales con frecuencia debemos expresarlas en forma adimensional.*

En el capítulo 5 se dedujeron las ecuaciones diferenciales parciales que se usan para describir flujos de interés que comprenden fluidos newtonianos, isotrópicos y homogéneos. Estos flujos pueden ser laminares o turbulentos, permanentes o no permanentes, compresibles o incompresibles, flujos confinados o flujos con superficie libre, flujos con efectos de tensión superficial o flujos en los que la tensión superficial es insignificante. Con mucha frecuencia, al utilizar ecuaciones diferenciales, las expresamos en forma adimensional o normalizada. Esta forma de las ecuaciones nos da la información no contenida en la forma dimensional, información semejante a la proporcionada por un análisis dimensional. Normalicemos las ecuaciones diferenciales que describirán el movimiento de un flujo incompresible homogéneo. La ecuación de la energía no será necesaria.

Antes de normalizar las ecuaciones, hagamos un repaso de ellas. En forma vectorial la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes son

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho g \nabla h + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{6.4.1}$$

donde hemos supuesto que h es vertical. Como los primeros dos términos a la derecha son de la misma forma (el gradiente de una función escalar) podemos combinarlos como sigue:

$$\nabla p + \rho g \nabla h = \nabla p_k \tag{6.4.2}$$

donde la *presión cinética* p_k se define como

$$p_k = p + \rho g h \tag{6.4.3}$$

Presión cinética: *Presión que resulta sólo del movimiento de un fluido.*

En términos de la **presión cinética** la ecuación de Navier-Stokes se convierte en

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p_k + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{6.4.4}$$

Entonces, cuando cesa el movimiento de un fluido, p_k se hace cero.

Si la presión p nunca se usa en una condición frontera, podemos retener la presión cinética en las ecuaciones, con lo cual "se ocultan" los efectos de la gravedad. Si la presión entra en una condición frontera, debemos regresar a la ecuación 6.4.3, y la gravedad se vuelve importante.

CONCEPTO CLAVE
Seleccione cantidades características que describan mejor el problema de interés.

Para normalizar las ecuaciones diferenciales y las condiciones frontera, debemos seleccionar cantidades características que describan mejor el problema de interés. Por ejemplo, considere un flujo que tiene una velocidad promedio V y una dimensión primaria l. Las velocidades adimensionales y las variables coordenadas son

$$u^* = \frac{u}{V} \qquad v^* = \frac{v}{V} \qquad w^* = \frac{w}{V} \qquad x^* = \frac{x}{l} \qquad y^* = \frac{y}{l} \qquad z^* = \frac{z}{l} \tag{6.4.5}$$

donde se usan asteriscos para denotar las cantidades adimensionales. La presión característica será el doble del aumento de la presión inviscida entre la corriente libre y el punto de estancamiento (es decir, ρV^2); el tiempo característico, siempre que en el problema no exista un tiempo característico como lo es un periodo de oscilación, será el tiempo que le toma a una partícula de fluido desplazarse una distancia l a una velocidad V (es decir, l/V). Por tanto,

$$p^* = \frac{p}{\rho V^2} \qquad t^* = \frac{t}{l/V} \tag{6.4.6}$$

Usando las cantidades adimensionales de la ecuación 6.4.5, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^* &= u^*\hat{\mathbf{i}} + v^*\hat{\mathbf{j}} + w^*\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{u}{V}\hat{\mathbf{i}} + \frac{v}{V}\hat{\mathbf{j}} + \frac{w}{V}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{V}}{V} \\ \boldsymbol{\nabla}^* &= \frac{\partial}{\partial x^*}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y^*}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z^*}\hat{\mathbf{k}} \\ &= l\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + l\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + l\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = l\boldsymbol{\nabla} \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Si introducimos estas ecuaciones previas en la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, tenemos

$$\begin{aligned} \rho\frac{V}{l/V}\frac{D^*\mathbf{V}^*}{Dt^*} &= -\frac{\rho V^2}{l}\boldsymbol{\nabla}^* p_k^* + \mu\frac{V}{l^2}\nabla^{*2}\mathbf{V}^* \\ \frac{V}{l}\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\mathbf{V}^* &= 0 \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

donde D^*/Dt^* representa la derivada material adimensional. Por último, en forma adimensional,

$$\frac{D^*\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p_k^* + \frac{\mu}{\rho V l}\nabla^{*2}\mathbf{V}^*$$
$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \tag{6.4.9}$$

Observe que hemos introducido el número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} \tag{6.4.10}$$

como un parámetro en la ecuación de Navier-Stokes normalizada.

CONCEPTO CLAVE *Las condiciones frontera introducen parámetros adimensionales.*

Considere ahora las condiciones frontera. La condición sin deslizamiento en una frontera fija $\mathbf{V}^* = 0$ introduce parámetros geométricos que son necesarios para especificar la geometría de la frontera fija. Éstos incluyen, por ejemplo, un parámetro de rugosidad e/l, donde e es la altura promedio de los elementos de rugosos; un parámetro de espesor t/l, donde t es el espesor máximo de un álabe de una turbina; y un parámetro de radio de la nariz r_0/l, donde r_0 es el radio de la nariz de una superficie aerodinámica.

Otra condición frontera sería la distribución de la velocidad de entrada, por ejemplo, $u(y)/V$. Esto puede introducir parámetros que tienen que ver con el perfil y la estructura turbulenta del flujo de entrada. Tales características podrían ser extremadamente significativas para un flujo particular.

Además, una parte de la frontera puede ser oscilante, como la de un componente giratorio. En dicha frontera pediríamos que la velocidad del fluido sea la misma que la velocidad de la parte giratoria, esto es, $v = r\omega$. Esto introduciría el número de Strouhal St,

$$v^* = \mathrm{St}\, r^* \tag{6.4.11}$$

donde

$$\mathrm{St} = \frac{\omega l}{V} \tag{6.4.12}$$

Otra condición frontera que introduce un parámetro adicional es la de una superficie libre. Se requiere, despreciando los efectos de la tensión superficial, que la presión sea constante en toda una superficie libre. En una superficie agua-aire esto requiere que $p = 0$ en la superficie libre. Regresando a la ecuación 6.4.3, y normalizando, resulta

$$\rho V^2 p_k^* = \rho V^2 p^* + \rho g l h^* \qquad \text{o} \qquad p_k^* = p^* + \frac{gl}{V^2} h^* \tag{6.4.13}$$

donde hemos introducido el número de Froude

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}} \tag{6.4.14}$$

Por último, una condición frontera puede involucrar la tensión superficial, como en problemas de formación de gotitas. Esta condición frontera involucraría los dos radios de curvatura que conducen a la ecuación normalizada

$$\Delta p^* = \frac{\sigma}{l\rho V^2}\left(\frac{1}{r_1^*} + \frac{1}{r_2^*}\right) \tag{6.4.15}$$

en donde hemos introducido el número de Weber

$$\mathrm{We} = \frac{V^2 l\rho}{\sigma} \tag{6.4.16}$$

Observe que hemos introducido todos los parámetros adimensionales que expusimos en la sección 6.3 con la excepción del número de Mach. Que podría haberse introducido en una ecuación normalizada de energía, trabajo que se deja como problema de tarea.

CONCEPTO CLAVE *Las ecuaciones diferenciales y las condiciones frontera contienen todos los parámetros de interés.*

Obviamente, si podemos escribir las ecuaciones diferenciales que describen un flujo particular, esas ecuaciones y las condiciones frontera contienen todos los parámetros de interés; por tanto, el teorema π de Buckingham en realidad no es necesario para situaciones de flujo en las que se conocen las ecuaciones y condiciones frontera.

Además, podemos obtener las condiciones de similitud a partir de las ecuaciones normalizadas y de las condiciones frontera. La idea es hacer que las ecuaciones diferenciales normalizadas y las condiciones frontera sean iguales tanto para el modelo como para el prototipo. Si son iguales, deben tener la misma solución.[4] Las condiciones frontera normalizadas, siendo idénticas, demandarían que se satisfaga la similitud geométrica. Para que las ecuaciones y condiciones frontera sean idénticas en el modelo y en el prototipo, es necesario que sean iguales los parámetros adimensionales para el modelo y para el prototipo. Así, las condiciones de similitud también se incluyen en el problema normalizado.

CONCEPTO CLAVE
También se incluyen condiciones de similitud en el problema normalizado.

[4]Las cuestiones de unicidad, que no vamos a considerar, entran aquí. Por ejemplo, es posible tener condiciones y ecuaciones idénticas, sin embargo, en un caso, podría resultar un flujo laminar y en el otro podría ser un flujo turbulento o un segundo flujo laminar diferente del primero, es decir, existirían diferentes soluciones.

6.5 RESUMEN

Los estudios experimentales se simplifican en gran medida al reducir el número de variables que influyan en el fenómeno en estudio. Demostramos cómo la relación

$$\Delta p = f(V, \rho, \mu, d, h) \tag{6.5.1}$$

podría escribirse en la forma simplificada,

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f\left(\frac{V\rho d}{\mu}, \frac{h}{d}\right) \tag{6.5.2}$$

Los parámetros de flujo más comunes son, usando l como la longitud característica,

$$\text{Re} = \frac{V\rho l}{\mu}, \quad \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}}, \quad \text{M} = \frac{V}{c}, \quad \text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}, \quad \text{St} = \frac{l\omega}{V}, \quad \text{We} = \frac{V^2 l\rho}{\sigma} \tag{6.5.3}$$

Los parámetros, utilizados para guiar estudios de modelos que son de importancia primordial en un flujo particular se identifican como sigue:

Flujos confinados: $$\text{Re} = \frac{V\rho l}{\mu} \tag{6.5.4}$$

Flujos con superficie libre: $$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}} \tag{6.5.5}$$

Flujos con números de Reynolds altos: $$\text{Re} > (\text{Re})_{\text{mínimo}} \tag{6.5.6}$$

Flujos compresibles: $$\text{M} = \frac{V}{c} \tag{6.5.7}$$

Flujos periódicos: $$\text{St} = \frac{V}{l\omega} \tag{6.5.8}$$

La ecuación de Navier-Stokes se escribe usando variables adimensionales como

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} p_k + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} \tag{6.5.9}$$

donde p_k es la presión cinética. Sabemos que todas las variables son adimensionales porque aparece el número de Reynolds en la ecuación. Por simplicidad, con frecuencia escribimos las ecuaciones en forma adimensional sin los asteriscos.

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

6.1 Combine la potencia W, el diámetro d, la caída de presión Δp y la velocidad promedio V en un grupo adimensional.

(A) $\dfrac{W}{d^2 V \Delta p}$ **(B)** $\dfrac{\dot{W}}{V \Delta p}$

(C) $\dfrac{\dot{W} d}{V \Delta p}$ **(D)** $\dfrac{\dot{W}}{V d \Delta p}$

6.2 Se propone que la velocidad de un flujo dependa de un diámetro d, una longitud l, la gravedad g, la velocidad rotacional ω, y la viscosidad μ. Seleccione la variable que no influya en la velocidad.

(A) μ
(B) ω
(C) g
(D) d y l

6.3 ¿Qué velocidad debe seleccionarse en un túnel de viento donde un modelo a escala 9:1 de un automóvil debe simular una velocidad de 12 m/s? Desprecie los efectos de la compresibilidad.

(A) 108 m/s **(B)** 12 m/s
(C) 4 m/s **(D)** 1.33 m/s

6.4 El flujo alrededor de un componente estructural subacuático debe estudiarse en un túnel de viento a 20 ºC con un modelo a escala 10:1. ¿Qué velocidad debe seleccionarse en el túnel de viento para simular una velocidad del agua de 4 m/s y a 10 ºC?

(A) 4.61 m/s
(B) 40 m/s
(C) 31.6 m/s
(D) 461 m/s

6.5 ¿Qué velocidad corriente arriba debe seleccionarse en un modelo a escala 16:1 de un dique que tiene una velocidad de 2 m/s corriente arriba?

(A) 2 m/s **(B)** 1 m/s
(C) 0.5 m/s **(D)** 0.25 m/s

6.6 Se mide una fuerza de 10 N en un modelo a escala 25:1 de un barco probado en un canal de agua. ¿Qué fuerza debe esperarse en el barco prototipo? Desprecie los efectos viscosos.

(A) 156 kN **(B)** 62.5 kN
(C) 6250 N **(D)** 250 N

PROBLEMAS

6.7 Escriba la ecuación de Bernoulli en forma adimensional al dividir la ecuación 6.1.1 entre V_1^2 y multiplicar por g. Exprese la ecuación en una forma semejante a la de la ecuación 6.1.2.

6.8 Si se usara el sistema de unidades F-L-T, ¿cuáles serían las dimensiones en cada una de las siguientes cantidades?

(a) Flujo másico **(b)** Presión
(c) Densidad **(d)** Viscosidad
(e) Trabajo **(f)** Potencia
(g) Tensión superficial

Análisis dimensional

6.9 Verifique que las dimensiones de potencia sean ML^2/T^3 como aparecen en la tabla 6.1.

6.10 Si la velocidad V en un flujo de fluido depende de una dimensión l, de la densidad de fluido ρ, y de de la viscosidad μ, demuestre que esto implica que el número de Reynolds $Vl\rho/\mu$ es constante.

6.11 Si la velocidad V de un fluido depende de la tensión superficial σ, de la densidad ρ, y de un diámetro d, demuestre que esto implica que el número de Weber $V^2 d\rho/\sigma$ es constante.

6.12 Suponga que la velocidad V de caída de un objeto depende de la altura H desde la que cae, de la gravedad g y de la masa m del objeto. Encuentre una expresión para V.

6.13 Incluya la densidad ρ y la viscosidad μ del fluido circundante y repita el problema 6.12. Esto explicaría la resistencia (arrastre) del fluido.

6.14 Seleccione l, V y ρ como las variables repetitivas en el ejemplo 6.1 y encuentre una expresión para F_D. Demuestre que ésta es una forma equivalente a la del ejemplo 6.1.

6.15 Seleccione d, μ y V como las variables repetitivas en el ejemplo 6.1 y encuentre una expresión para F_D. Demuestre que ésta es una forma equivalente a la expresión del ejemplo 6.1.

6.16 Incluya la gravedad g en la lista de variables del ejemplo 6.2 y determine la expresión final que resulta para h.

6.17 Encuentre una expresión para la fuerza centrífuga F_c si ésta depende de la masa m, de la velocidad angular ω, y del radio R de un impulsor.

6.18 El esfuerzo normal σ en una viga depende del momento flexionante M, de la distancia y desde el eje neutro, y del momento de inercia I. Relacione σ con las otras variables si sabemos que σ varía linealmente con y.

6.19 Encuentre una expresión para la velocidad promedio en un tubo liso si depende de la viscosidad, del diámetro y del gradiente de presión $\partial p/\partial x$.

6.20 Se sugiere que la velocidad del agua que fluye a través de un agujero en el costado de un tanque abierto depende de la altura H del agujero desde la superficie, de la gravedad, y de la densidad del agua. ¿Qué expresión relaciona las variables?

6.21 Deduzca una expresión para la velocidad de un líquido que sale a través de un agujero en el costado de un tanque abierto si la velocidad depende de la altura H del agujero desde la superficie libre, de la viscosidad y densidad del fluido, de la gravedad y del diámetro del agujero.

6.22 La caída de presión Δp en el tubo de la figura P6.22 depende de la velocidad promedio, del diámetro del tubo, de la viscosidad cinemática, de la longitud L del tubo, de la altura de la rugosidad de la pared e, y de la densidad del fluido. Encuentre una expresión para Δp.

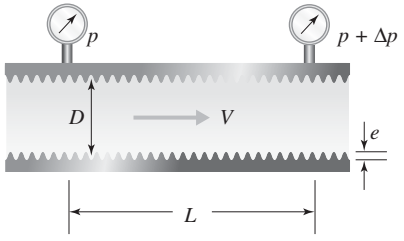


Fig. P6.22

6.23 Seleccione un conjunto apropiado de variables que influya en la fuerza de resistencia al avance F_D, en una superficie aerodinámica (figura P6.23), y escriba la forma final en términos de parámetros adimensionales.

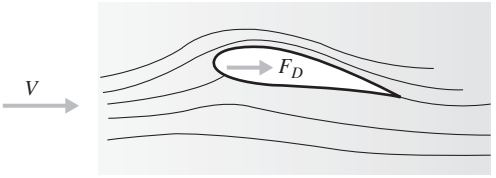


Fig. P6.23

6.24 El gasto Q en un canal abierto depende del radio hidráulico R, del área de sección transversal A, de la altura de la rugosidad de la pared e, de la gravedad g, y de la pendiente S. Relacione Q con las otras variables usando (a) el sistema M-L-T y (b) el sistema F-L-T.

6.25 La velocidad de propagación de las ondas en un líquido de poca profundidad depende de la profundidad h del líquido, de la gravedad g, de la tensión superficial σ y de la densidad ρ del líquido. Encuentre una expresión para la velocidad de propagación V. Vea la figura P6.25.

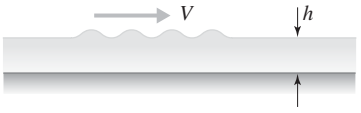


Fig. P6.25

6.26 La fuerza de arrastre F_D en una esfera depende de la velocidad V, de la viscosidad μ, de la densidad ρ, de la altura de la rugosidad superficial e, de la intensidad I de fluctuación de la corriente libre (una cantidad adimensional), y del diámetro D. Encuentre una expresión para F_D.

6.27 La fuerza de arrastre que actúa sobre un barco es considerada una función de la densidad del fluido ρ, de la viscosidad μ, de la gravedad g, de la velocidad V del barco, y de una longitud l característica. Determine un conjunto de números adimensionales apropiados para describir la relación $F_D = f(\rho, \mu, g, V, l)$.

6.28 La fuerza de empuje T, en newtons, de la hélice de un avión es una función del diámetro D de la hélice, de la densidad ρ del aire, de la viscosidad μ del aire, y de la velocidad V del avión. Determine un conjunto apropiado de números adimensionales para describir la relación $T = f(\rho, D, \mu, V)$.

6.29 La fuerza de arrastre F_D en la esfera lisa de la figura P6.29 que cae en un líquido depende de la velocidad constante V de la esfera, de la densidad del sólido ρ_s, de la densidad ρ y de la viscosidad μ del líquido, del diámetro D de la esfera, y de la gravedad g. Encuentre una expresión para F_D usando (a) el sistema M-L-T y (b) el sistema F-L-T.

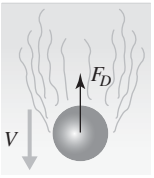


Fig. P6.29

6.30 La fuerza de resistencia al avance F_D en una pelota de golf depende de la velocidad, de la viscosidad, de la densidad, del diámetro, de la profundidad del hoyuelo, del radio del hoyuelo y de la concentración C de los hoyuelos medida mediante el número de hoyuelos por unidad de área. ¿Qué expresión relaciona F_D con las otras variables?

6.31 La frecuencia f con la cual se desprenden vórtices de un cilindro depende de la viscosidad, densidad, velocidad y diámetro. Deduzca una expresión para f.

6.32 La sustentación F_L en una superficie aerodinámica depende de la velocidad V de la aeronave, de la velocidad del sonido c, de la densidad del fluido, de la longitud de cuerda l_c de la superficie aerodinámica, del grosor t de la superficie aerodinámica, y del ángulo de ataque α. Encuentre una expresión para F_L.

6.33 Deduzca una expresión para el par de torsión T necesario para hacer girar un disco de diámetro d a la velocidad angular ω en un fluido con densidad ρ y viscosidad μ si el disco está a una distancia t de una pared. Además, encuentre una expresión para la potencia requerida.

6.34 Se observa que los cables que sostienen un puente colgante (figura P6.34) experimentan grandes vibraciones ante ciertas condiciones del viento. Seleccione un conjunto de variables que influyan en la fuerza periódica que actúa sobre un cable y escriba una relación simplificada de parámetros adimensionales.

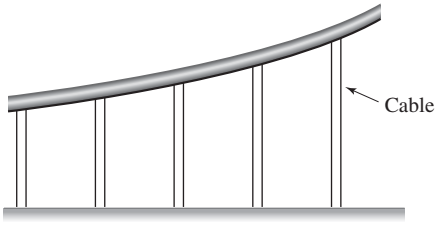


Fig. P6.34

6.35 Una aspiradora crea una caída de presión Δp a través de su ventilador. Relacione esta caída de presión con el diámetro D y el ancho h del impulsor, con su velocidad rotacional ω, con la densidad del aire ρ, y con los diámetros de entrada y salida d_i y d_o. Además, encuentre una expresión para la potencia requerida del ventilador.

6.36 Deduzca una expresión para el par de torsión máximo necesario para hacer girar un agitador si éste depende de la frecuencia de oscilación, de la velocidad angular con la cual el agitador gira durante una oscilación, del diámetro del agitador, de la altura nominal de las paletas, de la longitud de las paletas, del número de paletas, de la profundidad del líquido y de la densidad del líquido.

6.37 El gasto de agua por un vertedero depende de la carga hidráulica de agua, del ancho del vertedero, de la gravedad, de la viscosidad, de la densidad y de la tensión superficial. Relacione el gasto con las otras variables.

6.38 El tamaño de las gotitas del aspersor de un rociador de fruta depende de la velocidad del aire; de la velocidad del chorro de aspersión, del diámetro de salida del chorro de aspersión; de la tensión superficial, densidad, y viscosidad del líquido rociado; y de la densidad del aire. Relacione el diámetro de las gotitas con las otras variables.

6.39 Relacione el par de torsión T con las otras variables mostradas en la figura P6.39.

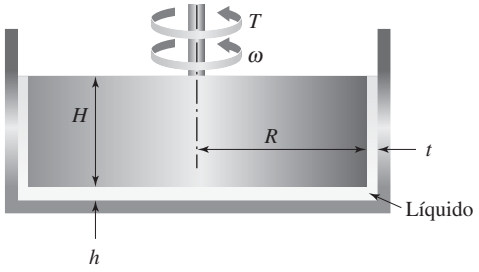


Fig. P6.39

6.40 Un viscosímetro está compuesto de un tanque abierto en el que el nivel del líquido se mantiene constante. Un tubo de diámetro pequeño vacía el líquido en un recipiente de volumen calibrado. Encuentre una expresión para la viscosidad, usando los parámetros relevantes.

6.41 Deduzca una expresión para el par de torsión T necesario para hacer girar el eje de la figura P6.41.

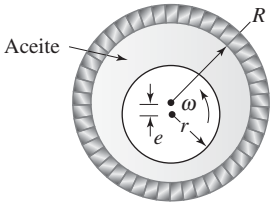


Fig. P6.41

6.42 Deduzca una expresión para la profundidad y_2 en el salto hidráulico de la figura P6.42.

Fig. P6.42

6.43 Deduzca una expresión para la frecuencia con la cual un cilindro, suspendido de una cuerda en un flujo de líquido, oscila.

Similitud

6.44 Después de realizar el estudio de un modelo, es necesario predecir cantidades de interés que deben esperarse en el prototipo. Escriba expresiones, en términos de densidad, velocidad y longitud, para la relación del modelo al prototipo de cada una de las siguientes cantidades: gasto Q, caída de presión Δp, fuerza de presión F_p, esfuerzo cortante τ_0, par de torsión T, y tasa de transferencia de calor $\dot{Q}$.

6.45 Un modelo a escala 1:7 simula la operación de una turbina grande que genera 200 kW con un gasto de 1.5 m^3/s. ¿Qué gasto debe usarse en el modelo y qué salida de potencia se espera?

(a) Se usa agua a la misma temperatura en el modelo y en el prototipo.

(b) El agua del modelo está a 25 ºC y la del prototipo está a 10 ºC.

6.46 Se usa un modelo a escala 1:5 de una bomba grande para probar un cambio propuesto. La bomba prototipo produce un aumento de presión de 600 kPa a un flujo másico de 800 kg/s. Determine el flujo másico a usarse en el modelo y el aumento de presión esperado.

(a) Se usa agua a la misma temperatura en el modelo y en el prototipo.

(b) El agua del estudio del modelo está a 30 ºC y el agua del prototipo está a 15 ºC.

6.47 Se mide que la fuerza sobre un componente de un modelo a escala 1:10 de una bomba grande es de 10 lb. ¿Qué fuerza se espera en el prototipo si se usa agua para el modelo y el prototipo:

(a) con el agua a la misma temperatura?

(b) con el agua del prototipo a 50 ºF y el agua del modelo a 70 ºF?

6.48 Se ha propuesto el estudio de un modelo a escala 1:10 de un automóvil. Se desea una velocidad de 100 km/h para el prototipo. ¿Qué velocidad del túnel de viento debe seleccionarse para el estudio del modelo? Comente sobre lo aconsejable de esta selección de la velocidad.

6.49 Se propone el estudio de un modelo a escala 1:10 de un torpedo. Se estudian velocidades de 90 km/h para el prototipo. ¿Debe usarse un túnel de viento o una instalación hidráulica?

6.50 Un modelo a escala 1:10 de la hélice de un avión se prueba en un laboratorio usando un túnel de viento. El prototipo en el que calcularemos el empuje se mueve a $V = 200$ km/h a 8000 m de altitud. Suponiendo que el prototipo y el modelo tienen similitud geométrica, use el resultado del problema 6.28 para lograr la similitud dinámica. **(a)** ¿Qué velocidad del aire debe usarse en el túnel de viento con aire estándar? **(b)** ¿Cuál es el empuje correspondiente para el prototipo, si en el modelo se mide un empuje de 10 N?

6.51 Se propone realizar el estudio de un modelo en una superficie aerodinámica de baja velocidad que debe volar a baja altitud a una velocidad de 50 m/s. Si se construye un modelo a escala 1: 10, ¿qué velocidad debe usarse en un túnel de viento? Comente en cuanto a lo aconsejable de esta prueba. ¿Sería mejor realizar la prueba en un canal de agua a 20 ºC? Si se lleva a cabo un estudio en un canal de agua, calcule la relación del arrastre entre el modelo y el prototipo.

6.52 Se realiza un estudio de un modelo de aceite (SAE-10W) a 30 ºF que fluye a través de una tubería de 2.5 ft de diámetro, mediante el uso de agua a 70 ºF. ¿De qué diámetro deberá ser la tubería si las velocidades promedio son las mismas? ¿Qué relación de la caída de presión se espera? $S_{\text{aceite}} = 0.9$.

6.53 Un microorganismo de 0.025 mm de largo se mueve a través de agua a razón de 0.1 de la longitud de su cuerpo por segundo. ¿Podría realizarse un estudio de un modelo para tal prototipo en un canal de agua o en un túnel de viento?

6.54 Se prueba un modelo a escala 1:30 con similitud completa. ¿Cuál debe ser la viscosidad del fluido para el modelo? ¿Es posible ese líquido? ¿Qué conclusión puede expresarse?

6.55 Se usa un modelo a escala 1:60 de un barco en un tanque de agua para simular una velocidad del barco de 10 m/s. ¿Cuál debe ser la velocidad para el modelo? Si

se mide una fuerza de remolque de 10 N en el modelo, ¿qué fuerza se espera en el prototipo? Desprecie los efectos viscosos.

6.56 Un gasto por un vertedero es de 2 m^3/s de agua. Un modelo a escala 1:10 se prueba en un canal de agua.

(a) ¿Qué gasto se debe emplear?

(b) Si se mide una fuerza de 12 N en el modelo, ¿qué fuerza se espera en el prototipo?

6.57 En un canal de agua se prueba un modelo a escala 1:10 de una superficie hidrodinámica con una fuerza de 0.8 lb a una velocidad de 20 ft/s. Determine la velocidad y la fuerza esperadas para el prototipo. Desprecie los efectos viscosos.

6.58 Se estudia la hélice de un barco con un modelo a escala 1:10.

(a) Suponiendo que la hélice opera cerca de la superficie, seleccione la velocidad de la hélice del modelo si la velocidad del prototipo es de 600 rpm.

(b) ¿Qué par de torsión se esperaría si en el modelo se mide 1.2 N•m?

6.59 Se estudia el flotador de un hidroavión en un canal de agua que tiene una capacidad de velocidad de 6 m/s. Si el hidroavión debe despegar a 100 m/s, ¿qué escala para el modelo debe seleccionarse?

6.60 Se propone el estudio de un modelo a escala 1:30 de un submarino en un intento por estudiar la influencia de una modificación sugerida en su forma. El prototipo mide 2 m de diámetro y está diseñado para desplazarse a 15 m/s. El modelo se remolca en un tanque de agua a 2 m/s, y se mide una fuerza de arrastre de 2.15 N. ¿Existe similitud en esta prueba? Si es así, calcule la potencia necesaria para el prototipo.

6.61 El humo que sale de las chimeneas de un barco tiene la tendencia de dirigirse hacia la cubierta, por la parte externa de las chimeneas, causando incomodidad a los pasajeros. Este problema se estudia con un modelo a escala 1:20 de una chimenea de 4 m de diámetro. El barco está navegando a 10 m/s. ¿Qué intervalo de velocidades del túnel de viento podría usarse en este estudio?

6.62 Se realiza el estudio de un modelo de un dirigible (globo de gran tamaño que se mueve a través del aire). El dirigible de 10 m de diámetro navega a 20 m/s. Si se proponen un modelo de 40 cm de diámetro para estudiarse en un túnel de viento, o un modelo de 10 cm de diámetro para estudiarse en un canal de agua a 20 ºC, ¿cuál se debe seleccionar? Suponga que el modelo para el túnel de viento se usa con una velocidad de 15 m/s y se mide una fuerza de arrastre de 3.2 N. ¿Qué fuerza debe esperarse en el modelo para el canal de agua con una velocidad de 2.4 m/s en el canal de agua? ¿Qué potencia debe predecirse para vencer el arrastre en el prototipo? Suponga que el flujo es independiente del número de Reynolds para $Re > 10^5$.

6.63 Se realiza el estudio de un modelo de una chimenea de 1000 ft de altura y 45 ft de diámetro instalada en una planta generadora de energía eléctrica. Se sabe que la chimenea está sumergida en una capa límite en el suelo de 1200 ft de espesor. ¿Podría realizarse el estudio en un túnel de viento que produzca una capa límite de 4 ft de espesor?

6.64 Un modelo a escala 1:20 de un avión se prueba en un túnel de viento a 23 ºC. Se usa una velocidad de 200 m/s en el estudio del modelo. Se mide una fuerza de arrastre de 10 N. ¿Qué velocidad y fuerza de arrastre del prototipo simula el estudio si la elevación es:

(a) el nivel del mar?

(b) 5 000 m?

(c) 10 000 m?

6.65 Se prueba un modelo a escala 1:10 de una superficie aerodinámica en un túnel de viento que usa aire del exterior a 0 ºC. La prueba es para simular una velocidad de 250 m/s de un avión a una elevación de 10 000 m. ¿Qué velocidad en el túnel de viento debe usarse? Si una velocidad de 290 m/s y una presión de 80 kPa absoluta se miden en el modelo en una ubicación particular a un ángulo de ataque de 5º, ¿qué velocidad y presión se esperan en el prototipo en la ubicación correspondiente, y cuál es el ángulo de ataque?

6.66 En un canal de agua se prueba un modelo a escala 1:10 de la hélice de un barco. ¿Cuál debe ser la velocidad rotacional del modelo si la velocidad rotacional de la hélice es de 2000 rpm y:

(a) el número de Froude rige el estudio?

(b) el número de Reynolds rige el estudio?

6.67 Se mide un par de torsión de 12 N•m en un modelo a escala 1:10 de un generador eólico grande, con una velocidad de 60 m/s en un túnel de viento. Esto es para simular una velocidad del viento de 15 m/s dado que los efectos viscosos son considerados insignificantes. ¿Qué par de torsión se espera en el prototipo? Si el modelo gira a 500 rpm, ¿qué velocidad angular del prototipo se simula?

6.68 Se efectúa el estudio subacuático de una marsopa, usando un modelo a escala 1:10. Se simula una marsopa que nada a 10 m/s y que hace un movimiento de nado por segundo. ¿Qué velocidad podría usarse en un canal de agua, y para esa velocidad, cuántos movimientos de nado por segundo deben usarse?

6.69 Se usa la prueba de un modelo de un barco para predecir la fuerza de arrastre en un barco, la cual es muy importante en el diseño de barcos. Las pruebas de resistencia (arrastre) en modelos suelen realizarse en un tanque de experimentación. El modelo de un barco (de 1.2 a 2.2 m de largo para un tanque de experimentación pequeño, de 4 a 10 m para uno grande) es remolcado

a una velocidad constante por un carro de remolque propulsado mecánicamente. La resistencia del modelo a velocidad constante es registrada por los instrumentos instalados en el carro. Por lo general, la prueba se realiza a varias velocidades constantes y se obtiene así una curva de resistencia. El coeficiente de arrastre $C_D = V^2A/2$, donde A es el área mojada, es proporcional a l^2. Del análisis dimensional podemos escribir $C_D = f(\text{Re, Fr})$. Como la fuerza de arrastre consiste de dos componentes, un arrastre por fricción y un arrastre por oleaje, escribimos: $C_D = C_f + C_w$. Suponiendo que las dos fuerzas son independientes, podemos considerar que el arrastre por fricción es sólo una función del número de Reynolds y que el arrastre por oleaje es sólo una función del número de Froude; es decir, $C_f = {}_f(\text{Re})$ y $C_w = f(\text{Fr})$. Como no podemos satisfacer la similitud de Re y Fr entre el modelo y el prototipo, usaremos Fr para lograr una similitud dinámica y usar Re para determinar el arrastre por fricción. Por tanto, de los datos de la prueba del modelo podemos calcular

$$(C_D)_m = \left(\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \right)_m = (C_f)_m + (C_w)_m.$$

Suponiendo que la resistencia por fricción en el barco es similar a la de una placa plana, calculamos $(C_f)_m$ a partir de Re_m y una ecuación apropiada. El coeficiente de arrastre por oleaje se determina usando $(C_w)_m = (C_D)_m - (C_f)_m$. Usando $(\text{Fr})_p = (\text{Fr})_m$ para determinar $(C_w)_p = (C_w)_m$ calculamos entonces $(C_f)_p$ a partir de Re_p. Por último, calculamos el coeficiente de arrastre para el prototipo usando $(C_D)_p = (C_f)_p + (C_w)_p$. Los datos de prueba para el modelo se muestran en las tablas P6.69(1) y P6.69(2) siguientes.

Tabla 6.69(1)

Características del modelo	Datos del modelo (escala 1:20)
Área mojada (m^2)	12.205
Longitud del modelo (m)	7.11
Temperatura del agua (°C)	12.6

Tabla P6.69(2) Datos de prueba para el modelo

V(m/s)	F_D (N)
0.805	17.189
0.995	25.49
1.199	35.80
1.399	49.450
1.599	69.66
1.759	92.18
1.899	132.98

Si se usa el prototipo en agua de mar a 19.2 °C, determine lo siguiente:

(a) Usando estos datos, calcule el coeficiente de arrastre del prototipo.

(b) Grafique el coeficiente de arrastre contra Re.

(c) Grafique el coeficiente de arrastre por oleaje contra Fr.

Ecuaciones diferenciales normalizadas

6.70 Normalice la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

usando una velocidad V, longitud l, densidad ρ_0, y tiempo f^{-1}, característicos, donde f es la frecuencia. ¿Qué parámetro adimensional se introduce?

6.71 Normalice la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

usando una velocidad U, longitud l, presión ρU^2, y tiempo f^{-1}, característicos, donde f es la frecuencia. Encuentre cualesquiera parámetros adimensionales que se introduzcan.

6.72 Normalice la ecuación de Euler

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho g\nabla h$$

usando una velocidad U, longitud l, presión ρU^2, y tiempo l/U característicos. Determine cualesquiera parámetros adimensionales introducidos en la ecuación normalizada.

6.73 Un fluido está en reposo entre las placas grandes horizontales mostradas en la figura P6.73. La placa superior recibe de pronto una velocidad U. Demuestre que la ecuación de Navier-Stokes que describe el movimiento resultante se simplifica en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Elimine las dimensiones de esta ecuación usando una velocidad U, longitud h, y tiempo **(a)** h/U y **(b)** h^2/v. Identifique cualesquiera parámetros adimensionales que resulten.

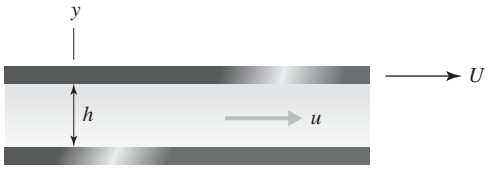


Fig. P6.73

6.74 Un fluido fluye a través de un tubo horizontal de diámetro d (figura P6.74). El flujo aumenta repentinamente a una velocidad promedio V. Demuestre que la ecuación apropiada de Navier-Stokes, usando las coordenadas mostradas, se simplifica en

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Normalice esta ecuación usando la velocidad V, longitud d y tiempo característicos **(a)** d/V y **(b)** d^2/v. Identifique cualesquiera parámetros adimensionales que resulten.

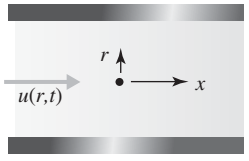


Fig. P6.74

6.75 Un líquido altamente viscoso como la miel fluye por una superficie plana vertical. Su espesor disminuye a medida que baja por la superficie (figura P6.75). Demuestre que el flujo permanente está descrito por

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g$$

donde hemos despreciado la componente y de la velocidad. Normalice esta ecuación usando una longitud h (medida en $x = 0$) y una velocidad V características (la velocidad promedio). Identifique cualesquiera parámetros adimensionales que resulten.

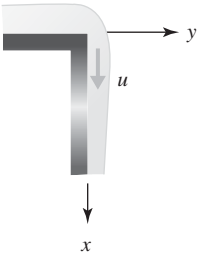


Fig. P6.75

6.76 Elimine las dimensiones de la ecuación de la energía

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = K\nabla^2 T$$

usando una velocidad U, longitud l, y temperatura T_0 características. Exprese el parámetro adimensional que resulte en términos del número de Prandtl

$$\text{Pr} = \mu\frac{c_p}{K}$$

6.77 Elimine las dimensiones de la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento para un flujo compresible

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$$

y la ecuación de la energía

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T - p\nabla\cdot\mathbf{V}$$

usando las cantidades características ρ_0, p_0, T_0, U y l. El tiempo característico es l/U. La velocidad del sonido es $c = \sqrt{kRT_0}$. Encuentre cualesquiera parámetros adimensionales que resulten si $\text{Pr} = \mu c_p/K$.

El oleoducto de Alaska transporta petróleo crudo a grandes distancias a través de varios tipos de terreno. Cuenta con estaciones de bombeo intercaladas en toda su longitud, para superar las pérdidas de presiones debidas a fuerzas viscosas y a cambios de elevación. (U.S. Bureau of Land Management)

7

Flujos internos

Esquema

7.1 Introducción
7.2 Flujo de entrada y flujo desarrollado
7.3 Flujo laminar en un tubo
  7.3.1 Método elemental
  7.3.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes
  7.3.3 Cantidades de flujo en un tubo
7.4 Flujo laminar entre placas paralelas
  7.4.1 Método elemental
  7.4.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes
  7.4.3 Situación de flujo simplificado
7.5 Flujo laminar entre cilindros giratorios
  7.5.1 Método elemental
  7.5.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes
  7.5.3 Flujo con el cilindro externo fijo
7.6 Flujo turbulento en un tubo
  7.6.1 Ecuación diferencial
  7.6.2 Perfil de velocidad
  7.6.3 Pérdidas en flujos desarrollados en tubos
  7.6.4 Pérdidas en conductos no circulares
  7.6.5 Pérdidas menores en flujos en tubos
  7.6.6 Líneas de referencia hidráulica y de energía
  7.6.7 Sistema de tuberías simple con una bomba
7.7 Flujo uniforme turbulento en canales abiertos
7.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Establecer la longitud de la región de entrada para flujos laminares y turbulentos.
- Determinar la solución de flujo laminar para tubos, placas paralelas y cilindros giratorios.
- Presentar las cantidades de interés para flujo turbulento en tubos, con particular interés en las pérdidas.
- Calcular el caudal con una bomba centrífuga en un sistema de tuberías simple.
- Determinar los gastos en canales abiertos.
- Dar numerosos ejemplos y problemas que demuestren las soluciones de la región de entrada y de flujo desarrollado para flujos laminar y turbulento, incluyendo las pérdidas debidas a la fricción en paredes y a varios dispositivos. También se analizan los flujos en un canal abierto.

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiarán los efectos de la viscosidad en un flujo interno e incompresible, flujos que son de particular importancia para ingenieros. El flujo en un tubo circular es indudablemente el flujo de fluido interno más común. Se encuentra en las venas y arterías de un cuerpo, en la red de suministro de agua de ciudades, en sistemas de irrigación de agricultores, en sistemas de tuberías que transportan fluidos en una fábrica, en líneas hidráulicas de una aeronave y en el chorro de tinta de la impresora de una computadora. Los flujos en conductos no circulares y en canales abiertos también deben incluirse en nuestro estudio. En el capítulo 6 se determinó que los efectos viscosos en un flujo resultaron en la introducción del número de Reynolds,

$$\mathrm{Re} = \frac{V\rho l}{\mu} \tag{7.1.1}$$

Se observó que el número de Reynolds era una relación entre la fuerza inercial y la fuerza viscosa. En consecuencia, cuando esta relación es grande, se espera que las fuerzas inerciales puedan dominar a las fuerzas viscosas. Esto suele ser así cuando ocurren cambios geométricos cortos, repentinos; para tramos grandes de tuberías o para canales abiertos, ésta no es la situación. Cuando las áreas superficiales, por ejemplo el área de las paredes de un tubo, son relativamente grandes, los efectos viscosos son muy importantes y deben incluirse en nuestro estudio.

CONCEPTO CLAVE
Cuando las áreas superficiales son relativamente grandes, los efectos viscosos pueden ser importantes.

El flujo interno entre placas paralelas, en un tubo, entre cilindros giratorios, y en un canal abierto se estudiará en detalle. Para un número de Reynolds lo suficientemente bajo (Re < 2000 en un tubo y Re < 1500 en un canal ancho) resulta un flujo laminar, y a un número de Reynolds lo suficientemente alto se presenta un flujo turbulento. Repase la sección 3.3.3 para un análisis más detallado. Consideramos primero un flujo laminar y después uno turbulento.

7.2 FLUJO DE ENTRADA Y FLUJO DESARROLLADO

Flujo laminar desarrollado: *Flujo donde el perfil de la velocidad deja de cambiar en la dirección del flujo.*

Al considerar flujos internos nos interesan principalmente los flujos desarrollados en conductos. Un **flujo laminar desarrollado** resulta cuando el perfil de la velocidad deja de cambiar en la dirección del flujo. Primero concentremos nuestra atención en un flujo laminar. En la *región de entrada* de un flujo laminar, el perfil de la velocidad cambia en la dirección del flujo, como se muestra en la figura 7.1. El flujo idealizado que sale de un depósito empieza en la entrada como un flujo uniforme (en realidad, existe una delgada capa viscosa en la pared, como se ilustra); luego esta capa viscosa de la pared crece a lo largo la *longitud del núcleo inviscido* L_i, hasta que los esfuerzos viscosos dominan toda la sección transversal; el perfil entonces continúa cambiando en la *región de desarrollo del perfil* debido a los efectos viscosos hasta alcanzar un flujo desarrollado. La longitud del núcleo inviscido es de un cuarto a un tercio de la *longitud de entrada* L_E, dependiendo de la geometría del conducto, de la forma del perfil de la velocidad de entrada y del número de Reynolds.

CONCEPTO CLAVE *La longitud del núcleo inviscido en un flujo laminar es de un cuarto a un tercio de la longitud de entrada.*

Para un flujo laminar en un tubo circular con un perfil uniforme en la entrada, la longitud de entrada está dada por

$$\frac{L_E}{D} = 0.065\mathrm{Re} \qquad \mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} \tag{7.2.1}$$

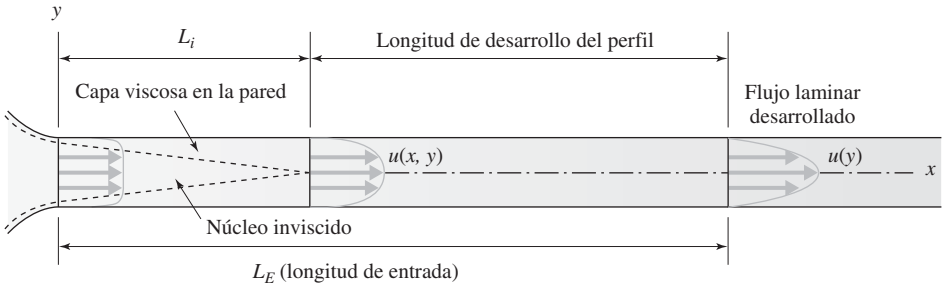


Fig. 7.1 Región de entrada de un flujo laminar en un tubo o en un canal rectangular ancho.

donde el número de Reynolds está basado en la velocidad promedio y en el diámetro. Se ha observado un flujo laminar en un tubo, con números de Reynolds de más de 40 000 para condiciones cuidadosamente controladas en un tubo liso. No obstante, para aplicaciones en ingeniería, un valor de alrededor de 2000 es el número de Reynolds más alto para el cual se asegura un flujo laminar; esto se debe a vibraciones en el tubo, a fluctuaciones en el flujo y/o a elementos rugosos en las paredes del tubo.

Para un flujo laminar en un canal con proporción dimensional alta (la proporción dimensional es el ancho dividido entre la distancia entre las placas superior e inferior) con un perfil uniforme a la entrada, la longitud de entrada es

$$\frac{L_E}{h} = 0.04\text{Re} \qquad \text{Re} = \frac{Vh}{\nu} \tag{7.2.2}$$

donde el número de Reynolds está basado en la velocidad promedio y la distancia h entre las placas. La longitud del núcleo inviscido es aproximadamente de un tercio de la longitud de entrada. No puede existir un flujo laminar a valores mayores de Re = 7700; es frecuente que para situaciones de ingeniería se utilice un valor de 1500 como el límite superior para flujo laminar.

Para un flujo turbulento la situación es ligeramente diferente, como se muestra en la figura 7.2 para el flujo en un tubo. Resulta un flujo desarrollado cuando todas las características del flujo dejan de cambiar en la dirección del flujo; esto incluye detalles de la turbulencia que se introducirán más adelante en este capítulo. El núcleo inviscido existe seguido por la región de desarrollo del perfil de la velocidad, que termina en $x = L_d$. Una longitud adicional es necesaria, no obstante, para que

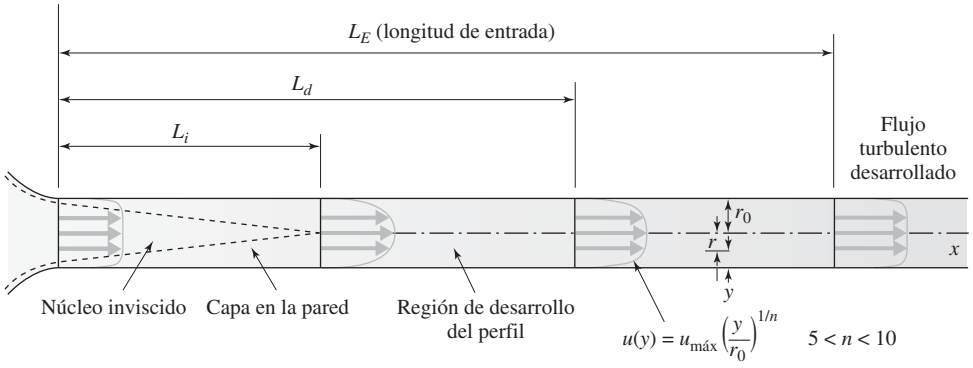


Fig. 7.2 Desarrollo del perfil de la velocidad en un flujo turbulento en tubo.

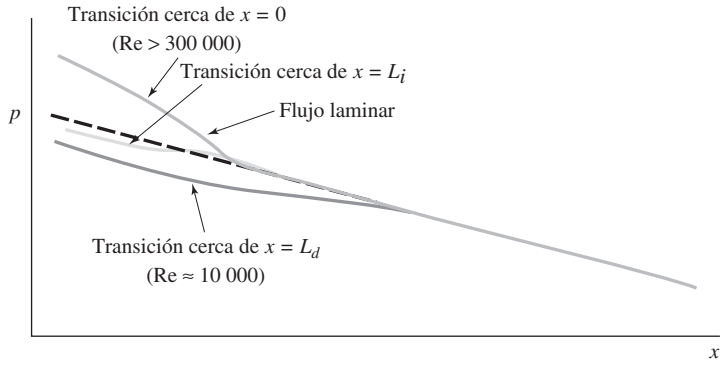


Fig. 7.3 Variación de la presión en un flujo por un tubo horizontal para flujos laminar y turbulento. (Tomada de la tesis de doctorado del Dr. Jack Backus, Michigan State University)

se desarrolle la estructura detallada del flujo turbulento. La estructura detallada es importante en ciertos cálculos como son estimaciones precisas de la transferencia de calor por la pared. Para un flujo con número de Reynolds grande ($\mathrm{Re} > 10^5$) en un tubo, donde las fluctuaciones de la turbulencia inician cerca de $x = 0$, pruebas realizadas han dado

$$\frac{L_i}{D} \simeq 10 \qquad \frac{L_d}{D} \simeq 40 \qquad \frac{L_E}{D} \simeq 120 \tag{7.2.3}$$

CONCEPTO CLAVE *Un flujo turbulento desarrollado resulta cuando todas las características del flujo dejan de cambiar en la dirección del flujo.*

Para un flujo turbulento con Re = 4000 las longitudes de desarrollo previas serían considerablemente más altas, quizá cinco veces mayores que los valores citados. Esto es cierto porque, para flujos turbulentos con Re bajo, la transición a un flujo turbulento ocurre en la región de desarrollo del perfil; por tanto, una gran parte de la región de entrada es laminar con un esfuerzo cortante en la pared relativamente bajo. No se disponen de datos experimentales para un flujo turbulento con número de Reynolds bajo.

CONCEPTO CLAVE *Si la transición a flujo turbulento ocurre cerca del origen, la variación lineal de la presión empieza cerca de L_i.*

En la figura 7.3 se ilustra la variación de la presión. En el flujo más allá de una x lo suficientemente grande se observa que la variación de la presión disminuye linealmente con x. Si la transición a flujo turbulento ocurre cerca del origen, la variación lineal de la presión empieza cerca de L_i y el gradiente de presión [la pendiente de la curva $p(x)$] en la región de entrada es mayor que en la región de flujo de desarrollado; si la transición ocurre cerca de L_d, como lo es para un Re bajo, la variación lineal empieza al final del proceso de transición y el gradiente de presión en la región de entrada es menor que el de flujo desarrollado.

Para un flujo laminar, la variación de la presión se asemeja cualitativamente a la asociada con un número de Reynolds grande. El gradiente de presión es mayor que en la región de flujo desarrollado debido a un esfuerzo cortante más alto en la pared y al creciente flujo de la cantidad de movimiento.

7.3 FLUJO LAMINAR EN UN TUBO

Flujo laminar en un tubo, 686

En esta sección investigamos el flujo laminar incompresible, permanente y desarrollado en un tubo, como se ilustra en la figura 7.4. Se usarán dos métodos: un método elemental y una solución directa de la ecuación de Navier-Stokes apropiada. Ambos desarrollan las mismas ecuaciones, de modo que se puede usar cualquiera de ellos.

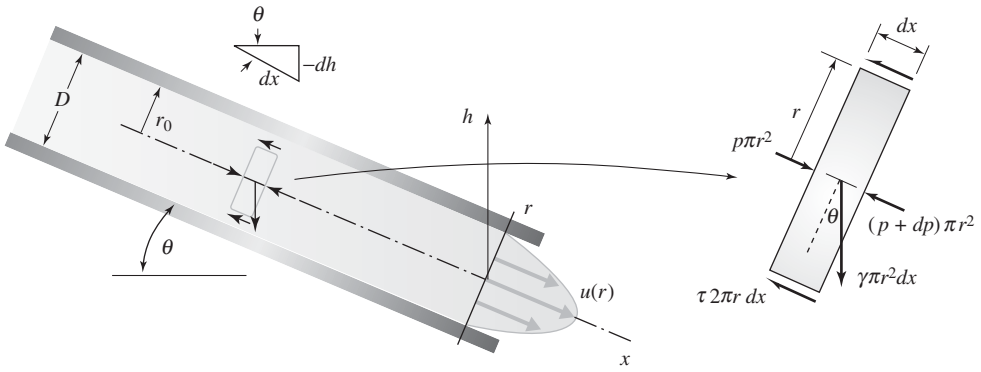


Fig. 7.4 Flujo desarrollado en un tubo circular.

7.3.1 Método elemental

Un volumen elemental del fluido se muestra en la figura 7.4. Este volumen puede ser considerado un volumen de control infinitesimal hacia y desde el cual fluye un fluido, o puede ser considerado una masa de fluido infinitesimal sobre la cual actúan fuerzas. Si se considera un volumen de control, aplicaríamos la ecuación de la cantidad de movimiento (4.5.6); si es una masa de fluido, aplicaríamos la segunda ley de Newton. Como el perfil de la velocidad no cambia en la dirección x, el flujo de la cantidad de movimiento de entrada es igual al flujo de la cantidad de movimiento de salida y la fuerza resultante es cero; como no hay aceleración del elemento de masa, la fuerza resultante también debe ser cero. En consecuencia, un equilibrio de fuerzas en la dirección x da

CONCEPTO CLAVE *Como el perfil de la velocidad no cambia en la dirección x, la fuerza resultante es cero.*

$$p\pi r^2 - (p + dp)\pi r^2 - \tau 2\pi r\, dx + \gamma\pi r^2\, dx \operatorname{sen}\theta = 0 \tag{7.3.1}$$

que se puede simplificar a

$$\tau = -\frac{r}{2}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \tag{7.3.2}$$

donde hemos usado sen $\theta = -dh/dx$, con la dirección vertical denotada por h. Observe que la ecuación 7.3.2 puede aplicarse ya sea a un flujo laminar o a uno turbulento. El esfuerzo cortante[1] en este flujo laminar está relacionado con el gradiente de velocidad y con la viscosidad (vea la ecuación 1.5.5), dando

$$-\mu\frac{du}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \tag{7.3.3}$$

Como $u = u(r)$ para este flujo desarrollado, podemos concluir de lo anterior que $d/dx(p + \gamma h)$ debe ser cuando mucho una constante; no puede depender de x, y de estática de fluidos $(p + \gamma h)$ no depende de x porque no hay aceleración en la dirección radial. La ecuación (7.3.3) puede integrarse entonces para dar la distribución de la velocidad,

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) + A \tag{7.3.4}$$

[1]El esfuerzo cortante se considera como una cantidad positiva, como se ilustra en la figura 7.4. El signo menos en $\tau = -\mu\, du/dr$ es necesario puesto que du/dr es negativa.

donde A es una constante de integración. Usando $u = 0$ en $r = r_0$, podemos evaluar A y hallar que la distribución de la velocidad es

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(r^2 - r_0^2) \tag{7.3.5}$$

Flujo de Poiseuille: *Flujo laminar con perfil parabólico en un tubo o entre placas paralelas.*

un perfil parabólico. Con frecuencia se menciona como **flujo de Poiseuille**, en honor de Jean L. Poiseuille (1799-1869).

El resultado precedente también se puede obtener al integrar la ecuación de Navier-Stokes apropiada, como se ilustra en la siguiente sección. Si este ejercicio no es de interés, pase a la sección 7.3.3.

7.3.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para un flujo desarrollado en un tubo circular, las líneas de corriente son paralelas a la pared, sin remolinos, de modo que $v_r = v_\theta = 0$ y $u = u(r)$ únicamente. Haciendo referencia a las ecuaciones de la cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas de la tabla 5.1 (observe que $u = \upsilon_z$ y la coordenada z ha sido sustituida por x), la ecuación de Navier-Stokes de la componente x es

$$\underset{\text{permanente}}{\cancel{\rho\frac{\partial u}{\partial t}}} + \rho\Big(\underset{\substack{\text{Líneas de corriente paralelas} \\ \parallel \text{ a la pared}}}{\cancel{v_r}\frac{\partial u}{\partial r}} + \underset{\substack{\text{sin} \\ \text{remolinos}}}{\cancel{\frac{v_\theta}{r}}\frac{\partial u}{\partial \theta}} + u\underset{\substack{\text{flujo} \\ \text{desarrollado}}}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta + \mu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \underset{\substack{\text{flujo} \\ \text{simétrico}}}{\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}} + \underset{\substack{\text{flujo} \\ \text{desarrollado}}}{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}\Big) \tag{7.3.6}$$

CONCEPTO CLAVE *Una partícula individual no acelera aun cuando u = u(r).*

Observe que no hay aceleración (el lado izquierdo es cero) de las partículas de fluido conforme se mueven por el tubo. La ecuación (7.3.6) se simplifica a, usando $\operatorname{sen}\theta = -dh/dx$ (vea la figura 7.4),

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\Big(p + \gamma h\Big) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) \tag{7.3.7}$$

donde los primeros dos términos entre paréntesis del lado derecho de la ecuación 7.3.6 se han combinado. Vemos que el lado izquierdo es cuando mucho una función de x y que el lado derecho es cuando mucho una función de r. Como x y r se pueden hacer variar de manera independiente, debemos tener

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{du}{dr}\Big) = \lambda \tag{7.3.8}$$

CONCEPTO CLAVE
Usamos derivadas ordinarias porque u depende sólo de una variable.

donde λ es una constante[2] y hemos usado derivadas ordinarias porque u depende sólo de una variable r. Multiplique ambos lados por r e integre:

[2]Si λ fuera una función de x, u dependería de x, lo cual no es aceptable para este flujo desarrollado. Si λ fuera una función de r, $p + \gamma h$ dependería de r, lo cual también es inaceptable. De aquí que cuando mucho es una constante.

$$r\frac{du}{dr} = \frac{\lambda}{2}r^2 + A \tag{7.3.9}$$

Divida ambos lados entre r e integre:

$$u(r) = \frac{\lambda}{4}r^2 + A\ln r + B \tag{7.3.10}$$

La velocidad debe permanecer finita en $r = 0$; por tanto, $A = 0$. También, en $r = r_0$, $u = 0$; entonces B puede evaluarse y tenemos

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{\lambda}{4}(r^2 - r_0^2) \\ &= \frac{1}{4\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h)(r^2 - r_0^2) \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

donde hemos usado λ como el lado izquierdo de la ecuación 7.3.7. Ésta es la distribución parabólica de la velocidad para el flujo en un tubo, con frecuencia conocido como *flujo de Poiseuille.*

7.3.3 Cantidades de flujo en un tubo

Para flujo permanente, laminar y desarrollado en un tubo circular, se ha demostrado que la distribución de la velocidad es

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(r^2 - r_0^2) \tag{7.3.12}$$

Se ha determinado que la velocidad promedio V es

$$\begin{aligned} V = \frac{Q}{A} &= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} u(r)\,2\pi r\,dr \\ &= \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}\frac{1}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(r^2 - r_0^2)r\,dr = -\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

O bien, expresando la caída de presión Δp en términos de la velocidad promedio, tenemos, para un tubo horizontal,[3]

$$\Delta p = \frac{8\mu VL}{r_0^2} \tag{7.3.14}$$

donde hemos usado $\Delta p/L = -dp/dx$ porque dp/dx es una constante para un flujo desarrollado. Observe que la caída de presión es una cantidad positiva, mientras que el gradiente de presión es negativo.

CONCEPTO CLAVE *La caída de presión es una cantidad positiva, mientras que el gradiente de presión es negativo.*

[3]Para un tubo sobre un plano inclinado, simplemente reemplace p con $(p + \gamma h)$.

La velocidad máxima en $r = 0$ de la ecuación 7.3.12 es

$$u_{\text{máx}} = -\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \tag{7.3.15}$$

de modo que (vea la ecuación 7.3.13)

$$V = \frac{1}{2}u_{\text{máx}} \tag{7.3.16}$$

El esfuerzo cortante se determina que es

$$\begin{aligned}\tau &= -\mu\frac{du}{dr} \\ &= -\frac{r}{2}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

Haciendo $\tau = \tau_0$ en $r = r_0$, vemos que la caída de presión Δp en una longitud L de una sección horizontal de tubo es

$$\Delta p = \frac{2\tau_0 L}{r_0} \tag{7.3.18}$$

donde otra vez hemos usado $dp/dx = -\Delta p/L$.

Factor de fricción: *Cortante adimensional en la pared válido para flujo laminar y turbulento.*

Si introducimos el **factor de fricción** f, una cantidad de interés sustancial en flujo en tubos, que es un cortante adimensional en la pared, definido por

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} \tag{7.3.19}$$

vemos que

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.3.20}$$

donde h_L es la pérdida de carga (vea la ecuación 4.5.17) con dimensión de longitud. Esta ecuación se cita con frecuencia como la *ecuación de Darcy-Weisbach*,[4] llamada así en honor de Henri P. G. Darcy (1803-1858) y Julius Weisbach (1806-1871). Combinando las ecuaciones 7.3.14 y la 7.3.20, encontramos que

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \tag{7.3.21}$$

para flujo laminar en un tubo. Sustituyendo esto otra vez en la ecuación 7.3.20, vemos que

$$h_L = \frac{32\mu LV}{\gamma D^2} \tag{7.3.22}$$

CONCEPTO CLAVE *La pérdida de carga es directamente proporcional a la velocidad promedio en un flujo laminar.*

La pérdida de carga es directamente proporcional a la velocidad promedio (y por tanto también a la descarga) a la primera potencia, un resultado que generalmente se aplica en flujos desarrollados, laminares, en conductos, incluyendo conductos de formas diferentes a circulares.

[4]Se demostrará que esta ecuación es válida para flujos tanto laminar como turbulento.

Ejemplo 7.1

Un tubo horizontal de diámetro pequeño está conectado a un depósito de abastecimiento como se muestra en la figura E7.1. Si se capturan 6600 mm^3 a la salida en 10 s, estime la viscosidad del agua.

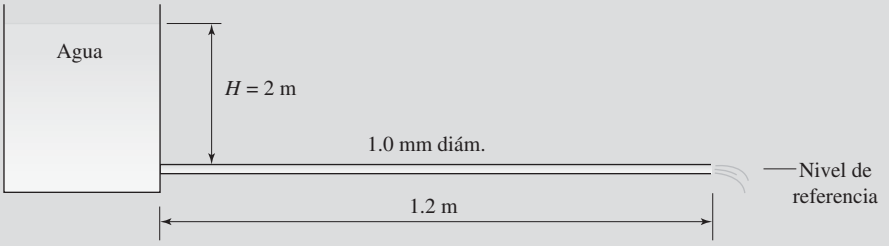


Fig. E7.1

Solución

El tubo es muy pequeño, de modo que esperamos que los efectos viscosos limiten la velocidad a un valor pequeño. Usando la ecuación de Bernoulli de la superficie a la entrada del tubo, y despreciando la carga de velocidad, tenemos, haciendo que 0 sea un punto en la superficie,

$$\frac{\cancel{p_0}^{\,0}}{\gamma} + H = \frac{\cancel{V^2}^{\,0}}{2g} + \frac{p}{\gamma}$$

donde hemos usado presión manométrica con $p_0 = 0$. Esto se convierte, suponiendo que $V^2/2g \cong 0$ a la entrada del tubo

$$p = \gamma H = 9800 \times 2 = 19\,600 \text{ Pa}$$

A la salida del tubo la presión es cero; por tanto,

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{19\,600}{1.2} = 16\,300 \text{ Pa/m (N/m}^3\text{)}$$

Se encuentra que la velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{6600 \times 10^{-9}/10}{\pi \times 0.001^2/4} = 0.840 \text{ m/s}$$

Verifique para asegurar que la carga de velocidad sea insignificante: $V^2/2g = 0.036$ m en comparación con $p/\gamma = 2$ m, de modo que la suposición de una insignificante carga de velocidad es válida y nuestro cálculo de la presión es aceptable. Usando la ecuación 7.3.14, podemos hallar que la viscosidad de este supuesto flujo laminar es

$$\mu = \frac{r_0^2}{8V}\frac{\Delta p}{L} = \frac{0.0005^2 \text{ m}^2}{8 \times 0.84 \text{ m/s}}(16\,300 \text{ N/m}^3) = 6.06 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$$

Debemos obtener el número de Reynolds para determinar si nuestra suposición de un flujo laminar es aceptable. Es

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.84 \text{ m/s} \times 0.001\text{m}}{6.06 \times 10^{-4}\text{N}\cdot\text{s/m}^2} = 1390$$

En donde usamos kg/m^3 = N·s^2/m^4. Éste es obviamente un flujo laminar porque Re < 2000, de modo que los cálculos son válidos siempre que la longitud de entrada no sea demasiado larga. Es

$$L_E = 0.065 \text{ Re} \times D = 0.065 \times 1390 \times 0.001 = 0.09 \text{ m}$$

Esto es aproximadamente 8% de la longitud total, una cantidad lo suficientemente pequeña; por tanto, se supone que los cálculos son confiables.

Ejemplo 7.2

Deduzca una expresión para la distribución de la velocidad entre tubos horizontales concéntricos, para un flujo desarrollado permanente e incompresible (Fig. E7.2).

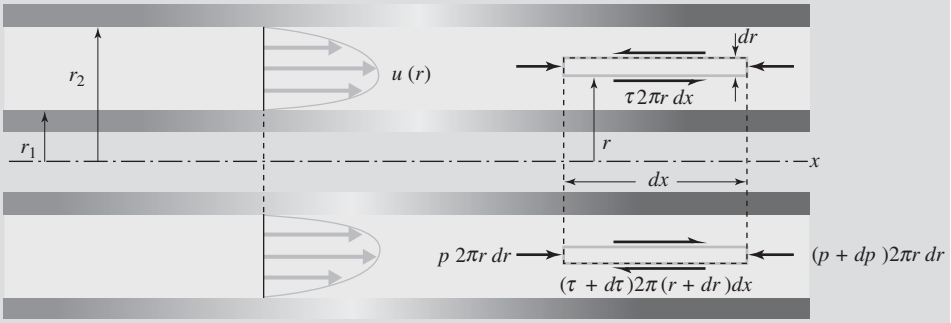


Fig. E7.2

Solución

Usemos un método elemental. El elemento es un casco cilíndrico hueco como se muestra en la figura. Si sumamos fuerzas, obtenemos

$$p2\pi r\,dr - (p + dp)2\pi r\,dr + \tau\,2\pi r\,dx - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)\,dx = 0$$

Simplificando, resulta, despreciando el término de magnitud diferencial,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\tau}{r} - \frac{d\tau}{dr} - \underbrace{\frac{d\tau}{r}}_{\text{desprecie}}$$

Sustituyendo $\tau = -\mu\, du/dr$ (du/dr es negativa cerca de la pared externa donde el elemento está trazado) tenemos

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2}\right)$$

$$= \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

Multiplique ambos lados por rdr y divida entre μ, luego integre:

$$r\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + A$$

Multiplique ambos lados por dr/r e integre otra vez:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + A\ln r + B$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Se encuentran haciendo $u = 0$ en $r = r_1$ y en $r = r_2$; esto es,

$$0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r_1^2 + A\ln r_1 + B$$

$$0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r_2^2 + A\ln r_2 + B$$

Despeje A y B

$$A = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$B = -A \ln r_2 - \frac{r_2^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

Entonces

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[r^2 - r_2^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_1/r_2)}\ln(r/r_2)\right]$$

Esto se integra para dar el caudal:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{r_1}^{r_2} u(r) 2\pi r \, dr \\ &= -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dx}\left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)}\right] \end{aligned}$$

Cuando $r_1 \to 0$ la distribución de la velocidad se aproxima a la distribución parabólica de flujo en un tubo. Cuando $r_1 \to r_2$ esta distribución se aproxima a la del flujo entre placas paralelas. Estas dos conclusiones no son obvias y se presentan como un problema al final de este capítulo.

7.4 FLUJO LAMINAR ENTRE PLACAS PARALELAS

Considere el flujo desarrollado, permanente e incompresible de un fluido entre placas paralelas, con la placa superior moviéndose con velocidad U, como se muestra en la figura 7.5. Se deducirá la distribución de la velocidad mediante dos métodos; cualquiera de ellos puede usarse.

7.4.1 Método elemental

Considere un volumen elemental de profundidad unitaria en la dirección z, como se muestra en la figura 7.5. Si sumamos fuerzas en la dirección x, podemos escribir

$$p\,dy - (p + dp)\,dy - \tau\,dx + (\tau + d\tau)\,dx + \gamma\,dx\,dy \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (7.4.1)$$

La suma de fuerzas se iguala a 0 porque no hay aceleración. Se supone que la presión depende sólo de x; se supone que la variación con y es insignificante porque la dimensión a es muy pequeña para la mayoría de aplicaciones. Después de dividir entre $dx\,dy$, lo anterior se simplifica a

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dx} - \gamma \operatorname{sen}\theta \qquad (7.4.2)$$

Como éste es un flujo en una dimensión, el esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} \qquad (7.4.3)$$

El elemento se traza cerca de la placa inferior donde $du/dy > 0$.

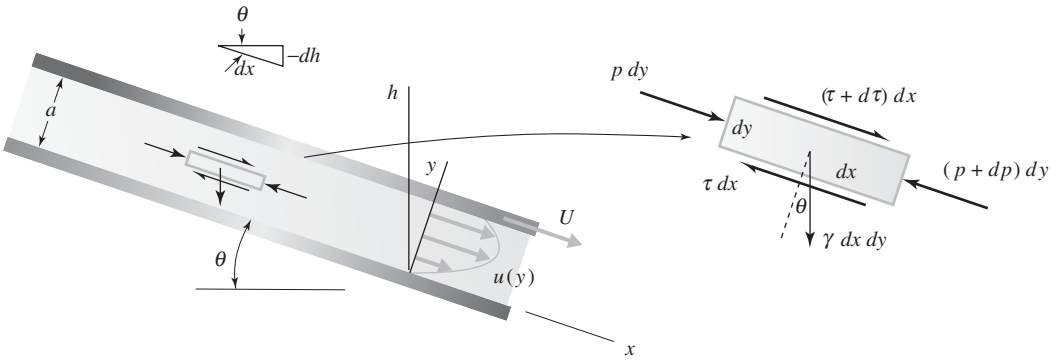


Fig. 7.5 Flujo desarrollado entre placas paralelas.

Usando esto y $\operatorname{sen}\theta = -dh/dx$, resulta

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} + \gamma \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(p + \gamma h) \tag{7.4.4}$$

Como $u = u(y)$ para este flujo desarrollado, el lado izquierdo es sólo una función de y; en vista de que el lado derecho es una función de x concluimos que debe ser una constante. Por tanto, se puede integrar dos veces para obtener (primero, divida entre μ)

$$u(y) = \frac{y^2}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) + Ay + B \tag{7.4.5}$$

donde A y B son constantes de integración. Si requerimos que $u = 0$ en $y = 0$ y $u = U$ en $y = a$, tenemos

$$A = \frac{U}{a} - \frac{a}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \quad \text{y} \qquad B = 0 \tag{7.4.6}$$

Entonces la distribución de la velocidad es la parábola

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h)(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y \tag{7.4.7}$$

Flujo de Couette: *Flujo con un perfil lineal que resulta sólo del movimiento de la placa.*

Si el movimiento se debe sólo al movimiento de la placa (un perfil lineal), el flujo recibe el nombre de **flujo de Couette**; si el movimiento se debe sólo al gradiente de presión, es decir, $U = 0$, se denomina flujo de Poiseuille.

En vez de sumar fuerzas en un elemento podemos integrar la ecuación de Navier-Stokes apropiada, como sigue. Si este ejercicio no es de su interés, pase a la sección 7.4.3.

7.4.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para un flujo desarrollado entre placas paralelas, las líneas de corriente son paralelas a las placas de modo que $u = u(y)$ únicamente y $v = w = 0$. La ecuación de Navier-Stokes para la dirección x es (vea la ecuación 5.3.14)

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\text{permanente}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\text{flujo desarrollado}} + \cancel{v}^{0}\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w}^{0}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{\text{flujo desarrollado}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{\text{canal ancho}}\right) + \gamma \operatorname{sen}\theta \tag{7.4.8}$$

Si las placas paralelas son la parte superior y el fondo de un canal, el canal debe ser ancho; al análisis se aplica entonces a la sección media alejada de las paredes laterales. La ecuación 7.4.8 se reduce a, usando sen $\theta = -dh/dx$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \tag{7.4.9}$$

El lado izquierdo es cuando mucho una función de y, y el lado derecho es cuando mucho una función de x. Por tanto, debemos tener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda \tag{7.4.10}$$

donde λ es una constante, porque x y y son variables independientes. Esto puede integrarse dos veces para obtener

$$u(y) = \frac{\lambda}{2}y^2 + Ay + B \tag{7.4.11}$$

donde A y B son constantes de integración arbitrarias. Se requiere que $u = 0$ en $y = 0$ y $u = U$ en $y = a$. Esto da

$$A = \frac{U}{a} - \frac{\lambda a}{2} \quad \text{y} \quad B = 0 \tag{7.4.12}$$

Usando estas constantes, podemos escribir la ecuación 7.4.11 como

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{\lambda}{2}(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y \\ &= \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h)(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

donde hemos usado λ como el lado derecho de la ecuación 7.4.9. Si el flujo se debe sólo al movimiento de la placa (un perfil lineal), el flujo se denomina *flujo de Couette*; si el movimiento se debe sólo al gradiente de presión, es decir, $U = 0$, es flujo de Poiseuille.

7.4.3 Situación de flujo simplificado

Usando los resultados deducidos antes, podemos escribir la expresión para la distribución de la velocidad entre placas fijas (sea $U = 0$) como

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(y^2 - ay) \tag{7.4.14}$$

Con el uso de esta distribución, podemos hallar que el caudal por ancho unitario es

$$\begin{aligned} Q &= \int u\, dA \\ &= \int_0^a \frac{1}{2\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(y^2 - ay)\, dy = -\frac{a^3}{12\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

La velocidad promedio V se encuentra que es

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{a \times 1} \\ &= -\frac{a^2}{12\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

Esto puede expresarse como la caída de presión en términos de la velocidad promedio; para un canal horizontal[5] tenemos

$$\Delta p = \frac{12\mu VL}{a^2} \tag{7.4.17}$$

donde hemos usado $\Delta p/L = -dp/dx$ ya que dp/dx es constante para flujo desarrollado.

Observe que la velocidad máxima ocurre en $y = a/2$ y de la ecuación 7.4.14 es

$$u_{\text{máx}} = -\frac{a^2}{8\mu}\frac{dp}{dx} \tag{7.4.18}$$

Entonces la velocidad promedio está relacionado con la velocidad máxima por

$$V = \frac{2}{3}u_{\text{máx}} \tag{7.4.19}$$

[5]Para placas sobre un plano inclinado, simplemente sustituya p con $(p + \gamma h)$.

Se encuentra que el esfuerzo de cortante es

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(2y - a) \tag{7.4.20}$$

En la pared, donde $y = 0$, resulta

$$\tau_0 = -\frac{a}{2}\frac{dp}{dx} \tag{7.4.21}$$

La caída de presión Δp a lo largo de una longitud L de canal horizontal se encuentra que es

$$\Delta p = \frac{2\tau_0}{a} L \tag{7.4.22}$$

reconociendo que $dp/dx = -\Delta p/L$. Esto puede expresarse en una forma más conveniente como

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = f\frac{L}{2a}\frac{V^2}{2g} \tag{7.4.23}$$

si introducimos el factor de fricción f, definido por

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} \tag{7.4.24}$$

En términos de la pérdida de carga (vea la ecuación 4.5.17), la ecuación 7.4.23 se convierte en

$$h_L = f\frac{L}{2a}\frac{V^2}{2g} \tag{7.4.25}$$

Si combinamos las ecuaciones 7.4.17, 7.4.21 y 7.4.24, encontramos que

$$f = \frac{8}{\rho V^2}\left(-\frac{a}{2}\frac{dp}{dx}\right) = \frac{8}{\rho V^2}\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{12\mu V}{a^2}\right) = \frac{48\mu}{\rho a V} = \frac{48}{\mathrm{Re}} \tag{7.4.26}$$

donde se ha introducido el número de Reynolds $\mathrm{Re} = \rho a V/\mu$. Si esto se sustituye en la ecuación 7.4.25, vemos que

$$h_L = \frac{12\mu L V}{r a^2} \tag{7.4.27}$$

La pérdida de carga es directamente proporcional a la velocidad promedio, una conclusión que es válida para flujos laminares, en general.

Hemos calculado la mayoría de las cantidades de interés para el flujo laminar de un flujo permanente e incompresible entre placas paralelas. Esto, por supuesto, sería una aproximación aceptable para un canal ancho, uno para el cual el ancho excede la altura en al menos un factor de 8. Para canales con proporciones dimensionales más pequeñas, los efectos de borde se vuelven importantes y deben ser considerados para agregar un esfuerzo cortante adicional a los lados del elemento en la figura 7.5, o al mantener $\partial^2 u/\partial z^2$ en la ecuación 7.4.8. La solución está fuera del alcance de este libro.

CONCEPTO CLAVE *Un canal ancho es uno en el que su ancho excede su altura por lo menos en un factor de 8.*

Ejemplo 7.3

Agua a 60 ºF fluye con un número de Reynolds de 1500 entre las placas horizontales de 20 pulgadas de ancho que se muestran en la figura E7.3. Calcule (a) el caudal, (b) el esfuerzo cortante en la pared, (c) la caída de presión a lo largo de 10 ft y (d) la velocidad en $y = 0.2$ pulgadas.

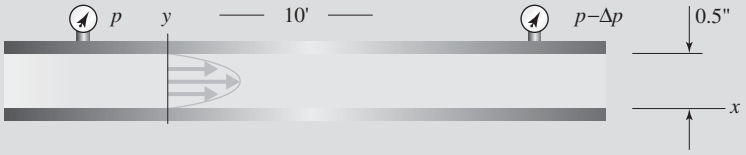


Fig. E7.3

Solución

Como el número de Reynolds es 1500, se supone que son aplicables las ecuaciones para flujo laminar.

(a) Usando la definición del número de Reynolds, la velocidad promedio se encuentra como sigue:

$$1500 = \frac{Va}{\nu}$$

$$\therefore V = \frac{1500\nu}{a} = \frac{1500 \times 1.22 \times 10^{-5}}{0.5/12} = 0.439 \text{ ft/s}$$

Entonces

$$Q = VA = 0.439 \times \frac{0.5 \times 20}{144} = 0.0305 \text{ ft}^3/\text{s}$$

(b) Usando la ecuación 7.4.17; el gradiente de presión es

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{12\mu V}{a^2} = \frac{12 \times 2.36 \times 10^{-5} \text{ lb} - \text{s/ft}^2 \times 0.439 \text{ ft/s}}{(0.5/12)^2 \text{ ft}^2} = 0.0716 \text{ psf/ft}$$

El esfuerzo cortante en la pared se encuentra, usando la ecuación 7.4.22, que es

$$\tau_0 = \frac{a}{2}\frac{\Delta p}{L} = \frac{0.5/12}{2} \times 0.0716 = 0.00149 \text{ psf}$$

(c) La caída de presión a lo largo de 10 ft se encuentra que es

$$\Delta p = 0.0716L = 0.0716 \times 10 = 0.716 \text{ psf}$$

(d) La distribución de la velocidad de la ecuación 7.4.14 es

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - ay)$$

$$= \frac{1}{2 \times 2.36 \times 10^{-5}}(-0.0716)\left(y^2 - \frac{0.5}{12}y\right) = -1517(y^2 - 0.0417y)$$

donde hemos usado $dp/dx = -\Delta p/L$. En $y = 0.2$ pulgadas, la velocidad es

$$u = -1517\left[\left(\frac{0.2}{12}\right)^2 - 0.0417 \times \frac{0.2}{12}\right] = 0.633 \text{ ft/s}$$

Hemos usado tres dígitos significativos porque se suponen conocidas las propiedades del fluido con tres dígitos significativos.

Ejemplo 7.4

Encuentre una expresión para el gradiente de presión entre dos placas paralelas que resulte en un esfuerzo cortante cero en la pared inferior, donde $y = 0$; también, haga un bosquejo de los perfiles de la velocidad para una velocidad de U de la placa superior con varios gradientes de presión. Suponga que se trata de placas horizontales.

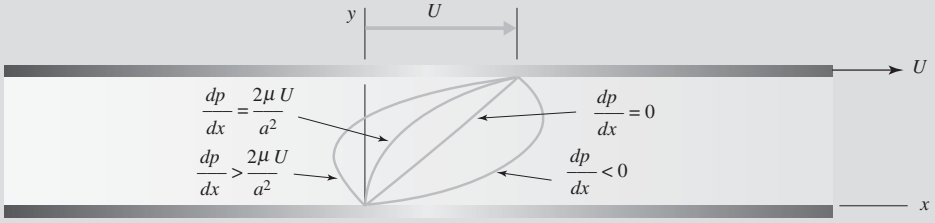


Fig. E.7.4

Solución

La distribución de la velocidad para placas con la placa superior moviéndose a una velocidad U está dada por la ecuación 7.4.17. Si hacemos $dh/dx = 0$, tenemos

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y$$

El esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(2y - a) + \mu\frac{U}{a}$$

Si $\tau = 0$ en $y = 0$, entonces $du/dy = 0$ en $y = 0$ y el gradiente de presión es

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\mu U}{a^2}$$

Si dp/dx es mayor que este valor, la pendiente du/dy en $y = 0$ es negativa y por tanto la velocidad u será negativa cerca de $y = 0$. Si $dp/dx = 0$, observamos que resulta una distribución lineal de la velocidad, es decir,

$$u(y) = \frac{U}{a}y$$

Si dp/dx es negativa, $u(y)$ es mayor en cada ubicación y que la distribución lineal porque $(y^2 - ay)$ es una cantidad negativa para todas las y de interés.

Todos los resultados anteriores se pueden mostrar cualitativamente en un bosquejo de $u(y)$ para varias dp/dx, como se muestra en la figura E7.4.

7.5 FLUJO LAMINAR ENTRE CILINDROS GIRATORIOS

Flujo entre cilindros, 735

CONCEPTO CLAVE *La solución de un flujo laminar será válida hasta un número de Reynolds de 1700.*

Un flujo completamente desarrollado y permanente entre cilindros giratorios concéntricos, como se muestra en la figura 7.6, es otro flujo que da una solución un tanto simple. Tiene una particular aplicación en el campo de la lubricación, donde el fluido puede ser aceite y el cilindro interno un eje giratorio. De nuevo usaremos dos métodos para hallar la distribución de la velocidad. La solución para flujo laminar que encontraremos será válida hasta un número de Reynolds[6] de 1700, siempre que la velocidad angular del cilindro externo $\omega_2 = 0$, como a menudo es el caso. Arriba de Re = 1700, puede desarrollarse un flujo laminar secundario (un flujo con una distribución de velocidad diferente), y con el tiempo se forma un flujo turbulento. De hecho, se han observado numerosos flujos laminares (todos diferentes) para Re > 1700.

7.5.1 Método elemental

En esta deducción no prestaremos atención a las fuerzas de cuerpo, o se supondrá que los cilindros son verticales. Como la presión no varía con θ, se usará un elemento en forma de casco cilíndrico delgado, como se muestra en la figura 7.6b. El par de torsión resultante que actúa sobre este elemento es cero porque no tiene aceleración angular; esto se expresa como

$$\tau 2\pi r L \times r - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)L \times (r + dr) = 0 \tag{7.5.1}$$

donde L, la longitud de los cilindros, debe ser grande respecto al ancho del espacio libre $(r_2 - r_1)$ para evitar los efectos de extremo tridimensionales. La ecuación 7.5.1 se reduce a (despreciando los tres términos de orden superior que tienden a cero cuando $dr \to 0$)

$$2\tau + r\frac{d\tau}{dr} = 0 \tag{7.5.2}$$

La ecuación constitutiva unidimensional (vea la tabla 5.1), reconociendo que $\tau = -\tau_{r\theta}$, da el esfuerzo cortante:

$$\tau = -\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{7.5.3}$$

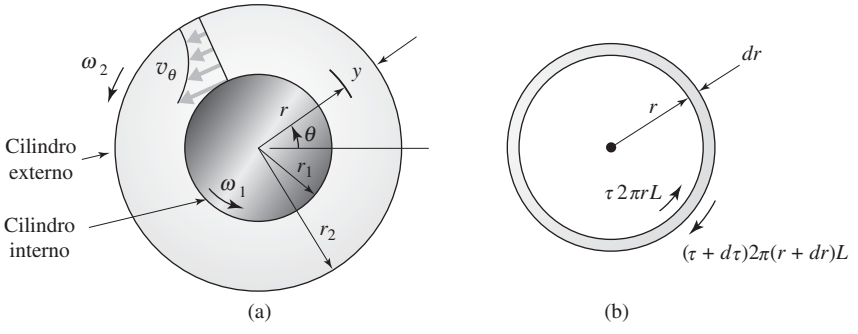


Fig. 7.6 Flujo entre cilindros concéntricos: (a) variables de flujo básicas; (b) elemento de entre los cilindros.

[6]El número de Reynolds se define como $\mathrm{Re} = \omega_1 r_1 \delta/\nu$, donde $\delta = r_2 - r_1$.

De donde resulta

$$-2\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) - r\mu \frac{d}{dr}\left[r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] = 0 \tag{7.5.4}$$

Divida entre μr, multiplique por dr, e integre para hallar

$$2\frac{v_\theta}{r} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = A \tag{7.5.5}$$

Esto puede reacomodarse como $\left[\text{ejecute la derivación: } \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2}\right]$

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = A \tag{7.5.6}$$

o bien,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta) = A \tag{7.5.7}$$

Multiplique por $r\,dr$ e integre otra vez para hallar que

$$v_\theta(r) = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} \tag{7.5.8}$$

Las condiciones en la frontera son $v_\theta = r_1\omega_1$ en $r = r_1$ y $v_\theta = r_2\omega_2$ en $r = r_2$. Estas condiciones permiten que las constantes sean evaluadas como

$$A = 2\frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad B = \frac{r_1^2 r_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.9}$$

Podemos obtener el mismo resultado al integrar la ecuación de Navier-Stokes apropiada, o si eso no es de su interés, pase directamente a la sección 7.5.3.

7.5.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para flujo laminar permanente entre cilindros concéntricos suponemos que las líneas de corriente son circulares, de modo que $v_r = v_z = 0$, $v_\theta = v_\theta(r)$ únicamente, y $\partial p/\partial\theta = 0$. La componente θ de la ecuación de Navier-Stokes de la tabla 5.1 es

$$\begin{aligned}
&\text{permanente } 0 \quad \text{flujo simétrico} \quad 0 \quad 0\\
&\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right)\\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right]\\
&\quad 0 \qquad\qquad \text{flujo simétrico} \quad \text{cilindros largos} \quad \text{flujo simétrico}
\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

Esto se reduce a

$$0 = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \tag{7.5.11}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = 0 \tag{7.5.12}$$

Integrando una vez, resulta

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = A \tag{7.5.13}$$

o bien,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\theta) = A \tag{7.5.14}$$

Una segunda integración produce

$$v_\theta = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r} \tag{7.5.15}$$

Aplicando las condiciones límites $v_\theta = r_1\omega_1$ en $r = r_1$, y $v_\theta = r_2\omega_2$ en $r = r_2$, encontramos que

$$A = 2\,\frac{r_2^2\omega_2 - r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \qquad B = \frac{r_1^2 r_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.16}$$

7.5.3 Flujo con el cilindro externo fijo

Para varias situaciones, por ejemplo la de un eje que gira en un cojinete, el cilindro externo está fijo. Haciendo $\omega_2 = 0$, la distribución de la velocidad es

$$v_\theta = \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right) \tag{7.5.17}$$

El esfuerzo cortante τ_1 sobre el cilindro interno (vea la tabla 5.1 y haga $\tau = -\tau_{r\theta}$) se encuentra que es

$$\tau_1 = -\left[\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]_{r=r_1}$$
$$= \mu \frac{2}{r_1^2} \frac{r_1^2 r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{2\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.18}$$

El par de torsión T necesario para hacer girar el cilindro interno de longitud L es

$$T = \tau_1 A_1 r_1$$
$$= \frac{2\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} 2\pi r_1 L r_1 = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.19}$$

La potencia $\dot{W}$ necesaria para hacer girar el eje se encuentra al multiplicar el par de torsión por la velocidad rotacional ω_1; es

CONCEPTO CLAVE *La potencia se encuentra multiplicando el par de torsión por la velocidad rotacional.*

$$\dot{W} = T\omega_1$$
$$= \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L \omega_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.20}$$

Esta potencia es necesaria para vencer la resistencia de la viscosidad y resulta en un aumento en la energía interna y por tanto en un aumento en la temperatura del fluido. La remoción de esta energía del fluido con frecuencia requiere intercambiadores de calor especiales.

Ejemplo 7.5

Estime la viscosidad de un aceite contenido en el anillo entre dos cilindros de 25 cm de largo, como se muestra en la figura 7.6. El cilindro externo estacionario tiene 8 cm de diámetro. El cilindro interno de 7.8 cm de diámetro gira a 3800 rpm cuando se aplica un par de torsión de 0.12 N·m. La gravedad específica del aceite es 0.85. Desprecie cualquier par de torsión generado por los extremos del cilindro.

Solución

Suponiendo que el número de Reynolds es menor que 1700, la ecuación 7.5.19 da

$$\mu = \frac{T(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi r_1^2 r_2^2 L \omega_1}$$
$$= \frac{0.12\ \text{N·m}(0.04^2 - 0.039^2)\ \text{m}^2}{4\pi \times 0.04^2\ \text{m}^2 \times 0.039^2\ \text{m}^2 \times 0.25\ \text{m} \times (3800 \times 2\pi/60)\ \text{rad/s}} = 0.00312\ \text{N·s/m}^2$$

Verifique el número de Reynolds usando $\nu = \mu/\rho$:

$$\text{Re} = \frac{\omega_1 r_1 \delta}{\nu} = \frac{(3800 \times 2\pi/60)\ \text{rad/s} \times 0.039\ \text{m} \times 0.002/2\ \text{m}}{0.0013/(1000 \times 0.85)\text{m}^2/\text{s}} = 845$$

Esto es menor que 1700, de modo que el cálculo es aceptable.

Ejemplo 7.5a Celdas de Taylor, 24

Ejemplo 7.6

Demuestre que cuando el radio del cilindro interno de la figura E7.6 tiende al radio del cilindro externo, la distribución de la velocidad se aproxima a la distribución lineal entre placas paralelas con una placa móvil y un gradiente de presión cero. Éste es un flujo de Couette.

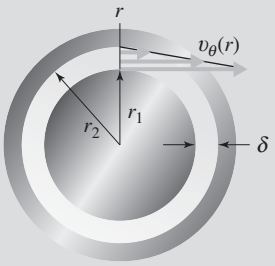


Fig. E7.6

Solución

Para este problema haremos $\omega_2 = 0$; la distribución de la velocidad (7.5.17) es

$$v_\theta(r) = \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right)$$

$$= \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\frac{r_2^2 - r^2}{r} = \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}(r_2 - r)\frac{r_2 + r}{r}$$

Introducimos la variable independiente y, medida desde el cilindro externo definida por $r + y = r_2$ (vea la figura 7.6); sea $\delta = r_2 - r_1$. Entonces lo anterior puede escribirse como

$$v_\theta(r) = \frac{r_1^2\omega_1(r_2 - r)}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}\frac{r_2 + r}{r}$$

$$= \frac{r_1^2\omega_1 y}{\delta(r_2 + r_1)}\frac{2r_2 - y}{r_2 - y}$$

Cuando el radio interno tiende al radio externo podemos escribir $r_1 \simeq r_2$. Haciendo $r_2 \simeq r_1 \simeq R$ tenemos $r_2 + r_1 \simeq 2R$ y

$$\frac{2R - y}{R - y} \simeq 2$$

porque $y \ll R$. La distribución de la velocidad se simplifica entonces a

$$v_\theta(y) = \frac{R^2\omega_1 y}{\delta\, 2R} \times 2 = \frac{R\omega_1}{\delta}\, y$$

Ésta es una distribución lineal y es una buena aproximación del flujo siempre que $\delta \ll R$.

7.6 FLUJO TURBULENTO EN UN TUBO

El estudio de un flujo turbulento desarrollado en un tubo circular es de considerable interés en flujos reales, dado que la mayoría de los flujos que se encuentran en aplicaciones prácticas son flujos turbulentos en tubos. Aun cuando para condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas, se han observado flujos laminares con número de Reynolds hasta de 40 000 en el flujo por un tubo, se supone que el flujo

turbulento ocurre en un tubo bajo condiciones de operación estándar siempre que el número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

exceda de 2000; entre 2000 y 4000 es posible que el flujo oscile en forma aleatoria entre laminar y turbulento. Considere, por ejemplo, agua a 20 ºC fluyendo por un tubo pequeño de 5 mm de diámetro; la velocidad promedio sólo necesita ser de 0.8 m/s (2 ft/s en un tubo de ¼ de pulgada) para que haya flujo turbulento. Ésta es la situación cuando bebemos agua de una fuente o bebedero. Para tubos de diámetro más grande, la velocidad promedio es lo suficientemente grande para que se produzca un flujo turbulento en la mayoría de las situaciones.

CONCEPTO CLAVE *Se crea un flujo turbulento siempre que bebemos agua de una fuente o bebedero.*

En un flujo turbulento, las tres componentes de la velocidad son diferentes de cero. Si medimos las componentes como una función del tiempo, resultarán gráficas semejantes a las que se muestran en la figura 7.7 para un flujo en un tubo donde u, v y w están en las direcciones x, r y θ, respectivamente. Raras veces hay interés (para los ingenieros) en los detalles de las componentes de la velocidad que fluctúan en forma aleatoria; por tanto, introducimos la noción de una cantidad promediada respecto al tiempo. Las componentes de la velocidad (u, v, w) se escriben como

$$u = \overline{u} + u' \qquad v = \overline{v} + v' \qquad w = \overline{w} + w' \tag{7.6.1}$$

donde una barra sobre una cantidad denota un promedio respecto al tiempo y el signo $(')$ denota la parte fluctuante. Usando la componente u como ejemplo, el *promedio respecto al tiempo* se define como,

CONCEPTO CLAVE *Una barra sobre una cantidad denota un promedio respecto al tiempo.*

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \tag{7.6.2}$$

donde T es un incremento de tiempo lo suficientemente grande[7] para eliminar toda la dependencia en el tiempo de $\overline{u}$. En un flujo desarrollado en un tubo $\overline{u}$ sería diferente de cero y $\overline{v} = \overline{w} = 0$, como se observa en la figura 7.7.

Descomposición de Reynolds, 689

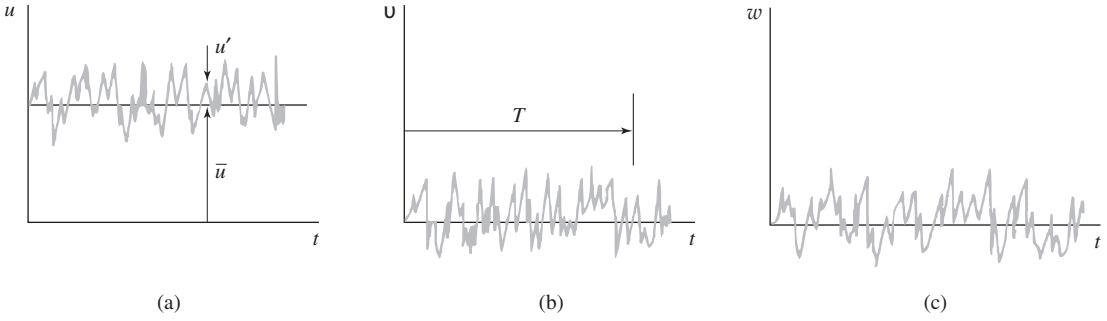


Fig. 7.7 Componentes de la velocidad en un flujo turbulento en un tubo: (a) velocidad de la componente x; (b) velocidad de la componente r; (c) velocidad de la componente θ.

[7]En una ubicación dada en un tubo esto se podría comprobar experimentalmente como sigue: se inicia con un valor relativamente grande de T y luego se disminuye T en corridas subsiguientes. Si $\overline{u}$ no cambia conforme T disminuye, T es lo suficientemente grande. Si T es demasiado pequeño, $\overline{u}$ será diferente para cada corrida.

Ejemplo 7.7

Demuestre que $\overline{u'} = 0$ y $\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ para un flujo turbulento.

Solución

Para demostrar que $\overline{u'} = 0$ simplemente sustituimos la expresión (7.6.1) para $u(t)$ en la ecuación 7.6.2 y obtenemos

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T (\overline{u} + u')dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{u}\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T u'\, dt$$

$$= \overline{u}\,\frac{1}{T}\int_0^T dt + \overline{u'}$$

$$= \overline{u} + \overline{u'}$$

Restando $\overline{u}$ en ambos lados tendremos

$$\overline{u'} = 0$$

Ahora, obtengamos el promedio respecto al tiempo de la derivada $\partial u/\partial y$. Tenemos

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial y}\, dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{T}\int_0^T u\, dt\right) = \frac{\partial}{\partial y}\,\overline{u}$$

dado que T es una constante. Entonces,

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

7.6.1 Ecuación diferencial

La ecuación diferencial que debe resolverse para obtener la distribución de la velocidad promediada respecto al tiempo se deduce usando un método considerando una partícula. Las ecuaciones de Navier-Stokes podrían promediarse respecto al tiempo, llegando a la misma ecuación diferencial; ese método está incluido en los problemas.

Considere la situación para un flujo turbulento en un tubo horizontal, como se muestra en la figura 7.8. Usamos las componentes de la velocidad u y v en las direc-

ciones x y y, respectivamente. Las partículas de fluido[8] se mueven al azar en todo el flujo. En un instante, una partícula de fluido se mueve a través del área incremental dA debido a la fluctuación de la velocidad v', entra a una capa circundante de fluido que se mueve con una velocidad más alta de la componente x y produce así un efecto retardador en la capa vecina. Una partícula de fluido que se mueve a una capa vecina que se desplaza con una menor velocidad de la componente x tendería a acelerar el fluido de movimiento más lento. La fuerza de la componente x que resulta debido al movimiento aleatorio de una partícula de fluido que pasa por el área incremental dA sería (vea la ecuación 4.6.6)

Flujo turbulento en un tubo, 687

$$dF = -\rho v' dA\, u' \tag{7.6.3a}$$

donde u' es el cambio negativo en la componente x de la velocidad debido al intercambio de la cantidad de movimiento y $\rho v' dA$ es el flujo másico que pasa a través del área; el signo negativo da una dF positiva. Si dividimos ambos lados entre el área dA, obtenemos un "esfuerzo" que llamamos *esfuerzo cortante turbulento*, el cual es

$$\tau_{\text{turb}} = \frac{dF}{dA} = -\rho u' v' \tag{7.6.3b}$$

donde sabemos que $(u'v')$ es, en promedio, una cantidad negativa dado que una v' positiva produce una u' negativa. Este "esfuerzo cortante" es en realidad un intercambio de la cantidad de movimiento pero como tiene el mismo efecto que un esfuerzo, lo llamamos esfuerzo cortante.

CONCEPTO CLAVE *Una v' positiva produce una μ' negativa.*

El esfuerzo cortante turbulento promediado respecto al tiempo, con frecuencia llamado *esfuerzo cortante aparente*, el cual es de interés primordial, es

$$\overline{\tau}_{\text{turb}} = -\rho\overline{u'v'} \tag{7.6.4}$$

donde la ecuación 7.6.2 se usaría para los promedios respecto al tiempo. Observe que $\overline{u'w'}$ sería cero porque una componente w' (en la dirección θ) no movería una

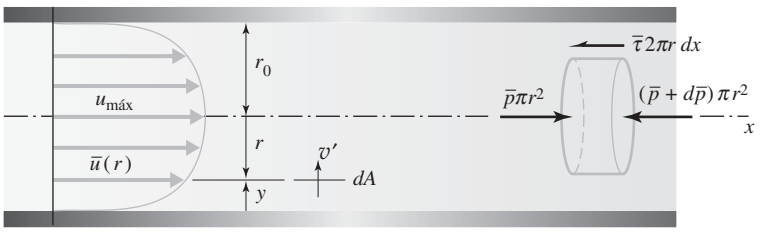


Fig. 7.8 Flujo turbulento en un tubo horizontal.

[8] Una partícula es una masa relativamente pequeña de fluido, consistente de un gran número de moléculas, que tienden a moverse como una unidad.

partícula de fluido hacia una capa con una componente x mayor o menor de la velocidad. Además, $\overline{v'w'} = 0$, usando la misma lógica.

El esfuerzo cortante total en un lugar en particular sería debido a la viscosidad y al intercambio de la cantidad de movimiento ya descritos; esto es,

$$\begin{aligned}\overline{\tau} &= \overline{\tau}_{\text{lam}} + \overline{\tau}_{\text{turb}} \\ &= \mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

El esfuerzo cortante puede relacionarse con el gradiente de presión al sumar fuerzas en el elemento cilíndrico horizontal mostrado en la figura 7.8. De donde resulta

$$\overline{\tau} = -\frac{r}{2}\frac{d\overline{p}}{dx} = \frac{r\Delta\overline{p}}{2L} \tag{7.6.6}$$

la cual muestra que la distribución del esfuerzo cortante es lineal para un flujo turbulento así como para un flujo laminar (ecuación 7.3.17). El cortante turbulento obviamente se hace cero en la pared dado que las perturbaciones de la velocidad son cero en la pared, y el cortante total es cero en la línea centro donde $r = 0$ o $y = r_0$, como se muestra en la figura 7.9. El cortante viscoso es diferente de cero sólo en una capa viscosa muy delgada en la pared, de espesor δ_ν, cerca de la pared, como se ve en la parte (b). Observe que el esfuerzo cortante turbulento alcanza un máximo cerca de la pared en la capa viscosa en la pared.

CONCEPTO CLAVE *El cortante viscoso es diferente de cero sólo en una capa viscosa muy delgada en la pared.*

La ecuación diferencial que debe resolverse, si se determina la distribución de la velocidad promediada respecto al tiempo, se encuentra combinando las dos ecuaciones anteriores y es

$$\frac{r}{2}\frac{d\overline{p}}{dx} = \rho \overline{u'v'} + \mu \frac{d\overline{u}}{dr} \tag{7.6.7}$$

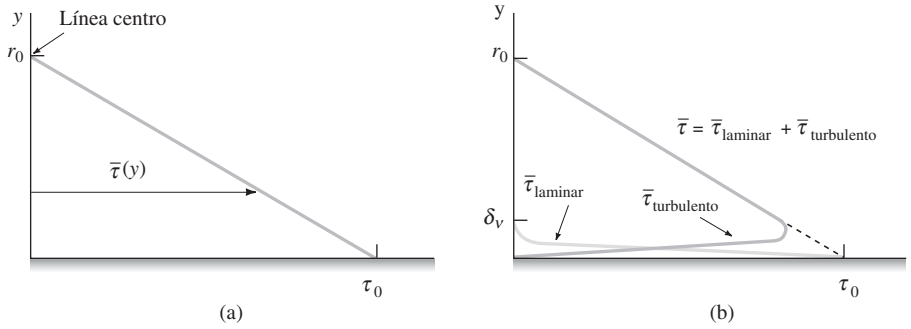


Fig. 7.9 Distribuciones del esfuerzo cortante en un flujo desarrollado en un tubo.

donde hemos empleado $r + y = r_0$ de modo que $dy = -dr$. Para flujo desarrollado sabemos que $d\overline{p}/dx = \text{const.}$; por consiguiente, si sabemos cómo varió $\overline{u'v'}$ con r, la ecuación diferencial podría resolverse. Sin embargo, la cantidad $\overline{u'v'}$ no puede ser determinada analíticamente, de modo que la solución para la ecuación 7.6.7 no se puede intentar sino hasta hallar una solución empírica para $\overline{u'v'}$. En lugar de hallar una expresión empírica para $\overline{u'v'}$ y a continuación despejar $\overline{u}$ de la ecuación diferencial, simplemente presentaremos los resultados empíricos obtenidos para el perfil de la velocidad $\overline{u}(y)$. No obstante, antes de hacer esto en la siguiente sección debemos introducir la viscosidad turbulenta, la longitud de mezclado y el coeficiente de correlación.

CONCEPTO CLAVE *La cantidad $\overline{u'v'}$ no puede determinarse analíticamente.*

En lugar de usar la cantidad $\overline{u'v'}$ como la incógnita en la ecuación 7.6.7, con frecuencia introducimos la *viscosidad turbulenta* η, definida por la relación

$$\overline{u'v'} = \eta \frac{d\overline{u}}{dy} \tag{7.6.8}$$

Observe que tiene las mismas dimensiones que la viscosidad cinemática. En términos de la viscosidad turbulenta, la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{r}{2}\frac{d\overline{p}}{dx} = \rho(\nu + \eta)\frac{d\overline{u}}{dr} \tag{7.6.9}$$

Si vemos el proceso turbulento como la mezcla aleatoria y caótica de partículas de fluido, podemos elegir introducir la *longitud de mezclado* l_m, la distancia que una partícula se desplaza antes de interactuar con otra partícula. Con base en un razonamiento relacionado al intercambio de la cantidad de movimiento, relacionamos la viscosidad turbulenta con la longitud de mezclado con

$$\eta = l_m^2 \left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right| \tag{7.6.10}$$

El *coeficiente de correlación* K_{uv}, un esfuerzo cortante turbulento normalizado, que se usa con frecuencia cuando se describen movimientos turbulentos, tiene límites de ±1 y está definido por

$$K_{uv} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}} \tag{7.6.11}$$

donde las cantidades promediadas respecto al tiempo estarían definidas por la ecuación 7.6.2.

Las cantidades η, l_m y K_{uv} son funciones de r (o y) que simplemente sustituyen la variable $\overline{u'v'}$. No simplifican la ecuación diferencial 7.6.7, sólo permiten que la ecuación tome formas ligeramente diferentes. Como no podemos deducir una expresión para η, l_m o K_{uv} no podemos hallar $\overline{u}(r)$ usando métodos analíticos. Debemos apoyarnos sobre datos experimentales que se explican en la próxima sección.

CONCEPTO CLAVE *Las cantidades η, l_m y K_{uv} simplemente sustituyen la variable $\overline{u'v'}$.*

Ejemplo 7.8

Observe que en la figura 7.9b existe una región cercana a la pared donde el cortante turbulento está cerca de su máximo y es relativamente constante, como se muestra en la figura E7.8 y que el cortante viscoso es muy pequeño. Supóngase que la longitud de mezclado es directamente proporcional a la distancia desde la pared. Con esta suposición demuestre que $\overline{u}(y)$ es logarítmica en esta región cerca de la pared.

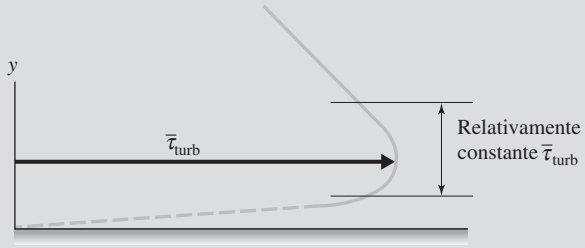


Fig. E7.8

Solución

Si el cortante viscoso es insignificante, tenemos, combinando las ecuaciones 7.6.5, 7.6.8, y 7.6.10,

$$\overline{\tau}_{\text{turb}} = \rho\eta \frac{d\overline{u}}{dy} = \rho l_m^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

Ahora, si $\overline{\tau}_{\text{turb}} = \text{const.} = c_1$ y suponemos, como se indica en el enunciado del problema, que

$$l_m = c_2 y$$

resulta

$$c_1 = \rho c_2^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

o bien,

$$y \frac{d\overline{u}}{dy} = c_3$$

donde $c_3 = \sqrt{c_1/\rho c_2^2}$. Esto se integra para obtener

$$\overline{u}(y) = c_3 \ln y + c_4$$

En consecuencia, con las suposiciones precedentes vemos que se predice un perfil logarítmico para la región de cortante turbulento constante cerca de la pared. Esto, en efecto, se observa a partir de datos experimentales; concluimos por tanto que las suposiciones precedentes son razonables para un flujo turbulento en un tubo.

Ejemplo 7.8a Laboratorio de capa límite turbulenta, 858-860

7.6.2 Perfil de velocidad

El perfil de la velocidad promediado respecto al tiempo en un tubo es bastante sensible a la magnitud del promedio de la altura e de la rugosidad de la pared, como se muestra en la figura 7.10. La mayoría de los materiales son "rugosos" cuando se ven

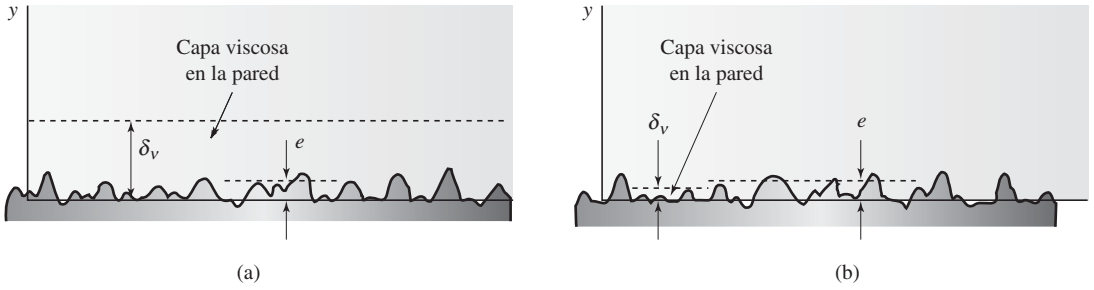


Fig. 7.10 (a) Una pared lisa y (b) una pared rugosa.

con suficiente amplificación, suponiéndose que el vidrio y el plástico son lisos con $e = 0$. (Los valores para e están enumerados en la figura 7.13 en la página 308). Como se observó en la sección anterior, el cortante laminar es significativo sólo cerca de la pared en la capa viscosa en la pared con espesor δ_v. Si éste es lo suficientemente grande, cubre los elementos rugosos de la pared, como se muestra en la figura 7.10a, de modo que tienen un efecto insignificante en el flujo; es como si la pared fuera lisa. Esta situación se conoce a menudo como *hidráulicamente lisa.* Si la capa viscosa en la pared es relativamente delgada, los elementos rugosos sobresalen de esta capa, como se indica en la figura 7.10b, y la pared es rugosa. La *rugosidad relativa e/D* y el número de Reynolds pueden usarse para determinar si un tubo es liso o rugoso. Esto se observará de los datos del factor de fricción que se presentan en la siguiente sección.

CONCEPTO CLAVE *Si el espesor δ_v es lo suficientemente grande, es como si la pared fuera lisa. El tubo es hidráulicamente liso.*

No despejamos la distribución de la velocidad en un flujo turbulento desarrollado porque $\overline{u'v'}$ no se puede determinar en forma analítica. Entonces, presentaremos los datos empíricos para $\overline{u}(y)$ directamente y no resolveremos la ecuación 7.6.7. Presentamos ahora las dos expresiones más comunes para flujo turbulento.

El primer método para expresar empíricamente la distribución de la velocidad comprende flujos con paredes lisas y flujos con paredes rugosas. Si el flujo tiene una pared lisa, como se muestra en la figura 7.10a, identificamos las dos regiones del flujo, la *región de la pared* y la *región externa.* En la región de la pared, la velocidad y longitud características son la **velocidad del cortante** u_τ, definida por[9] $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$, y la **longitud viscosa** ν/u_τ. La distribución de la velocidad adimensional en la región de la pared, para un tubo liso, es

Velocidad del cortante: *La cantidad $\sqrt{\tau_0/\rho}$ es la velocidad del cortante u_τ.*

Longitud viscosa: *La longitud ν/u_τ es una longitud característica en un flujo turbulento.*

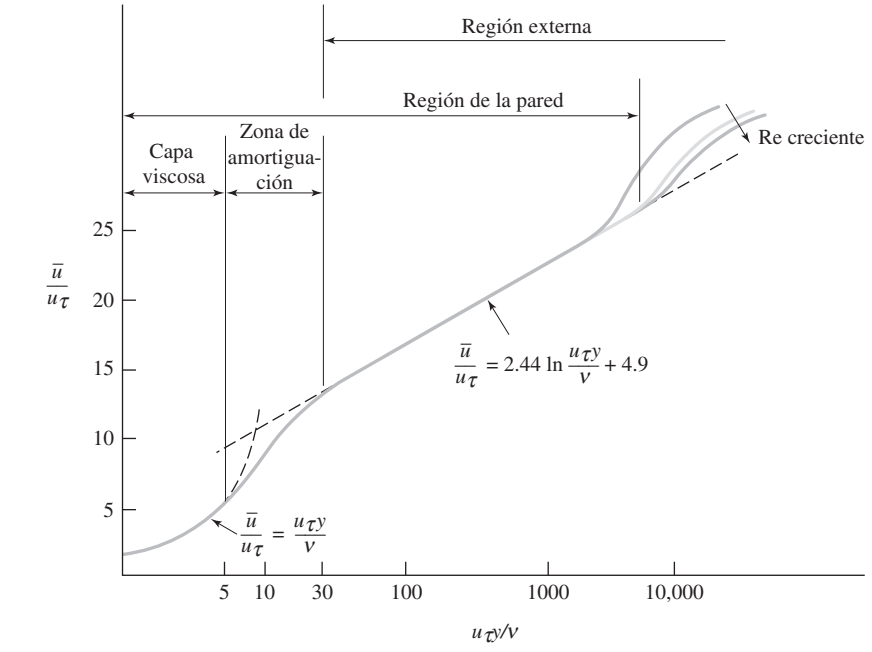
$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \text{ (capa viscosa en la pared)} \qquad 0 \leq \frac{u_\tau y}{\nu} \lesssim 5 \qquad (7.6.12)$$

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + 4.9 \text{ (región turbulenta)} \qquad 30 < \frac{u_\tau y}{\nu}, \ \frac{y}{r_0} < 0.15 \qquad (7.6.13)$$

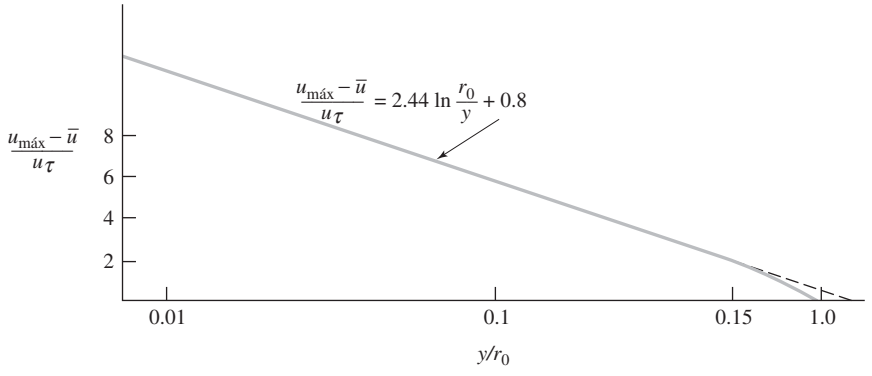
CONCEPTO CLAVE *Es en la capa viscosa en la pared donde se considera que se inicia la turbulencia.*

En el intervalo $5 < u_\tau y/\nu < 30$, la *zona de amortiguación*, los datos experimentales no se ajustan a ninguna de las curvas anteriores sino que se fusionan las dos curvas, como se muestra en la figura 7.11a. La capa viscosa en la pared tiene espesor δ_v y es

[9]La velocidad del cortante u_τ es una velocidad ficticia y no tiene alguna relación con una velocidad real en el flujo. Es una cantidad con dimensiones de velocidad que permite que los datos experimentales se presenten en forma adimensional como *perfiles universales* (perfiles que son válidos para todos los flujos turbulentos en tubos). La longitud viscosa ν/u_τ es una longitud ficticia.



(a) La región de la pared



(b) La región externa

Fig. 7.11 Relaciones empíricas para flujo turbulento en un tubo liso: (a) región de la pared; (b) región externa. (Basada en datos de J. Laufer, The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA Report 1174, 1954.)

en la capa viscosa donde se considera que se inicia la turbulencia; esta capa posee una distribución de velocidad lineal, promediada respecto al tiempo, pero instantáneamente la capa tiene una gran dependencia en el tiempo. El borde externo de la región de la pared depende en gran medida en el número de Reynolds, como se muestra; para un Re bajo puede estar ubicada cerca de $u_\tau y/\nu = 3000$.

Para tubos rugosos, la capa viscosa en la pared no desempeña una función importante porque la turbulencia se inicia desde los elementos que sobresalen de la pared, de modo que es necesario sólo un perfil logarítmico en la región de la pared. La longitud característica es la altura promedio de la rugosidad e; el perfil de velocidad adimensional para el tubo rugoso es

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{y}{e} + 8.5 \qquad \frac{y}{r_0} < 0.15 \qquad \text{(región de la pared)} \qquad (7.6.14)$$

donde las constantes 8.5 y 2.44 permiten un buen ajuste con los datos experimentales.

En la región externa, trazada en la figura 7.11b, la longitud característica es r_0; el defecto de la velocidad ($u_{máx} - \overline{u}$) está normalizado con u_τ y la relación empírica, para tubos lisos y rugosos, es

$$\frac{u_{máx} - \overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{r_0}{y} + 0.8 \quad \frac{y}{r_0} \leq 0.15 \qquad \text{(región externa)} \qquad (7.6.15)$$

Es necesaria una ecuación empírica adicional para completar el perfil para $0.15 < y/r_0 \leq 1$.

La región de la pared y la región externa se traslapan como se muestra en la figura 7.11a. En esta región de traslape podemos combinar las ecuaciones previas para obtener una expresión para la velocidad máxima; para un tubo liso es

$$\frac{u_{máx}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau r_0}{\nu} + 5.7 \qquad \text{(tubos lisos)} \qquad (7.6.16)$$

y para un tubo rugoso encontramos que

$$\frac{u_{máx}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{r_0}{e} + 9.3 \qquad \text{(tubos rugosos)} \qquad (7.6.17)$$

Aun cuando no es frecuente que busquemos la velocidad real promediada respecto al tiempo en una posición radial específica en un tubo, las distribuciones anteriores son de uso ocasional y se presentan aquí para completar el análisis. Observe, sin embargo, que antes de que pueda hallarse $u_{máx}$ debemos conocer u_τ; antes que u_τ pueda hallarse debemos conocer τ_0. Para hallar τ_0 usamos el gradiente de presión,

$$\tau_0 = -\frac{r_0}{2}\frac{dp}{dx} \qquad (7.6.18)$$

o el factor de fricción con la ecuación 7.3.19. Si no se conocen dp/dx ni f, podemos usar la forma de ley exponencial del perfil, descrita en el párrafo siguiente, para aproximar f.

Una forma alterna y más sencilla que adecuadamente describe la distribución de la velocidad de un flujo turbulento en un tubo es el *perfil de ley exponencial*, es decir,

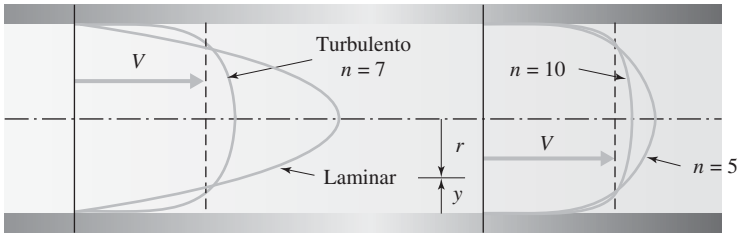


Fig. 7.12 Perfil de velocidad turbulenta.

$$\frac{\overline{u}}{u_{\text{máx}}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n} \tag{7.6.19}$$

donde y se mide desde la pared del tubo y n es un entero entre 5 y 10. Usando esta distribución se encuentra que la velocidad promedio es

$$V = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} \overline{u}(r)2\pi r\, dr = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}\, u_{\text{máx}} \tag{7.6.20}$$

Esta distribución se compara con un perfil laminar en la figura 7.12.

El valor de n en el exponente está relacionado con el factor de fricción f mediante la expresión empírica

$$n = \frac{1}{\sqrt{f}} \tag{7.6.21}$$

La constante n varía de 5 a 10 dependiendo del número de Reynolds y de la rugosidad e/D de la pared del tubo. Para tubos lisos, el exponente n está relacionado con el número de Reynolds como se muestra en la tabla 7.1.

CONCEPTO CLAVE *El perfil de ley exponencial no puede usarse para obtener la pendiente en la pared o la pendiente en la línea centro.*

El perfil de ley exponencial no puede usarse para obtener la pendiente en la pared porque siempre dará $(d\overline{u}/dy)_{\text{pared}} = \infty$ para todos los valores de n. Entonces, no puede usarse para predecir el esfuerzo cortante en la pared. El cortante en la pared se encuentra al combinar las ecuaciones 7.6.21 y 7.3.19. Además, da una pendiente positiva $d\overline{u}/dy$ en la línea centro del tubo, donde la pendiente debe ser cero, de modo que no es válida cerca de la línea centro.

Debe observarse que el factor de corrección por energía cinética α (vea la ecuación 4.5.29) en tubos es 1.11, 1.06 y 1.03 para $n = 5$, 7 y 10, respectivamente. Debido a que es cercano a la unidad para $n > 7$, con frecuencia se establece igual a la unidad en la ecuación de energía cuando se resuelven problemas que comprenden un flujo turbulento.

Tabla 7.1 Exponente n para tubos lisos

$\text{Re} = VD/\nu$	4×10^3	10^5	10^6	$>2 \times 10^6$
n	6	7	9	10

Ejemplo 7.9

Por un tubo de 10 cm de diámetro fluye agua a 20 °C a una velocidad promedio de 1.6 m/s. Si los elementos rugosos son de 0.046 mm de alto, ¿la pared sería rugosa o lisa? Vea la figura 7.10.

Solución

Para determinar si la pared es rugosa o lisa, debemos comparar el espesor de la capa viscosa en la pared con la altura de los elementos rugosos. Por tanto, encontremos el espesor de la capa viscosa en la pared. De la figura 7.11 se determina el espesor de la capa viscosa haciendo $u_\tau y/\nu = 5$, donde $y = \delta_\nu$. Primero, debemos hallar u_τ. El número de Reynolds es

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{VD}{\nu} \\ &= \frac{1.6 \times 0.1}{10^{-6}} = 1.6 \times 10^5 \end{aligned}$$

De la tabla 7.1 $n \simeq 7.5$, de modo que, de la ecuación 7.6.21,

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{7.5^2} = 0.018 \end{aligned}$$

El cortante en la pared se calcula con la ecuación 7.3.19:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{8}\rho V^2 f \\ &= \frac{1}{8} \times 1000 \times 1.6^2 \times 0.018 = 5.8 \text{ Pa} \end{aligned}$$

La velocidad de fricción se encuentra de la definición de la velocidad del cortante:

$$\begin{aligned} u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{5.8}{1000}} = 0.076 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Esto nos permite calcular el espesor de la capa viscosa en la pared usando $y = \delta_\nu$:

$$\begin{aligned} \delta_\nu &= \frac{5\nu}{u_\tau} \\ &= \frac{5 \times 10^{-6}}{0.076} = 6.6 \times 10^{-5} \text{ m} \quad \text{o} \quad 0.066 \text{ mm} \end{aligned}$$

Como los elementos rugosos miden sólo 0.046 mm de alto, están sumergidos en la capa viscosa de la pared. En consecuencia, la pared es lisa (vea la figura 7.10a). Si el tubo estuviera hecho de hierro colado con $e = 0.26$ mm, la pared sería rugosa.

Observe que la capa viscosa en la pared, aun a esta velocidad relativamente baja, es de alrededor de 0.1% del radio. La capa viscosa en la pared suele ser extremadamente delgada.

Ejemplo 7.10

El tubo horizontal y liso de 4 cm de diámetro de la figura E7.10 transporta 0.004 m^3/s de agua a 20 ºC. Usando el perfil de ley exponencial, aproxime (a) el factor de fricción, (b) la velocidad máxima, (c) la posición radial donde $u = V$, (d) el cortante en la pared, (e)la caída de presión a lo largo de una longitud de 10 m, y (f) la velocidad máxima usando la ecuación 7.6.16.

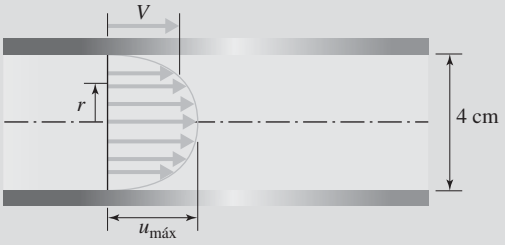


Fig. E7.10

Solución

(a) Se calcula que la velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.004}{\pi \times 0.02^2} = 3.18$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.18 \times 0.04}{10^{-6}} = 1.27 \times 10^5$$

De la tabla 7.1 vemos que $n \cong 7.5$ y de la ecuación 7.6.21,

$$f = \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{7.5^2} = 0.018$$

(b) Usando la ecuación 7.6.20, se encuentra que la velocidad máxima es

$$u_{máx} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} V$$

$$= \frac{8.5 \times 16}{2 \times 7.5^2} \times 3.18 = 3.84 \text{ m/s}$$

(c) La distancia desde la pared donde $u = V = 3.18$ m/s se encuentra usando la ecuación 7.6.19 como sigue:

$$\frac{\overline{u}}{u_{\text{máx}}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7.5}$$

$$\therefore y = r_0\left(\frac{u}{u_{\text{máx}}}\right)^{7.5}$$

$$= 2\left(\frac{3.18}{3.84}\right)^{7.5} = 0.49 \text{ cm}$$

La posición radial es entonces

$$r = r_0 - y$$

$$= 2 - 0.49 = 1.51 \text{ cm}$$

(d) El cortante en la pared se encuentra usando la ecuación 7.3.19 y es

$$\tau_0 = \frac{1}{8}\rho V^2 f$$

$$= \frac{1}{8} \times 1000 \times 3.18^2 \times 0.018 = 23 \text{ Pa}$$

(e) La caída de presión se calcula usando la ecuación 7.6.18 con $\Delta p/L = -dp/dx$ y es

$$\Delta p = \frac{2\tau_0 L}{r_0}$$

$$= \frac{2 \times 23 \times 10}{0.02} = 23\,000 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 23 \text{ kPa}$$

(f) Para usar la ecuación 7.6.16 debemos conocer la velocidad del cortante. Es

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{23}{1000}} = 0.152 \text{ m/s}$$

Entonces encontramos que $u_{\text{máx}}$ es

$$u_{\text{máx}} = 0.152\left(2.44 \ln \frac{0.152 \times 0.02}{10^{-6}} + 5.7\right) = 3.84 \text{ m/s}$$

Ésta es la misma velocidad que la dada por la fórmula de la ley exponencial del inciso (b). Esta respuesta es considerada más precisa si difiere de la obtenida con la ecuación 7.6.20. Observe que los datos experimentales no toman en cuenta una precisión con más de tres dígitos significativos y a veces con sólo dos dígitos significativos.

7.6.3 Pérdidas en flujos desarrollados en tubos

Quizá la cantidad más calculada en flujos en tubos es la pérdida de carga. Si ésta se conoce en un flujo desarrollado, el cambio de presión puede calcularse, el cual nos permite seleccionar bombas; para un flujo desarrollado en un tubo la ecuación de energía (4.5.17) nos da

$$h_L = \frac{\Delta(p + \gamma h)}{\gamma} \tag{7.6.22}$$

La pérdida de carga que resulta del cortante en la pared en un flujo desarrollado está relacionada con el factor de fricción (vea la ecuación 7.3.20) mediante la ecuación de Darcy-Weisbach, es decir,

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.6.23}$$

CONCEPTO CLAVE *Si se conoce el factor de fricción, podemos hallar la pérdida de carga y la caída de presión.*

En consecuencia, si se conoce el factor de fricción, podemos hallar la pérdida de carga y a continuación la caída de presión.

El factor de fricción f depende de las diversas cantidades que afectan el flujo, escrito como

$$f = f(\rho, \mu, V, D, e) \tag{7.6.24}$$

donde la altura promedio de la rugosidad e de la pared toma en cuenta la influencia de los elementos rugosos de la pared. Un análisis dimensional, siguiendo los pasos de la sección 6.2, nos da

$$f = f\left(\frac{\rho VD}{\mu}, \frac{e}{D}\right) \tag{7.6.25}$$

donde e/D es la rugosidad relativa.

Se han obtenido datos experimentales que relacionan el factor de fricción con el número de Reynolds, para un flujo completamente desarrollado en tubos, sobre una gran cantidad de rugosidades en la pared. Los resultados de estos datos se presentan en la figura 7.13, que comúnmente se conoce como *diagrama de Moody*, nombrado en honor de Lewis F. Moody (1880-1953). Existen varias características en el diagrama de Moody que deben observarse.

CONCEPTO CLAVE *Para un valor suficientemente grande de* Re*, el factor de fricción es constante.*

- Para una determinada rugosidad en la pared, medida por la rugosidad relativa *e/D*, existe un valor suficientemente grande de Re arriba del cual el factor de fricción es constante, con lo cual se define el *régimen completamente turbulento.* El tamaño promedio del elemento rugoso *e* es considerablemente mayor que el espesor δ_v, de modo que los efectos viscosos no son significativos; la resistencia al flujo es producida principalmente por el arrastre de los elementos rugosos que sobresalen en el flujo.
- Para valores menores de la rugosidad relativa *e/D* se observa que, cuando Re decrece, el factor de fricción aumenta en la *zona de transición* y a la larga es igual que el de un tubo liso. Los elementos rugosos se sumergen en la capa viscosa de la pared, de modo que producen poco efecto en el flujo principal.
- Para números de Reynolds menores que 2000, se muestra el factor de fricción para un flujo laminar. La *zona crítica* acopla el flujo turbulento con el flujo laminar y puede representar un flujo oscilatorio que existe alternadamente entre un flujo turbulento y uno laminar.
- Los valores *e* de este diagrama son para tubos nuevos. Con el tiempo un tubo se corroe y se obstruye, cambiando la rugosidad y el diámetro del tubo, con un aumento resultante en el factor de fricción. Estos factores deben incluirse en las consideraciones de diseño; pero no se analizarán aquí.

Las siguientes ecuaciones empíricas representan el diagrama de Moody para Re > 4000:

Flujo en tubo liso:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln \mathrm{Re}\sqrt{f} - 0.8 \tag{7.6.26}$$

Zona completamente turbulenta:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \frac{e}{3.7D} \tag{7.6.27}$$

Zona de transición:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left(\frac{e}{3.7D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}} \right) \tag{7.6.28}$$

La ecuación de la zona de transición (7.6.28) que acopla la ecuación para un tubo liso con la ecuación para un régimen completamente turbulento se conoce como **ecuación de Colebrook**. Observe que la ecuación 7.6.26 es la ecuación de Colebrook con *e* = 0, y la ecuación 7.6.27 es la ecuación de Colebrook con Re = ∞.

Ecuación de Colebrook: *Ecuación que acopla la ecuación para un tubo liso con la ecuación para un régimen completamente turbulento.*

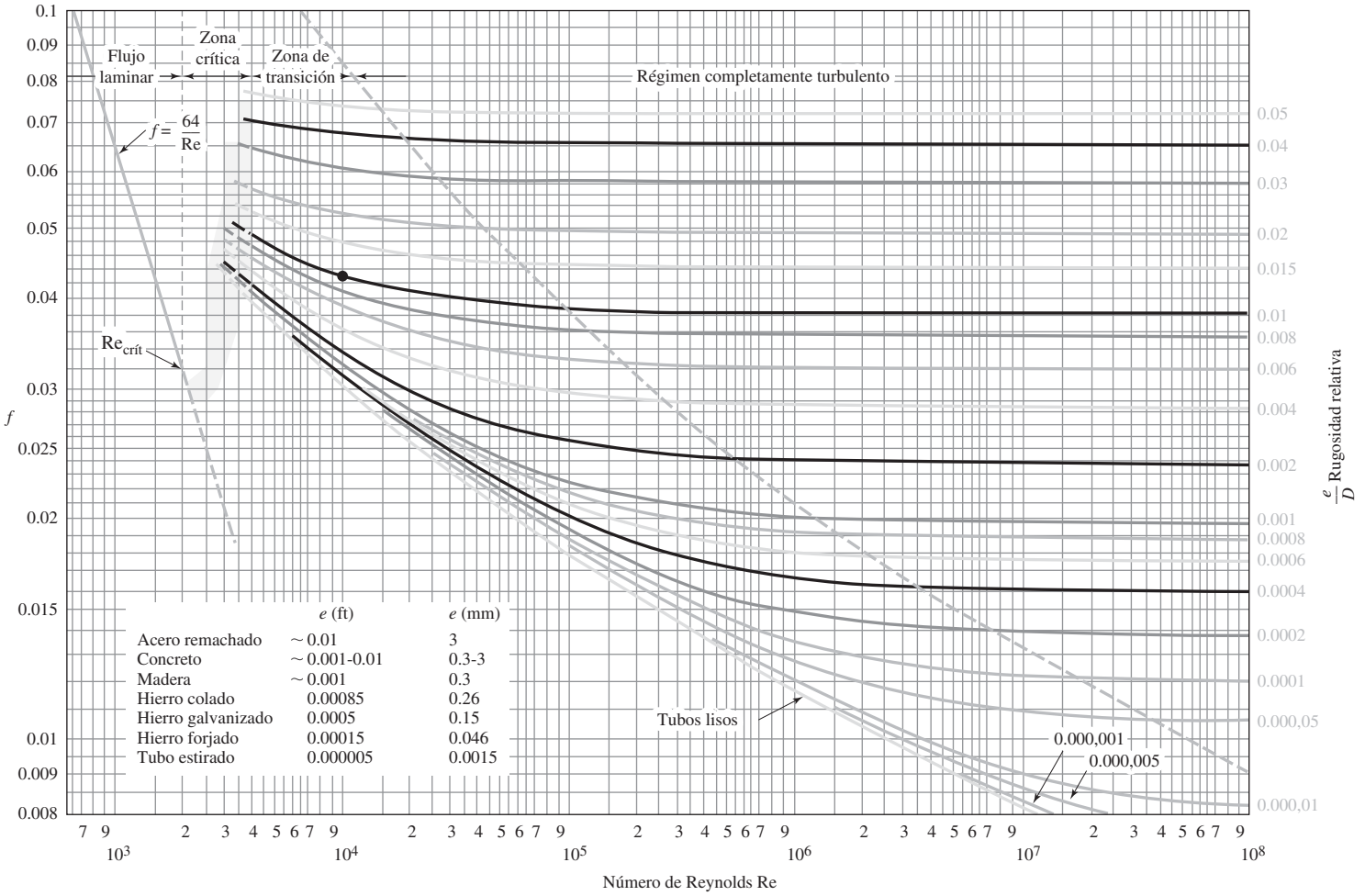


Fig. 7.13 Diagrama de Moody. (De L. F. Moody, Trans. ASME, Vol. 66, 1944. Reproducido con permiso de la ASME.) (Nota: Si $e/D = 0.01$ y $Re = 10^4$, el punto ubica $f = 0.043$.)

Pueden identificarse tres categorías de problemas para flujo turbulento desarrollado en un tubo de longitud L:

Categoría	*Conocida*	*Desconocida*
1	Q, D, e, ν	h_L
2	D, e, ν, h_L	Q
3	Q, e, ν, h_L	D

En problema de la categoría 1 es claro y no requiere de un procedimiento de iteración si se usa el diagrama de Moody. Los problemas de las categorías 2 y 3 son más parecidos a los problemas encontrados en situaciones de diseño en ingeniería y requieren de un proceso iterativo de prueba y error cuando se usa el diagrama de Moody. Cada uno de estos tipos se ilustrará con un ejemplo.

CONCEPTO CLAVE *Los problemas de las categorías 2 y 3 requieren de un proceso iterativo de prueba y error.*

Una alternativa para usar el diagrama de Moody que evita cualquier proceso de prueba y error se hace posible con el uso de fórmulas empíricamente deducidas. Quizá las mejores de estas fórmulas fueron las presentadas por Swamee y Jain (1976) para flujos en tubos; una expresión explícita que da un valor aproximado de la incógnita en cada categoría es como sigue:

$$h_L = 1.07\frac{Q^2L}{gD^5}\left\{\ln\left[\frac{e}{3.7D} + 4.62\left(\frac{\nu D}{Q}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2} \qquad \begin{matrix} 10^{-6} < e/D < 10^{-2} \\ 3000 < \text{Re} < 3 \times 10^8 \end{matrix} \quad (7.6.29)$$

$$Q = -0.965\left(\frac{gD^5h_L}{L}\right)^{0.5}\ln\left[\frac{e}{3.7D} + \left(\frac{3.17\nu^2L}{gD^3h_L}\right)^{0.5}\right] \qquad \text{Re} > 2000 \quad (7.6.30)$$

$$D = 0.66\left[e^{1.25}\left(\frac{LQ^2}{gh_L}\right)^{4.75} + \nu Q^{9.4}\left(\frac{L}{gh_L}\right)^{5.2}\right]^{0.04} \qquad \begin{matrix} 10^{-6} < e/D < 10^{-2} \\ 5000 < \text{Re} < 3 \times 10^8 \end{matrix} \quad (7.6.31)$$

En las ecuaciones anteriores, se pueden usar unidades inglesas o unidades SI.

La ecuación 7.6.30 es tan precisa como el diagrama de Moody, y las ecuaciones 7.6.29 y 7.6.31 son precisas hasta aproximadamente 2% del diagrama de Moody. Estas tolerancias son aceptables para cálculos de ingeniería. Es importante darse cuenta que el diagrama de Moody está basado en datos experimentales que es probable que sean precisos hasta no más de 5%. En consecuencia, las anteriores tres fórmulas de Swamee y Jain, que pueden fácilmente introducirse en una calculadora portátil programable, con frecuencia son usadas por ingenieros de diseño. Los siguientes ejemplos también ilustran el uso de estas fórmulas aproximadas.

CONCEPTO CLAVE *El diagrama de Moody es preciso hasta no más de 5%.*

Ejemplo 7.11

Agua a 74 °F es transportada 1500 pies por un tubo horizontal de $1\frac{1}{2}$- pulgadas de diámetro de hierro forjado, con un caudal de 0.1 ft³/s. Calcule la caída de presión en los 1500 pies de longitud del tubo, usando (a) el diagrama de Moody y (b) el método alterno.

Solución

(a) La velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.1}{\pi \times 0.75^2/144} = 8.15 \text{ ft/s}$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{8.15 \times 1.5/12}{10^{-5}} = 1.02 \times 10^5$$

Al obtener e de la figura 7.13, tenemos, usando $D = 1.5/12$ ft,

$$\frac{e}{D} = \frac{0.00015}{0.125} = 0.0012$$

Del diagrama de Moody se lee que el factor de fricción es

$$f = 0.023$$

La pérdida de carga se calcula como

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$= 0.023\,\frac{1500}{1.5/12}\,\frac{8.15^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2}{2 \times 32.2 \text{ ft/s}^2} = 280 \text{ ft}$$

Esta respuesta está dada con dos dígitos significativos porque el factor de fricción se conoce a lo más con dos números significativos. La caída de presión se encuentra con la ecuación 7.6.22 y es

$$\Delta p = \gamma h_L$$

$$= 62.4 \text{ lb/ft}^3 \times 280 \text{ ft} = 17{,}500 \text{ psf} \quad \text{o} \quad 120 \text{ psi}$$

(b) El método alterno para este problema de categoría 1 utiliza la ecuación 7.6.29, con $D = 1.5/12 = 0.125$ ft:

$$h_L = 1.07\,\frac{0.1^2 \times 1500}{32.2 \times 0.125^5}\left\{\ln\left[\frac{0.0012}{3.7} + 4.62\left(\frac{10^{-5} \times 0.125}{0.1}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2}$$

$$= 1.07 \times 15{,}265 \times 0.01734 = 280 \text{ ft}$$

Este método mucho más sencillo da el mismo valor que el hallado usando el diagrama de Moody.

Ejemplo 7.12

Una caída de presión de 700 kPa se mide a lo largo de un tubo horizontal de hierro forjado de 10 cm de diámetro de 300 m de longitud que transporta aceite ($S = 0.9$, $\nu = 10^{-5}$ m^2/s). Calcule el caudal usando (a) el diagrama de Moody y (b) el método alterno.

Solución

(a) La rugosidad relativa es

$$\frac{e}{D} = \frac{0.046}{100} = 0.00046$$

Suponiendo que el flujo es completamente turbulento (Re no es necesario), el diagrama de Moody da

$$f = 0.0165$$

Se encuentra que la pérdida de carga es

$$h_L = \frac{\Delta p}{\gamma_{\text{aceite}}} = \frac{700\,000 \text{ N/m}^2}{9800 \text{ N/m}^3 \times 0.9} = 79.4 \text{ m}$$

La velocidad se calcula con la ecuación 7.6.23 y es

$$V = \left(\frac{2gDh_L}{fL}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.1 \text{ m} \times 79.4 \text{ m}}{0.0165 \times 300 \text{ m}}\right)^{1/2} = 5.61 \text{ m/s}$$

Esto nos da un número de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{5.61 \text{ m/s} \times 0.1 \text{ m}}{10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 5.61 \times 10^4$$

Usando este número de Reynolds y $e/D = 0.00046$, el diagrama de Moody da el factor de fricción como

$$f = 0.023$$

Esto corrige el valor original de f. La velocidad se recalcula y es

$$V = \left(\frac{2 \times 9.8 \times 0.1 \times 79.4}{0.023 \times 300}\right)^{1/2} = 4.75 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds es entonces

$$\text{Re} = \frac{4.75 \times 0.1}{10^{-5}} = 4.75 \times 10^4$$

Del diagrama de Moody $f = 0.023$ parece ser satisfactorio. Entonces el caudal es

$$Q = VA = 4.75 \times \pi \times 0.05^2 = 0.037 \text{ m}^3/\text{s}$$

Se dan sólo dos números significativos porque f se conoce cuando mucho con dos números significativos.

(b) El método alterno para este problema de categoría 2 usa la relación explícita (7.6.30). Podemos calcular directamente Q y es

$$Q = -0.965\left(\frac{9.8 \times 0.1^5 \times 79.4}{300}\right)^{0.5} \ln\left[\frac{0.00046}{3.7} + \left(\frac{3.17 \times 10^{-10} \times 300}{9.8 \times 0.1^3 \times 79.4}\right)^{0.5}\right]$$

$$= -0.965 \times 5.096 \times 10^{-3} \times (-7.655) = 0.038 \text{ m}^3/\text{s}$$

Este método mucho más sencillo da un valor esencialmente igual al obtenido usando el diagrama de Moody.

Ejemplo 7.13

¿De qué diámetro debe seleccionarse una tubería estirada para transportar 0.002 m^3/s de agua a 20 °C, a lo largo de una longitud de 400 m, para que la pérdida de carga no exceda 30 m? (a) Utilice el diagrama de Moody y (b) el método alterno.

Solución

(a) En este problema no conocemos D. Entonces, se anticipa una solución de prueba y error. La velocidad promedio está relacionada con D mediante

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{\pi D^2/4} = \frac{0.00255}{D^2}$$

Este factor de fricción y D están relacionados como sigue:

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$30 = f\frac{400}{D}\frac{(0.00255/D^2)^2}{2 \times 9.8}$$

$$\therefore D^5 = 4.42 \times 10^{-6} f$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.00255D}{D^2 \times 10^{-6}} = \frac{2550}{D}$$

Ahora, simplemente supongamos un valor de f y comprobemos con las relaciones anteriores y con el diagrama de Moody. La primeras suposición es $f = 0.03$, y la corrección se anota en la tabla siguiente. Nota: la segunda suposición es el valor de f hallado a partir de los cálculos de la primera suposición.

f	D(m)	Re	e/D	f (Fig. 7.13)
0.03	0.0421	6.06×10^4	0.000036	0.02
0.02	0.0388	6.57×10^4	0.000039	0.02

El valor de $f = 0.02$ es aceptable, dando un diámetro de 3.88 cm. Como es indudable que este diámetro no sea estándar, un diámetro de

$$D = 4 \text{ cm}$$

sería la medida del tubo seleccionado. Este tubo tendría una pérdida de carga menor que el límite de $h_L = 30$ m impuesto en el enunciado del problema. Cualquier tubo con un diámetro mayor también cumplirá este criterio pero sería más costoso, de modo que no debe seleccionarse.

(b) El método alterno para este problema de categoría 3 usa la relación explícita (7.6.31). Podemos directamente calcular que D es

$$D = 0.66\left[(1.5 \times 10^{-6})^{1.25}\left(\frac{400 \times 0.002^2}{9.81 \times 30}\right)^{4.75} + 10^{-6} \times 0.002^{9.4}\left(\frac{400}{9.81 \times 30}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$= 0.66[5.163 \times 10^{-33} + 2.102 \times 10^{-31}]^{0.04} = 0.039 \text{ m}$$

Por tanto, $D = 4$ cm podría ser la medida del tubo seleccionado. Ésta es la misma medida del tubo que la seleccionada usando el diagrama de Moody.

7.6.4 Pérdidas en conductos no circulares

Pueden hacerse buenas aproximaciones para la pérdida de carga en conductos con secciones transversales no circulares usando el *radio hidráulico* R, definido por

$$R = \frac{A}{P} \tag{7.6.32}$$

donde A es el área de sección transversal y P es el **perímetro mojado**, es decir, el perímetro donde el fluido está en contacto con la frontera sólida. Para un tubo circular con un flujo completo, el radio hidráulico es $R = r_0/2$. Por tanto, simplemente sustituimos el radio r_0 con $2R$ y usamos el diagrama de Moody con

Perímetro mojado: *Perímetro donde el fluido está en contacto con una frontera sólida.*

$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} \qquad \begin{matrix}\text{rugosidad} \\ \text{relativa}\end{matrix} \quad = \frac{e}{4R} \tag{7.6.33}$$

La pérdida de carga es

$$h_L = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} \tag{7.6.34}$$

Para usar esta técnica del radio hidráulico, la sección transversal debe estar muy "abierta," como un rectángulo con una proporción dimensional menor que 4:1; un triángulo equilátero, o un óvalo. Para otras formas, por ejemplo un anillo, el error sería significativo.

Ejemplo 7.14

Aire en condiciones estándar debe transportarse a una distancia de 500 m por un conducto rectangular liso y horizontal, de 30 cm × 20 cm con un caudal de 0.24 m³/s. Calcule la caída de presión.

Solución

El radio hidráulico es

$$R = \frac{A}{P} = \frac{0.3 \times 0.2}{(0.3 + 0.2) \times 2} = 0.06 \text{ m}$$

La velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.24}{0.3 \times 0.2} = 4.0 \text{ m/s}$$

Esto da un número de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} = \frac{4 \times 4 \times 0.06}{1.5 \times 10^{-5}} = 6.4 \times 10^4$$

Usando la curva para tubo liso del diagrama de Moody, resulta

$$f = 0.0196$$

Por tanto,

$$h_L = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} = 0.0196\,\frac{500 \text{ m}}{4 \times 0.06 \text{ m}}\,\frac{4^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 33.3 \text{ m}$$

La caída de presión es

$$\Delta p = \rho g h_L = 1.23 \times 9.8 \times 33.3 = 402 \text{ Pa}$$

7.6.5 Pérdidas menores en flujos en tubos

CONCEPTO CLAVE *Las pérdidas menores pueden exceder a las pérdidas por fricción.*

Ahora sabemos cómo calcular las pérdidas debidas a un flujo desarrollado en un tubo. No obstante, los sistemas de tuberías incluyen válvulas, codos, ensanchamientos, contracciones, entradas, salidas, curvas y otras conexiones que causan pérdidas adicionales, conocidas como *pérdidas menores*, aun cuando esas pérdidas pueden exceder a las pérdidas por fricción de la ecuación 7.6.23. Cada uno de estos elementos ocasiona un cambio en la magnitud y/o en la dirección de los vectores velocidad y, por tanto, el resultado es una pérdida. En general, si el flujo es gradualmente acelerado por un elemento, las pérdidas son muy pequeñas; las pérdidas relativamente grandes están asociadas a ensanchamientos o contracciones repentinas debido a las regiones separadas que resultan (un flujo separado ocurre cuando el flujo primario se separa de la pared).

Una pérdida menor se expresa en términos de un coeficiente de pérdida K, definido por

$$h_L = K \frac{V^2}{2g} \tag{7.6.35}$$

Experimentalmente se han determinado valores de K para varios accesorios y cambios de geometría de interés en sistemas de tuberías. Una excepción es la expansión repentina del área A_1 al área A_2, para la cual la pérdida puede calcularse; esto se hizo en el ejemplo 4.14, donde encontramos que

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \tag{7.6.36}$$

Entonces, para la expansión repentina

$$K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{7.6.37}$$

Si A_2 es extremadamente grande (por ejemplo, un tubo de salida hacia un depósito), $K = 1.0$ porque se pierde toda la energía cinética.

CONCEPTO CLAVE *El coeficiente de pérdida de un codo resulta principalmente del flujo secundario.*

Un accesorio de tubería que tiene un coeficiente de pérdida relativamente grande sin cambio en el área de sección transversal es una curva en un tubo, o codo. Esto resulta principalmente por el flujo secundario causado por el fluido que fluye de la región de alta presión a la región de baja presión (vea la ecuación 3.4.15), como se muestra en la figura 7.14; este flujo secundario se disipa con el tiempo después de que el fluido sale de una larga curva o codo. Además, se presenta una región separada en la esquina aguda de un codo estándar. Se requiere de energía para mantener un flujo secundario y el flujo en la región separada. Esta energía desperdiciada se mide en términos del coeficiente de pérdida.

En la tabla 7.2 y en la figura 7.15 se dan los coeficientes de pérdida para varias geometrías. Puede usarse una válvula de globo para controlar el caudal al introducir grandes pérdidas causadas al cerrar parcialmente la válvula. Los otros tipos de válvulas no deben usarse para controlar el flujo ya que puede ocasionarse una avería.

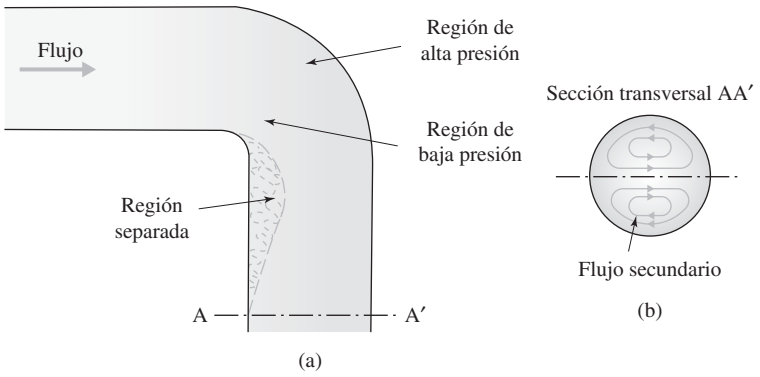


Fig. 7.14 Flujo en un codo.

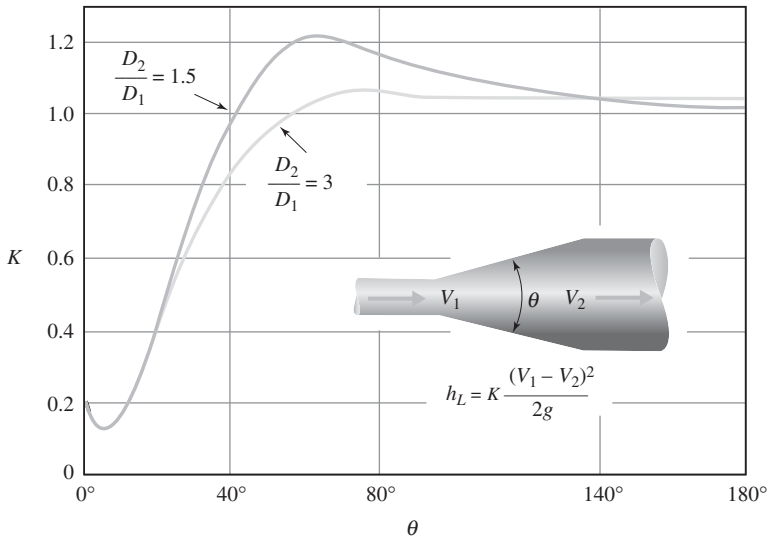


Fig. 7.15 Coeficientes de pérdida en una expansión cónica. (De A. H. Gibson, Vol. 93, 1912)

Tabla 7.2 Coeficientes de pérdida nominal K (Flujo turbulento)[a]

Tipo de accesorio	*Atornillado*			*Con brida*		
Diámetro	2.5 cm	5 pulg	10 cm	5 cm	10 cm	20 cm
Válvula del globo						
(completamente abierta)	8.2	6.9	5.7	8.5	6.0	5.8
(semiabierta)	20	17	14	21	15	14
(un cuarto abierta)	57	48	40	60	42	41
Válvula angular						
(completamente abierta)	4.7	2.0	1.0	2.4	2.0	2.0
Válvula de retención de charnela						
(completamente abierta)	2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0
Válvula de compuerta						
(completamente abierta)	0.24	0.16	0.11	0.35	0.16	0.07
Codo de retorno	1.5	0.95	0.64	0.35	0.30	0.25
Te (ramal)	1.8	1.4	1.1	0.80	0.64	0.58
Te (lineal)	0.9	0.9	0.9	0.19	0.14	0.10
Codo estándar	1.5	0.95	0.64	0.39	0.30	0.26
Codo de curva larga	0.72	0.41	0.23	0.30	0.19	0.15
Codo a 45°	0.32	0.30	0.29			
Entrada a escuadra			0.5			
Entrada reentrante			0.8			
Entrada bien redondeada			0.03			
Salida del tubo			1.0			
	Proporción de áreas					
Concentración repentina[b]	2:1		0.25			
	5:1		0.41			
	10:1		0.46			
	Proporción de áreas A/A_0					
Placa con orificio	1.5:1		0.85			
	2:1		3.4			
	4:1		29			
	$\geq 6:1$		$2.78\left(\frac{A}{A_0} - 0.6\right)^2$			
Agrandamiento repentino[c]			$\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$			
Codo de 90° (sin paletas)			1.1			
(con paletas)			0.2			
Contracción general	(ángulo de 30° incluido)		0.02			
	(ángulo de 70° incluido)		0.07			

[a] Pueden hallarse valores para otras geometrías en *Technical Paper 410,* The Crane Company, 1957.

[b] Con base en la velocidad de salida V_2.

[c] Con base en la velocidad de entrada V_1.

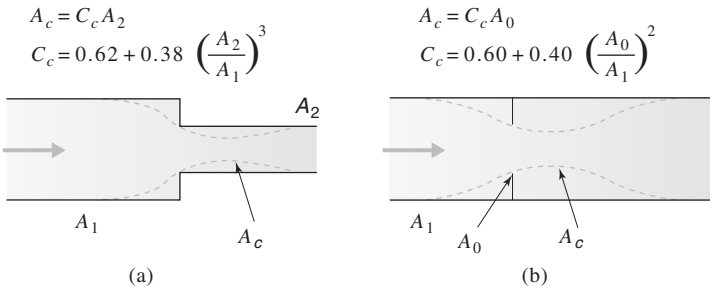


Fig. 7.16 Chorros contraídos en contracciones y orificios: (a) contracción repentina; (b) orificio concéntrico.

Pueden aproximarse los coeficientes de pérdida, para contracciones repentinas y placas con orificio, si se desprecian las pérdidas en el flujo convergente hasta el chorro contraído y se calculan las pérdidas en el flujo divergente, usando el coeficiente de pérdida para una expansión repentina. La figura 7.16 contiene la información necesaria para establecer el área A_c del **chorro contraído**, el área mínima; esta área mínima se presenta donde las líneas de corriente convergentes empiezan a expandirse para llenar el área corriente abajo.

Chorro contraído: *El área mínima en una contracción repentina.*

Es práctica frecuente expresar un coeficiente de pérdida como una *longitud equivalente* L_e de tubo. Esto se hace igualando la ecuación 7.6.35 a la 7.6.23:

$$K \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} \tag{7.6.38}$$

lo cual da la relación

$$L_e = K \frac{D}{f} \tag{7.6.39}$$

De aquí que la entrada a escuadra de un tubo de 20 cm de diámetro con un factor de fricción de $f = 0.02$ podría sustituirse con una longitud equivalente de tubo de $L_e = 5$ m.

Por último, debe hacerse un comentario respecto a la magnitud de las pérdidas menores. En sistemas de tuberías con longitudes intermedias (es decir, 100 diámetros) de tubo entre pérdidas menores, éstas pueden ser del mismo orden de magnitud que las pérdidas por fricción; para longitudes relativamente cortas las pérdidas menores pueden ser considerablemente mayores que las pérdidas por fricción; y para grandes longitudes (por ejemplo de 1000 diámetros) de tubo, las pérdidas menores suelen despreciarse.

CONCEPTO CLAVE *Para grandes longitudes de tubos, las pérdidas menores comúnmente se desprecian.*

Ejemplo 7.15

Si el cauda la través de una tubería de hierro forjado de 10 cm de diámetro (figura E7.15) es de 0.04 m³/s, encuentre la diferencia en elevación H de los dos depósitos.

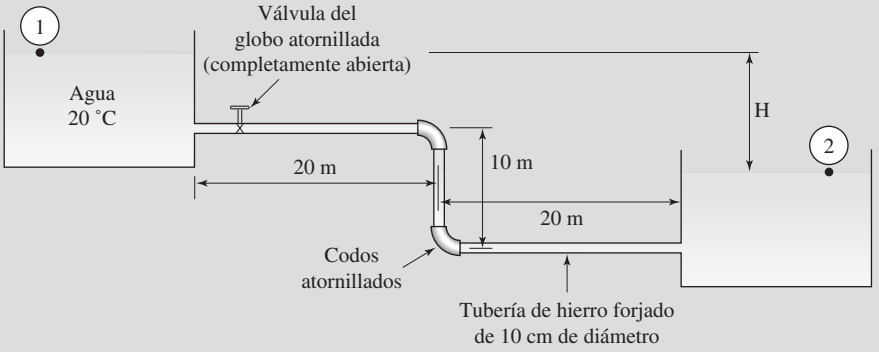


Fig. E7.15

Solución

La ecuación de energía escrita para un volumen de control que contiene las superficies de los dos depósitos (vea la ecuación 4.5.17), donde $V_1 = V_2 = 0$ y $p_1 = p_2 = 0$, es

$$0 = z_2 - z_1 + h_L$$

Entonces, haciendo $z_1 - z_2 = H$, tenemos

$$H = (K_{\text{entrada}} + K_{\text{válvula}} + 2K_{\text{codo}} + K_{\text{salida}}) \frac{V^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

La velocidad promedio, el número de Reynolds y la rugosidad relativa son

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.04}{\pi \times 0.05^2} = 5.09 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{5.09 \times 0.1}{10^{-6}} = 5.09 \times 10^5$$

$$\frac{e}{D} = \frac{0.046}{100} = 0.00046$$

Del diagrama de Moody encontramos que

$$f = 0.0173$$

Usando los coeficientes de pérdida de la tabla 7.2 para una entrada, una válvula de globo, codos estándar atornillados de 10 cm de diámetro, y una salida tendremos

$$H = (0.5 + 5.7 + 2 \times 0.64 + 1.0) \frac{5.09^2}{2 \times 9.8} + 0.0173 \frac{50}{0.1} \frac{5.09^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 11.2 + 11.4 = 22.6 \text{ m}$$

Nota: Las pérdidas menores son más o menos iguales a las pérdidas por fricción como se esperaba, porque hay cinco elementos de pérdidas menores en 500 diámetros de longitud de tubería.

Ejemplo 7.16

Calcule el coeficiente de pérdida para la contracción repentina $A_1/A_2 = 2$, despreciando las pérdidas en la porción de contracción hasta el chorro contraído, y suponiendo que todas las pérdidas ocurren en la expansión desde el chorro contraído hasta A_2 (vea la figura 7.16). Compárelo con el de la tabla 7.2.

Solución

La pérdida de carga desde el chorro contraído hasta el área A_2 es (vea la tabla 7.2, agrandamiento repentino)

$$h_L = \left(1 - \frac{A_c}{A_2}\right)^2 \frac{V_c^2}{2g}$$

La continuidad nos permite escribir

$$V_c = \frac{A_2}{A_c} V_2$$

Así, la pérdida de carga basada en V_2 es

$$h_L = \left(1 - \frac{A_c}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2}{A_c}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

entonces el coeficiente de pérdida de la ecuación 7.6.35 es

$$K = \left(1 - \frac{A_c}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2}{A_c}\right)^2$$

Usando la expresión de C_c dada en la figura 7.16, tenemos

$$\frac{A_c}{A_2} = C_c = 0.62 + 0.38\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.67$$

Finalmente,

$$K = (1 - 0.67)^2 \frac{1}{0.67^2} = 0.24$$

Este resultado se compara favorablemente con el valor de 0.25 dado en la tabla 7.2.

7.6.6 Líneas de referencia hidráulica y de energía

Cuando la ecuación de energía se escribe en la forma de la ecuación 4.5.17, es decir,

$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + h_L \tag{7.6.40}$$

los términos tienen dimensiones de longitud. Esto ha conducido al uso convencional de la línea de referencia hidráulica y a la línea de referencia de energía. La **línea de referencia hidráulica** (HGL), que es la línea discontinua en la figura 7.17, en un sistema de tuberías está formada por el lugar geométrico de los puntos ubicados a una distancia p/γ arriba del centro del tubo, o a $p/\gamma + z$ arriba de un nivel de referencia preseleccionado; el líquido en un tubo piezométrico subiría hasta la HGL. La **línea de referencia de energía** (EGL), la línea continua en la figura 7.17, está formada por el lugar geométrico de los puntos localizados a una distancia $V^2/2g$

Línea de referencia hidráulica (HGL): *En un sistema de tuberías, la HGL está ubicada a una distancia p/γ arriba del centro del tubo.*

Línea de referencia de energía (EGL): *En un sistema de tuberías, la EGL está ubicada a una distancia $V^2/2g$ arriba de la HGL.*

arriba de la HGL, o a la distancia $V^2/2g + p/\gamma + z$ arriba del nivel de referencia; el líquido en un tubo Pitot subiría hasta la EGL. Los siguientes puntos se destacan con relación a la HGL y a la EGL:

- Cuando la velocidad tiende a cero, la HGL y la EGL se aproximan entre sí. Entonces, en un depósito, son idénticas y se encuentran en la superficie (vea la figura 7.17).
- La EGL y, en consecuencia, la HGL se inclinan hacia abajo en la dirección del flujo debido a la pérdida de carga en el tubo. Cuanto mayor sea la pérdida por unidad de longitud, mayor es la pendiente. Cuando aumenta la velocidad promedio en el tubo, aumenta la pérdida por unidad de longitud.
- Ocurre un cambio repentino en la HGL y la EGL cuando ocurre una pérdida debida a un cambio repentino en la geometría, como se representa por la válvula o por el agrandamiento repentino en la figura 7.17.
- Ocurre un salto en la HGL y en la EGL cuando siempre que se agregue energía útil al fluido, como ocurre con una bomba, y se tiene una caída si se extrae energía útil del flujo, como ocurre con una turbina.
- En los puntos donde la HGL pasa por la línea centro del tubo, la presión es cero. Si el tubo se encuentra arriba de la HGL, existe un vacío en el tubo, una condición que con frecuencia se evita, si es posible, en el diseño de sistemas de tuberías; una excepción sería en el diseño de un sifón.

CONCEPTO CLAVE *Si el tubo se encuentra arriba de la HGL, existe un vacío en el tubo.*

Los conceptos de línea de referencia de energía y de línea de referencia hidráulica pueden también aplicarse a flujos en canales abiertos. La HGL coincide con la superficie libre y la HGL está a una distancia $V^2/2g$ arriba de la superficie libre. Los flujos uniformes en canales abiertos se estudiarán en la siguiente sección, y el capítulo 10 está dedicado al flujo no uniforme en canales abiertos.

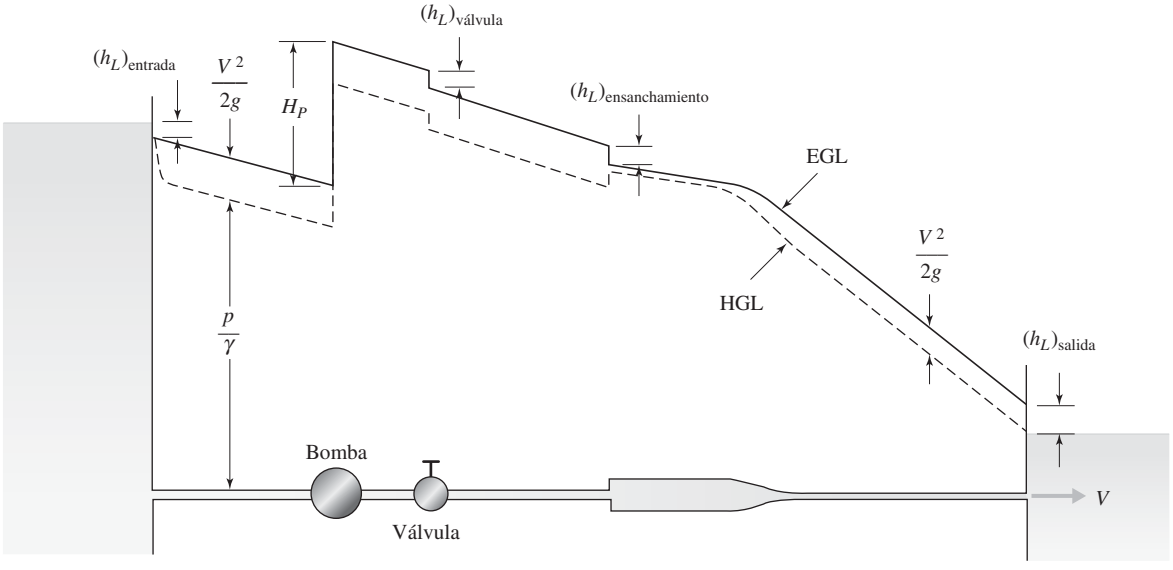


Fig. 7.17 Línea de referencia hidráulica (HGL) y línea de referencia de energía (EGL) para un sistema de tuberías.

Ejemplo 7.17

Agua a 20 ºC fluye entre dos depósitos a razón de 0.06 m³/s como se muestra en la figura E7.17. Haga un bosquejo de la HGL y de la EGL. ¿Cuál es el diámetro mínimo D_B permitido para evitar que se presente cavitación?

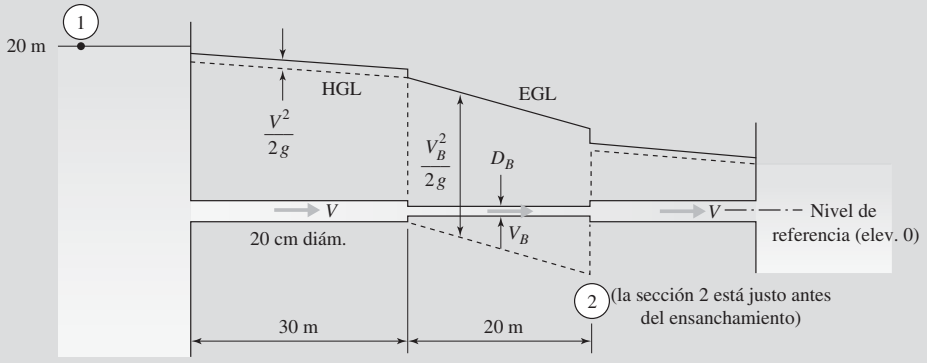


Fig. E7.17

Solución

La EGL y la HGL están bosquejadas en la figura, incluidos los cambios repentinos en la entrada, contracción, ensanchamiento y salida. Observe la carga de gran velocidad (la diferencia entre la EGL y la HGL) en el tubo más pequeño debido a la alta velocidad. Se calcula que la velocidad, el número de Reynolds y la rugosidad relativa en el tubo de 20 cm de diámetro son

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.06}{\pi \times 0.20^2/4} = 1.91 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.91 \times 0.2}{10^{-6}} = 3.8 \times 10^5$$

$$\frac{e}{D} = \frac{0.26}{200} = 0.0013$$

Entonces $f = 0.022$ de la figura 7.13. La velocidad, el número de Reynolds y la rugosidad relativa en el tubo más pequeño son

$$V_B = \frac{0.06}{\pi D_B^2/4} = \frac{0.0764}{D_B^2}$$

$$\text{Re} = \frac{0.0764 \times D_B}{D_B^2 \times 10^{-6}} = \frac{76\,400}{D_B}$$

$$\frac{e}{D_B} = \frac{0.00026}{D_B}$$

El diámetro mínimo posible se establece al reconocer que la presión del vapor de agua (2450 Pa absoluta) a 20 ºC es la presión mínima permisible. Como la distancia entre el

(*continúa*)

tubo y la HGL es una indicación de la presión en el tubo, podemos concluir que la presión mínima se presentará en la sección 2. De aquí que la ecuación de energía aplicada entre la sección 1, la superficie del depósito y la sección 2 da

$$\cancelto{0}{\frac{V_1^2}{2g}} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \cancelto{0}{z_2} + K_{\text{ent}}\frac{V_A^2}{2g} + K_{\text{cont}}\frac{V_B^2}{2g} + f_A\frac{L_A}{D_A}\frac{V^2}{2g} + f_B\frac{L_B}{D_B}\frac{V_B^2}{2g}$$

donde el subíndice A se refiere al tubo de 20 cm de diámetro. Esto se simplifica, usando presión absoluta, a

$$\frac{101\,000}{9810} + 20 = \frac{(0.0764/D_B^2)^2}{2 \times 9.81}\left(1 + 0.25 + f_B\frac{20}{D_B}\right) + \frac{2450}{9810}$$

$$+ \left(0.5 + 0.022\,\frac{30}{0.2}\right)\frac{1.91^2}{2 \times 9.81}$$

$$98\,600 = \frac{1.25}{D_B^4} + f_B\frac{20}{D_B^5}$$

donde hemos usado $K_{\text{ent}} = 0.5$ y supuesto que $K_{\text{const}} = 0.25$. Esto requiere una solución de prueba y error. Lo siguiente ilustra el procedimiento.

Sea $D_B = 0.1$ m. Entonces $e/D = 0.0026$ y $\text{Re} = 7.6 \times 10^5$. Por lo tanto, $f = 0.026$:

$$98\,600 \stackrel{?}{=} 12\,500 + 52\,000$$

Sea $D_B = 0.09$ m. Entonces $e/D = 0.0029$ y $\text{Re} = 8.4 \times 10^5$. Por lo tanto, $f = 0.027$:

$$98\,600 \stackrel{?}{=} 19\,000 + 91\,000$$

Vemos que 0.1 m es demasiado grande y que 0.09 es demasiado pequeño. De hecho, el valor de 0.09 m es sólo ligeramente más pequeño. En consecuencia, para estar seguros debemos seleccionar la siguiente medida de tubo más grande, de 0.1 m de diámetro. Si hubiera una medida de tubo de 9.5 cm de diámetro, ésa se podría seleccionar. Suponiendo que no se disponga de esa medida, seleccionamos

$$D_B = 10 \text{ cm}$$

Observe que la suposición de una proporción de áreas de 2:1 para la contracción es demasiado pequeña. En realidad es de 4:1. Esto daría $K_{\text{cont}} \simeq 0.4$. Después de una rápida verificación concluimos que este valor no influye de manera significativa en el resultado.

7.6.7 Sistema de tuberías simple con una bomba

Los problemas que hemos considerado hasta aquí en esta sección no han implicado una bomba. Si en el sistema de tuberías se incluye una bomba centrífuga y se especifica el caudal, la solución es directa usando las técnicas que ya hemos desarrollado. Si, por otro lado, no se especifica el caudal, como es el caso frecuente, resulta una solución de prueba y error que incluye una bomba centrífuga debido a que la carga producida por una bomba centrífuga y su eficiencia η_P (vea la ecuación 4.5.26) dependen de la descarga, como muestran las curvas características de las bombas, las curvas continuas en la figura 7.18. Las compañías suministran esas curvas características para cada bomba centrífuga manufacturada. Tal curva da una ecuación que relaciona el caudal Q con la carga H_P de la bomba. La otra ecuación está dada por la ecuación de energía, la cual puede típicamente escribirse como (vea la ecuación de energía en el ejemplo siguiente)

CONCEPTO CLAVE *Si se especifica el caudal, la solución es directa.*

$$H_P = c_1 + c_2 Q^2 \tag{7.6.41}$$

Ésta es la **curva de demanda del sistema** que, junto con la curva característica, deben resolverse simultáneamente para obtener el caudal deseado. Para determinar el requerimiento de potencia de una bomba, debe usarse la eficiencia η_P.

Curva de demanda del sistema: *La ecuación de energía que relaciona la carga de la bomba con el caudal desconocido.*

Observe que para el sistema de tuberías, la carga de energía H_P necesaria de la bomba, demandada por la ecuación de energía, aumenta con Q y de la curva característica de la bomba se observa que H_P disminuye con Q; entonces las dos curvas se intersecan en un punto, llamado *punto de operación* del sistema. Un ejemplo ilustra la técnica de solución.

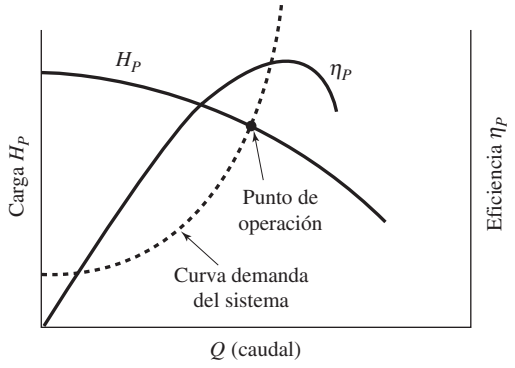


Fig. 7.18 Curvas características de una bomba y curva de demanda del sistema.

Ejemplo 7.18

Estime el caudal en el sistema de tuberías simple de la figura E7.18a si las curvas características de la bomba son como se muestra en la figura E7.18b. Además, encuentre el requerimiento de potencia de la bomba.

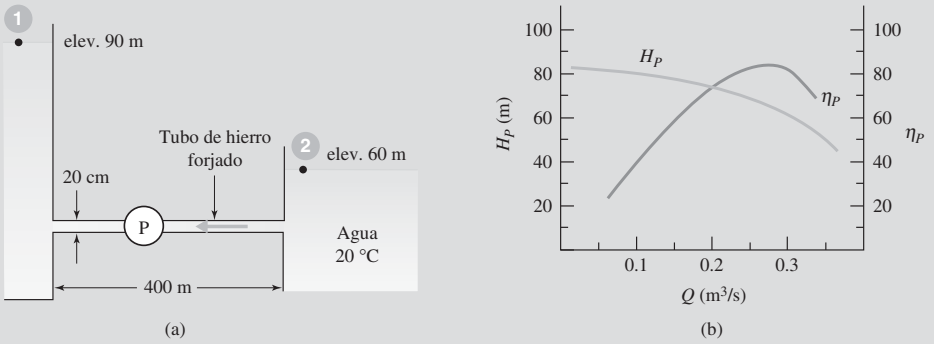


Fig. E7.18

Solución

Supondremos que el número de Reynolds es lo suficientemente grande para que el flujo sea completamente turbulento. Entonces, usando $e/D = 0.046/200 = 0.00023$; el factor de fricción del diagrama de Moody es

$$f = 0.014$$

La ecuación de energía (vea la ecuación 7.6.40) con $H_P = -\dot{W}_S/\dot{m}g$, aplicada entre las dos superficies, nos da

$$H_P = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}^{\,0} + z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma}^{\,0} + h_L$$

o bien,

$$\begin{aligned} H_P &= 90 - 60 + \left(K_{\text{entrada}} + K_{\text{salida}} + f\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g} \\ &= 30 + \left(0.5 + 1.0 + 0.014\,\frac{400}{0.2}\right)\frac{Q^2}{2 \times 9.8 \times [\pi \times 0.1^2]^2} \\ &= 30 + 1520Q^2 \end{aligned}$$

Esta ecuación, la curva de demanda del sistema, y la curva característica $H_P(Q)$ de la bomba se resuelven ahora simultáneamente mediante prueba y error. En realidad, la curva podría trazarse en la misma gráfica de la curva característica, y el punto de intersección, el punto de operación, daría Q. Intente con $Q = 0.2$ m³/s: $(H_P)_{\text{energía}} = 91$ m, $(H_P)_{\text{carac}} \cong 75$ m. Intente con $Q = 0.15$ m³/s: $(H_P)_{\text{energía}} = 64$ m, $(H_P)_{\text{carac}} \cong 75$ m. Intente con $Q = 0.17$ m³/s: $(H_P)_{\text{energía}} = 74$ m, $(H_P)_{\text{carac}} \cong 76$ m. Ésta es nuestra solución. Tenemos

$$Q = 0.17 \text{ m}^3/\text{s}$$

Verifique el número de Reynolds: $\text{Re} = DQ/A\nu = 0.2 \times 0.17/(\pi \times 0.1^2 \times 10^{-6}) = 1.08 \times 10^6$. Éste es lo suficientemente grande, pero un tanto marginal.

El requerimiento de potencia de la bomba está dado por la ecuación 4.5.26:

$$\begin{aligned} \dot{W}_P &= \frac{Q\gamma H_P}{\eta_P} \\ &= \frac{0.17 \times 9800 \times 75}{0.65} = 198\,000 \text{ W} \quad \text{o} \quad 198 \text{ kW} \end{aligned}$$

donde la eficiencia $\eta_P = 0.63$ se encuentra de la curva característica con $Q = 0.17$ m³/s. *Nota:* Como $L/D > 1000$, las pérdidas menores debidas a la entrada y salida podrían haberse despreciado.

7.7 FLUJO UNIFORME TURBULENTO EN CANALES ABIERTOS

La última situación de flujo interno que consideramos en este capítulo es la de un flujo uniforme permanente (profundidad constante) en un canal abierto, mostrado en la figura 7.19. Ya podríamos tratar este flujo usando la relación de Darcy-Weisbach presentada en la sección 7.6.3. De hecho, esa técnica predice mejores resultados que el método más común que presentamos aquí. Vamos a comparar ambos métodos en dos ejemplos. No obstante, a menos que se indique de otro modo, un flujo uniforme en canales abiertos y rugosos se analiza comúnmente usando el siguiente método menos complicado.

Si la ecuación de energía se aplica entre dos secciones del canal trazado en la figura 7.19, obtenemos

$$0 = \frac{V_2^2 \overset{0}{\cancel{-V_1^2}}}{2g} + \frac{p_2 \overset{0}{\cancel{-p_1}}}{\gamma} + z_2 - z_1 + h_L \tag{7.7.1}$$

que muestra que la pérdida de carga es

$$\begin{aligned} h_L &= z_1 - z_2 \\ &= L \operatorname{sen} \theta = LS \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

donde L es la longitud del canal entre las dos secciones y S es la pendiente del canal, que se supone pequeña, de modo que sen $\theta \simeq S$. (No confundir S con la gravedad específica).

La ecuación de Darcy-Weisbach (7.6.31), con $h_L = LS$ de la ecuación 7.7.2, toma la forma

$$LS = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g} \qquad \therefore RS = \frac{f}{8g} V^2 \tag{7.7.3}$$

donde R es el radio hidráulico. Como de ordinario los canales abiertos son bastante grandes con números de Reynolds grandes, el factor de fricción está invariablemente en el régimen completamente turbulento. Por tanto, la ecuación anterior se escribe como

$$V = C \sqrt{RS} \tag{7.7.4}$$

CONCEPTO CLAVE *Como los canales abiertos son bastante grandes, con números de Reynolds grandes, el factor de fricción está en el régimen completamente turbulento.*

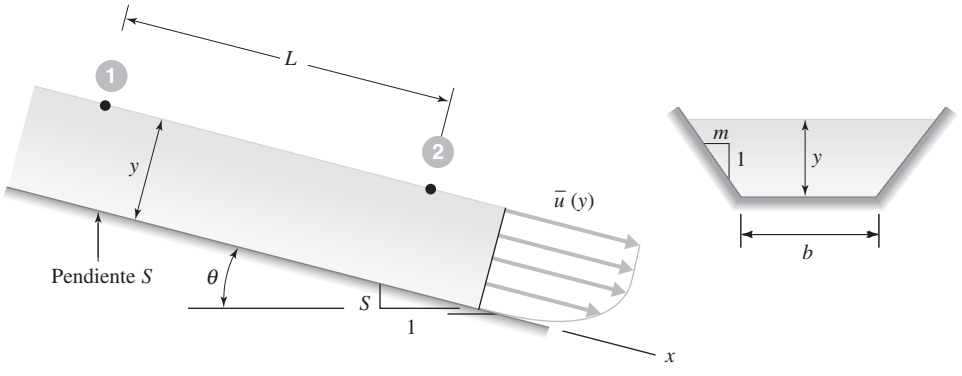


Fig. 7.19 Flujo uniforme en un canal abierto.

donde el *coeficiente de Chezy, C* es una constante dimensional; la ecuación anterior se conoce como la *ecuación de Chezy*, llamada así en honor de Antoine Chezy (1718-1798). El coeficiente de Chezy está relacionado con la rugosidad del canal y con el radio hidráulico (en forma muy semejante a como *f* lo está en un tubo) por

$$C = \frac{c_1}{n} R^{1/6} \tag{7.7.5}$$

donde la constante dimensional c_1 tiene un valor de 1.0 si se usan unidades SI y 1.49 si se usan unidades inglesas. La constante adimensional *n* está directamente relacionada con la rugosidad de la pared; se denomina *n de Manning*, llamada así en honor de Robert Manning (1816-1897). Valores para diversos materiales de paredes se dan en la tabla 7.3.

El caudal, que es de principal interés en problemas de flujo en canales abiertos, se encuentra que es

$$Q = \frac{c_1}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \qquad c_1 = \begin{cases} 1.0 \text{ para unidades SI} \\ 1.49 \text{ para unidades inglesas} \end{cases} \tag{7.7.6}$$

Ésta es la *ecuación de Chezy-Manning*.

Para canales con superficie lisa, se desalienta el uso de la ecuación de Chezy-Manning porque implícitamente supone una pared rugosa. Los cálculos para canales con superficie lisa, por ejemplo vidrio o plástico, deben estar basados en la relación de Darcy-Weisbach usando *f* de la figura 7.13; vea la sección 7.6.3.

Tabla 7.3 Valores promedio[a] de la *n* de Manning

Material de la pared	*n de Manning*
Madera cepillada	0.012
Madera sin cepillar	0.013
Concreto terminado	0.012
Concreto sin terminar	0.014
Tubo de desagüe	0.013
Ladrillo	0.016
Hierro colado, hierro forjado	0.015
Tubo de concreto	0.015
Acero remachado	0.017
Tierra, simple	0.022
Canal de metal corrugado	0.025
Escombro	0.03
Tierra con piedras y yerbas	0.035
Arroyos de montaña	0.05

[a]Los valores de esta tabla resultan en caudales demasiado grandes para radios hidráulicos mayores de aproximadamente 3 m (10 ft). La *n* de Manning debe aumentarse en 10 a 15% para conductos tan grandes.

Ejemplo 7.19

La profundidad del agua a 60 ºF que fluye por un canal rectangular de concreto terminado de 12 ft de ancho es de 4 ft. La pendiente medida es 0.0016. Estime el caudal usando (a) la ecuación de Chezy-Manning y (b) la ecuación de Darcy-Weisbach.

Solución

Se calcula que el radio hidráulico es

$$R = \frac{A}{P} = \frac{yb}{2y + b} = \frac{4 \times 12}{2 \times 4 + 12} = 2.4 \text{ ft}$$

(a) Usando la ecuación de Chezy-Manning, con $n = 0.012$ de la tabla 7.3 y $c = 1.49$, tenemos

$$Q = \frac{1.49}{n} AR^{2/3} S^{1/2}$$

$$= \frac{1.49 \text{ ft}^{1/3}/\text{s}}{0.012} \times (4 \times 12) \text{ ft}^2 \times 2.4^{2/3} \text{ ft}^{2/3} \times 0.0016^{1/2} = 427 \text{ ft}^3/\text{s}$$

(b) La rugosidad relativa es, usando un valor bajo de $e = 0.0015$ ft (es concreto terminado) mostrado en el diagrama de Moody:

$$\frac{e}{4R} = \frac{0.0015}{4 \times 2.4} = 0.00016$$

Suponiendo un flujo completamente turbulento, el diagrama de Moody da el factor de fricción como

$$f = 0.013$$

La ecuación de Darcy-Weisbach (7.7.3) da entonces la velocidad como sigue:

$$\therefore V = \left(\frac{8RgS}{f} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{8 \times 2.4 \text{ ft} \times 32.2 \text{ ft/s}^2 \times 0.0016}{0.013} \right)^{1/2} = 8.72 \text{ ft/s}$$

El caudal se calcula como

$$Q = VA = 8.72 \times 4 \times 12 = 419 \text{ ft}^3/\text{s}$$

Estos dos valores están dentro de 2%, una tolerancia aceptable en ingeniería para este tipo de problema, pero la solución que se encuentra usando el diagrama de Moody se considera más precisa.

Ejemplo 7.20

Un tubo de concreto de 1.0 m de diámetro transporta agua a 20 ºC con una profundidad de 0.4 m. Si la pendiente es 0.001, encuentre el caudal usando (a) la ecuación de Chezy-Manning y (b) la ecuación de Darcy-Weisbach.

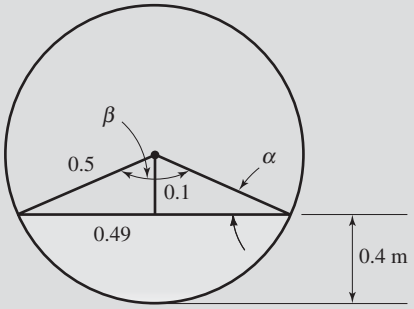


Fig. E7.20

Solución

Del diagrama del tubo de la figura E7.20 se calcula lo siguiente:

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{0.1}{0.5} = 11.54°$$

$$\therefore \beta = 180 - 2 \times 11.54 = 156.9°$$

$$\therefore A = \pi \times 0.5^2 \times \frac{156.9}{360} - 0.49 \times 0.1 = 0.2933 \text{ m}^2$$

$$P = 2\pi \times 0.5 \times \frac{156.9}{360} = 1.369 \text{ m}$$

Se encuentra que el radio hidráulico, usando los cálculos anteriores, es de

$$R = \frac{A}{P} = \frac{0.2933}{1.369} = 0.2142 \text{ m}$$

(a) La ecuación de Chezy-Manning da, con n de la tabla 7.3 y $c_1 = 1.0$,

$$Q = \frac{1.0}{n} AR^{2/3}S^{1/2} = \frac{1.0}{0.015} \times 0.2933 \times 0.2142^{2/3} \times 0.001^{1/2} = 0.22 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) La rugosidad relativa es, usando un valor relativamente rugoso para el tubo de concreto de la figura 7.13, como lo sugiere la tabla 7.3, $e = 2.00$ mm,

$$\frac{e}{4R} = \frac{2}{4 \times 214.2} = 0.0023$$

Suponiendo un flujo completamente turbulento, el diagrama de Moody da

$$f = 0.025$$

La ecuación de Darcy-Weisbach (7.7.3) da entonces lo siguiente:

$$\therefore V = \left(\frac{8RgS}{f}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 0.2142 \times 9.81 \times 0.001}{0.025}\right)^{1/2} = 0.820 \text{ m/s}$$

El caudal es

$$Q = VA = 0.820 \times 0.2933 = 0.24 \text{ m}^3/\text{s}$$

Este valor esta dentro de un 8% del resultado anterior, una tolerancia aceptable para este tipo de problema. No obstante, el segundo método, que es más difícil de aplicar, es considerado más preciso.

7.8 RESUMEN

Las longitudes de entrada laminares para un tubo y un canal ancho son, respectivamente,

$$\frac{L_E}{D} = 0.065\ \text{Re} \qquad \frac{L_E}{h} = 0.04\ \text{Re} \tag{7.8.1}$$

Para un flujo turbulento en tubo con número de Reynolds alto, la longitud de entrada es

$$\frac{L_E}{D} = 120 \tag{7.8.2}$$

Para un flujo laminar en un tubo y en un canal ancho la presión y el factor de fricción son, respectivamente,

$$\Delta p = \frac{8\mu VL}{r_0^2} \qquad f = \frac{64}{\text{Re}} \qquad \text{tubo} \tag{7.8.3}$$

$$\Delta p = \frac{12\mu VL}{a^2} \qquad f = \frac{48}{\text{Re}} \qquad \text{canal} \tag{7.8.4}$$

donde a es la altura (tirante) del canal.

El par de torsión requerido para hacer girar un cilindro interno con el cilindro externo fijo es

$$T = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L w_1}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.8.5}$$

En un flujo turbulento la pérdida de carga se calcula con

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.8.6}$$

donde f se encuentra usando el diagrama de Moody de la figura 7.13. Las pérdidas menores se incluyen usando

$$h_L = K\frac{V^2}{2g} \tag{7.8.7}$$

donde muchos coeficientes de pérdida K están enumerados en la tabla 7.2.

Para incluir una bomba en un sistema de tuberías cuando se desconoce el caudal, es necesario tener las curvas características de la bomba, como las de la figura E7.18. El ejemplo 7.18 ilustró el procedimiento.

Es muy frecuente que el caudal en un canal abierto se calcule usando la ecuación

$$Q = \frac{c_1}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \qquad c_1 = \begin{cases} 1.0 \text{ para unidades SI} \\ 1.49 \text{ para unidades inglesas} \end{cases} \tag{7.8.8}$$

donde n se obtiene de la tabla 7.3.

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

7.1 Se mide un perfil parabólico en el flujo por un tubo. El flujo es:

I. Laminar
II. Desarrollado
III. Permanente
IV. Simétrico

(A) I y III
(B) I, II y III
(C) I, II y IV
(D) I, II, III y IV

7.2 El perfil de la velocidad entre placas paralelas se calcula que es Vy/h, donde y se mide desde la placa inferior y h es la distancia entre las placas. Sabemos que

I. El flujo es laminar
II. La placa inferior se mueve con velocidad V y la otra está estacionaria
III. La placa inferior está estacionaria y la otra se mueve con velocidad V
IV. El flujo es permanente

(A) I, III y IV **(B)** II y III
(C) I y III **(D)** I y IV

7.3 Un líquido fluye por un tubo con un número de Reynolds de 4000.

(A) El flujo es laminar.
(B) El flujo es turbulento.
(C) El flujo es transitorio, oscilando entre laminar y turbulento.
(D) El flujo podría ser cualquiera de los antes citados.

7.4 En un flujo turbulento por un tubo, la pérdida de carga:

(A) Varía con el cuadrado de la velocidad
(B) Es directamente proporcional al caudal
(C) Decrece con un aumento en el número de Reynolds
(D) Es directamente proporcional a la longitud del tubo

7.5 Las curvas para el factor de fricción f en el diagrama de Moody se vuelven horizontales para números de Reynolds lo suficientemente grandes porque:

(A) Los elementos rugosos en la pared sobresalen de la capa viscosa en la pared.
(B) La capa viscosa en la pared cubre por completo a los elementos viscosos en la pared.
(C) Los efectos viscosos se vuelven dominantes en el flujo.
(D) Los efectos inerciales dejan de ser significativos en el flujo.

7.6 La caída de presión a lo largo de 15 m de tubo de hierro galvanizado de 2 cm de diámetro se mide que es 60 Pa. Si el tubo es horizontal, calcule el caudal de agua. Use $\nu = 10^{-6}$ m^2/s..

(A) 6.82 L/s **(B)** 2.18 L/s
(C) 0.682 L/s **(D)** 0.218 L/s

7.7 Fluye agua por un tubo de 8 cm de diámetro por un plano inclinado a 30º y la presión permanece constante. Calcule la velocidad promedio en el tubo de hierro colado. Use $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

(A) 0.055 m/s
(B) 0.174 m/s
(C) 1.75 m/s
(D) 5.5 m/s

7.8 Un líquido con una densidad de 900 kg/m^3 fluye directamente hacia abajo por un tubo de hierro colado de 6 cm de diámetro. Calcule el aumento de presión a lo largo de 20 m de tubo si la velocidad promedio es 4 m/s. Suponga $\nu = 8 \times 10^{-6}$ m^2/s.

(A) 250 kPa
(B) 100 kPa
(C) 77 kPa
(D) 10.2 kPa

7.9 Un flujo de agua ocurre por un conducto cuadrado de hierro colado, de 4 cm por lado. Si el conducto horizontal transporta 0.02 m^3/s, calcule la caída de presión a lo largo de 40 m. Use $\nu = 10^{-6}$ m^2/s..

(A) 162 Pa **(B)** 703 Pa
(C) 1390 Pa **(D)** 1590 Pa

7.10 Se va a probar el nuevo diseño de una válvula. ¿Cuál de los siguientes parámetros es el más importante si fluye benceno líquido por la válvula?

(A) El número de Froude
(B) El número de Reynolds
(C) El número de Mach
(D) El número de Euler

7.11 Se instala un sistema de suministro de agua en una comunidad en un terreno que está bastante sinuoso. El ingeniero de diseño debe estar seguro de que:

(A) La línea de referencia hidráulica siempre debe estar arriba de la línea de la tubería.
(B) La línea de referencia de energía siempre debe estar arriba de la línea de la tubería.
(C) La presión de estancamiento debe permanecer positiva en la línea de la tubería.
(D) No debe permitirse que la elevación del tubo sea negativa.

7.12 Fluye agua por un canal de 2.4 m de ancho de concreto terminado, rectangular, a una profundidad de 80 cm. Si la pendiente es 0.002, el caudal está más cercano a

(A) 2.2 m^3/s
(B) 3.4 m^3/s
(C) 4.6 m^3/s
(D) 6.2 m^3/s

PROBLEMAS

Flujo laminar o turbulento

7.13 Calcule la velocidad promedio máxima V con la que agua a 20 ºC puede fluir por un tubo en estado laminar si el número de Reynolds crítico ($\mathrm{Re} = VD/\nu$) al que ocurre la transición es 2000; el diámetro del tubo es:
(a) 2 m **(b)** 2 cm **(c)** 2 mm

7.14 Agua a 20 ºC fluye por un río ancho. Usando un número de Reynolds crítico ($\mathrm{Re} = Vh/\nu$) al cual ocurre la transición de1 500, calcule la velocidad promedio V que resultará en un flujo laminar si la profundidad h del río es:
(a) 4 m **(b)** 1 m **(c)** 0.3 m

7.15 Agua a 50 ºF fluye en forma de una lámina delgada por un lote de estacionamiento a una profundidad de 0.2 pulgadas con una velocidad promedio de 1.5 ft/s. ¿Es laminar o turbulento el flujo?

7.16 Agua fluye, en apariencia bastante plácida, por un río de 20 m de ancho y 1.4 m de profundidad. Se observa que una hoja que flota en el río se mueve 1 m en 2 s. ¿Es laminar o turbulento el flujo? Vea el problema 7.14 para la definición del número de Reynolds.

7.17 Existe un flujo por un tubo de 2 cm de diámetro. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede ocurrir para agua a 20 ºC para un flujo laminar si:
(a) $\mathrm{Re} = 2000$? **(b)** $\mathrm{Re} = 40\,000$?

Entrada y flujo desarrollado

7.18 Calcule la longitud de entrada laminar en un tubo de 4 cm de diámetro si fluyen 2×10^{-4} m^3/s de agua a:
(a) 10 °C **(b)** 20 °C
(c) 40 °C **(d)** 80 °C

7.19 Se tiene que desarrollar un flujo laminar en una instalación experimental con aire a 20 ºC fluyendo por un tubo de 4 cm de diámetro. Calcule la velocidad promedio, la longitud del núcleo inviscido y la longitud de entrada si el número de Reynolds es:
(a) 1 000 **(b)** 80 000

7.20 Un tubo de 6 cm de diámetro sale de un tanque y suministra 0.025 m^3/s de agua a 20 ºC a un recipiente que está a 50 m de distancia. ¿Es aceptable la suposición de que se trata de un flujo desarrollado?

7.21 Un experimento de laboratorio está diseñado para crear un flujo laminar en un tubo de 2 mm de diámetro mostrado en la figura P7.21. Sale agua de un depósito por el tubo. Si se colectan 18 L en 2 horas, ¿puede despreciarse la longitud de la entrada?

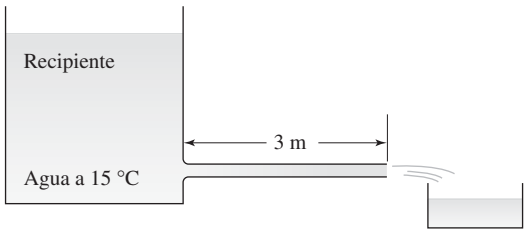


Fig. P7.21

7.22 Se usa aire a 23 ºC como fluido de trabajo en un proyecto de investigación de placas paralelas. Si las placas están separadas 1.2 cm, ¿cuál es la longitud de entrada más larga posible para tener un flujo laminar? ¿Cuál es la longitud de entrada más corta?

7.23 Aire a 25 ºC puede existir, ya sea en estado laminar o en estado turbulento (se utiliza un alambre de disparo cerca de la entrada para hacerlo turbulento), para flujo en un tubo de 6 cm de diámetro en un laboratorio de investigación. Si la velocidad promedio es 5 m/s, compare la longitud de la región de entrada para el flujo laminar con la del flujo turbulento.

7.24 Agua a 20 ºC fluye con una velocidad promedio de 0.2 m/s de un depósito a través de un tubo de 4 cm de diámetro. Calcule la longitud del núcleo inviscido y la longitud de entrada si el flujo es:
(a) Laminar
(b) Turbulento

7.25 Haga el bosquejo de un volumen de control incremental con longitud Δx y radio r_0 y demuestre que para un flujo laminar $(\Delta p/\Delta x)_{\text{entrada}} > (\Delta p/\Delta x)_{\text{desarrollado}}$.

7.26 Explique las variaciones de presión observadas para un flujo turbulento en la figura 7.3 para:
(a) Un flujo con Re alto ($\mathrm{Re} > 300\,000$)
(b) Un flujo con Re bajo ($\mathrm{Re} \simeq 10\,000$)
(c) Un flujo con Re intermedio

Flujo laminar en un tubo

7.27 Defina $p_k = p + \gamma h$ como la presión cinética y escriba la ecuación 7.3.5 o 7.3.11 en términos de p_k. ¿Podemos hacer $dp_x/dx = \Delta p_k/L$, donde L es la longitud a lo largo de la cual se mide Δp_k? Si es así, exprese $u(r)$ en términos de $\Delta p_k/L$.

7.28 Verifique que la ecuación 7.3.13, en realidad, esté correcta.

7.29 Se presenta una caída de presión de 0.07 psi sobre una sección de tubo de 0.8 pulgadas de diámetro que transporta agua a 70 ºF. Determine la longitud de la sección horizontal si el número de Reynolds es 1600. Además, encuentre el esfuerzo cortante en la pared y el factor de fricción.

7.30 Encuentre el ángulo θ del tubo de 10 mm de diámetro de la figura P7.30 en el que agua a 40 ºC fluye con Re = 1500 tal que no ocurre caída de presión. Además, encuentre el caudal.

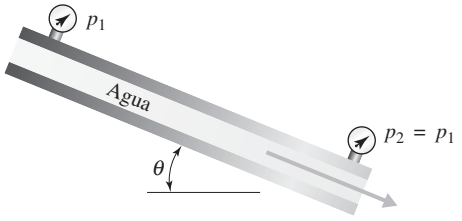


Fig. P7.30

7.31 Un líquido es bombeado por un tubo de 2 cm de diámetro a un caudal de 12 L/min. Calcule la caída de presión en una sección horizontal de 10 m si el líquido es:

(a) Aceite SAE-10W a 20 ºC
(b) Agua a 20 ºC
(c) Glicerina a 40 ºC

¿Es aceptable la suposición de que se trata de un flujo laminar?

7.32 Un líquido fluye sin caída de presión por un tubo vertical de 2 cm de diámetro. Encuentre el caudal si, suponiendo que se trata de un flujo laminar, el líquido es:

(a) Agua a 5 ºC
(b) Aceite SAE-30W a 25 ºC
(c) Glicerina a 20 ºC

¿Es aceptable la suposición de que se trata de un flujo laminar?

7.33 Debe existir un flujo laminar en un tubo que transporta 0.12 ft^3/s de aceite SAE-10W a 70 ºF. ¿Cuál es el diámetro máximo permisible? ¿Cuál es la caída de presión a lo largo de 30 ft de tubo horizontal para este diámetro?

7.34 Estime el caudal a través del tubo liso que se muestra en la figura P7.34. ¿Cuál es la longitud de la región de entrada? Suponga que se trata de un flujo laminar.

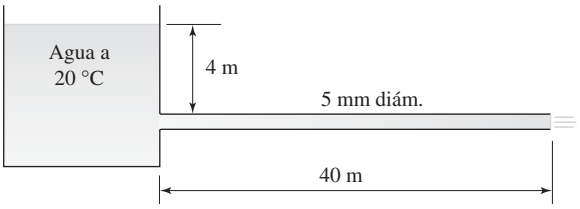


Fig. P7.34

7.35 Un fabricante de tubos de diámetro pequeño desea saber si los diámetros son, de hecho, precisos. Una instalación experimental, como la de la figura P7.34, se usa con un tubo horizontal de 4 m de largo que transporta agua a 20 ºC con una carga de 4 m. Si 3.4 L de agua se recolectan en 60 minutos, ¿cuál es el diámetro interior del tubo, haciendo caso omiso del efecto de la región de entrada? ¿Es realmente insignificante el efecto de la región de entrada?

7.36 Aire a 70 ºF fluye por un tubo horizontal de 0.8 pulgadas de diámetro. Calcule la caída de presión máxima en un tramo de 30 ft para un flujo laminar. Suponga que $\rho = 0.0024$ slug/ft^3.

7.37 Agua a 20 ºC fluye por el tubo de 4 mm de diámetro de la figura P7.37. El aumento de presión a lo largo del tramo de 10 m es de 6 kPa. Encuentre el número de Reynolds del flujo y el esfuerzo cortante en la pared. Suponga que se trata de un flujo laminar.

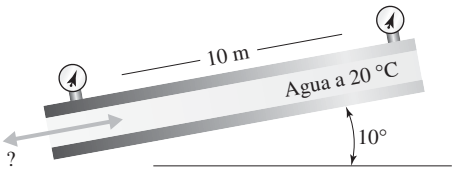


Fig. P7.37

7.38 Un experimento de investigación requiere que se tenga un flujo laminar de aire a 20 ºC por un tubo de 10 cm de diámetro con un número de Reynolds de 40 000. ¿Cuál es la velocidad máxima que debe esperarse? ¿Cuál podría ser la caída de presión a lo largo de una longitud horizontal de 10 m de flujo desarrollado? ¿Cuál sería la longitud de entrada? Use $\rho = 1.2$ kg/m^3.

7.39 Calcule el radio donde una sonda Pitot deba colocarse en el flujo laminar de líquido de la figura P7.39, de modo que el caudal esté dado por $\pi R^2\sqrt{2gH}$.

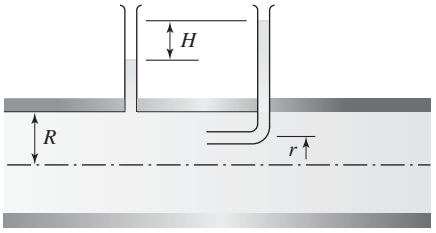


Fig. P7.39

7.40 Se presenta un flujo laminar de agua a 20 ºC por un tubo vertical de 2 mm de diámetro. Calcule el caudal si la presión es constante. ¿Es razonable suponer que se trata de un flujo laminar?

7.41 Fluye agua hacia abajo a razón de 4.0 litros/minuto por un tubo vertical de 40 mm de diámetro. (a) Determine la caída de presión a lo largo de una distancia de 10 metros. (b) Calcule la pérdida de carga por fricción por unidad de longitud. (c) ¿Cuál es el esfuerzo cortante en la pared del tubo? Use $\mu = 1.14 \times 10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$.

7.42 Encuentre el radio en un flujo laminar desarrollado en un tubo donde:

(a) La velocidad es igual a la velocidad promedio.

(b) El esfuerzo cortante es igual a la mitad del esfuerzo cortante en la pared.

7.43 Encuentre la relación entre el caudal total que pasa por un tubo de radio r_0 y el caudal que pasa por un anillo con radios interno y externo de $r_0/2$ y r_0. Suponga que se trata de un flujo laminar desarrollado con el mismo gradiente de presión.

7.44 Se obtiene un flujo laminar de agua a 60 ºF en un laboratorio de investigación con Re = 20 000 en un tubo horizontal de 2 pulgadas de diámetro. Calcule la pérdida de carga en un tramo de 30 ft del flujo desarrollado, el esfuerzo cortante en la pared y la longitud de la región de entrada.

7.45 Agua a 20 ºC fluye entre los dos tubos horizontales concéntricos de la figura P7.45 con diámetros de 2 cm y 3 cm. Se mide una caída de presión de 100 Pa a lo largo de una sección de 10 m de flujo laminar desarrollado. Encuentre el caudal y el esfuerzo cortante en el tubo interno.

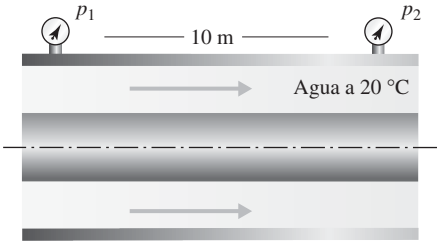


Fig. P7.45

7.46 Tiene que fluir aire a 20 ºC en el anillo entre dos tubos horizontales concéntricos, con diámetros respectivos de 2 cm y 3 cm, en forma tal que se presenta una caída de presión de 10 Pa a lo largo de una longitud de 10 m. Encuentre la velocidad promedio y el esfuerzo cortante en el tubo interno. Suponga que se trata de un flujo laminar desarrollado.

7.47 Circula un fluido por el anillo entre dos tubos horizontales concéntricos. El tubo interno se mantiene a una temperatura más alta que el tubo externo, de modo que la viscosidad en el anillo no puede suponerse que sea constante sino que $\mu = \mu(T)$. ¿Qué ecuación diferencial se resolvería para obtener $u(r)$ suponiendo que se trata de un flujo laminar desarrollado?

7.48 Demuestre que la distribución de la velocidad del ejemplo 7.2 se aproxima a la del flujo por un tubo cuando $r_1 \to 0$ y se aproxima a la del flujo entre placas paralelas cuando $r_1 \to r_2$.

Flujo laminar entre placas paralelas

7.49 Se tiene un flujo en un canal horizontal de $\frac{1}{2}$ in. × 20 in. con Re = 2000. Calcule el caudal si el fluido es:

(a) Agua a 60 ºF

(b) Aire atmosférico a 60 °F

7.50 Una tabla de 1 m × 1 m que pesa 40 N se desliza por el plano inclinado que se muestra en la figura P7.50 con una velocidad $V = 0.2$ m/s. Estime la viscosidad del fluido si θ es:

(a) 20º

(b) 30º

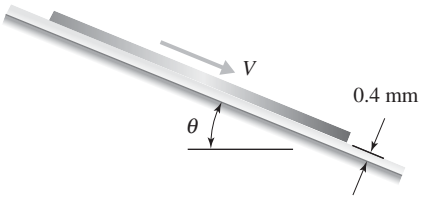


Fig. P7.50

7.51 Si se tiene agua a 20 ºC entre la placa y la superficie del problema 7.50. Calcule la velocidad de la placa (tabla) para un ángulo θ de:

(a) 20º

(b) 30º

7.52 Agua a 20 ºC fluye por un plano inclinado con un espesor de 6 mm y un ancho de 50 m. Calcule el caudal y el número de Reynolds suponiendo que se trata de un flujo laminar. Además, encuentre la velocidad máxima y el cortante en la pared.

7.53 Agua a 20 ºC fluye con un espesor de 10 mm y 100 m de ancho por un lote de estacionamiento con una pendiente de 0.00015. Determine el caudal y el número de Reynolds suponiendo que se trata de un flujo laminar. Además, calcule el factor de fricción y el cortante en la pared.

7.54 Se mide una caída de presión de 50 Pa a lo largo de un tramo de 60 m de longitud de un canal horizontal rectangular de 90 cm × 2 cm que transporta aire a 20 ºC. Calcule el caudal máximo y el número de Reynolds asociado. Use $\rho = 1.2$ kg/m^3.

7.55 En la figura P7.55, se mide una diferencia de presión de $p_A - p_B$ que es de 96 kPa. Encuentre el factor de fricción para el canal ancho suponiendo un flujo laminar. La dirección del flujo se desconoce.

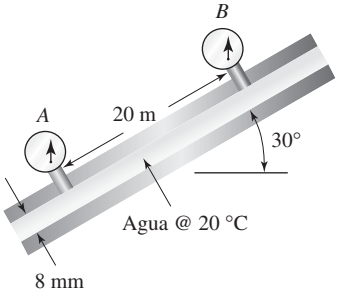


Fig. P7.55

7.56 Hay una abertura con dimensiones de 0.02 pulg × 4 pulg en el costado de 2 pulg de espesor de un recipiente a presión que contiene aceite SAE-10W a 80 ºF y 600 psi. ¿Cuál es el caudal máximo que puede salir de la abertura? Suponga que se trata de un flujo laminar desarrollado.

7.57 Fluye aire entre las placas paralelas como se muestra en la figura P7.57. Encuentre el gradiente de presión tal que:

(a) El esfuerzo cortante en la superficie superior sea cero.

(b) El esfuerzo cortante en la superficie inferior sea cero.

(c) El caudal sea cero.

(d) La velocidad en $y = 2$ mm es 4 m/s.

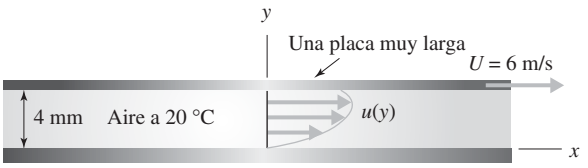


Fig. P7.57

7.58 Existe un gradiente de presión de –20 Pa/m en aire a 50 ºC que fluye entre placas paralelas horizontales separadas 6 mm. Encuentre la velocidad de la placa superior, de modo que:

(a) El esfuerzo cortante en la placa superior sea cero.

(b) El esfuerzo cortante en la superficie inferior sea cero.

(c) El caudal sea cero.

(d) La velocidad en $y = 2$ mm es 2 m/s.

7.59 Usando las ecuaciones de Navier-Stokes (a) determine una expresión para el perfil de la velocidad de un flujo, impulsado por presión entre dos placas paralelas horizontales separadas 10 mm entre sí. La placa inferior es fija, y la placa superior se mueve con una velocidad constante de 2 m/s. Suponga que se trata de un flujo permanente, laminar, incompresible de aceite con viscosidad de 0.4 N·s/m^2. (b) Con base en su respuesta del inciso (a), determine el gradiente de presión necesario para causar una velocidad cero a la mitad entre las placas.

7.60 Considere un flujo permanente, laminar, completamente desarrollado e incompresible entre dos placas paralelas inclinadas separadas una distancia h. La placa superior de la figura P7.60 se mueve hacia arriba con una velocidad constante U, y la placa inferior es fija. Empezando con las ecuaciones de Navier-Stokes, obtenga una expresión para la velocidad en el fluido entre las dos placas. Considere que dp/dx = constante con el flujo fluyendo hacia abajo.

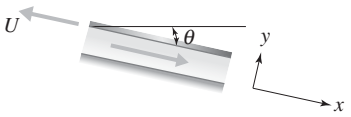


Fig. P7.60

7.61 Aceite con $\mu = 10^{-4}$ lb-s/ft^2 llena el espacio concéntrico entre la barra y la superficie mostrada en la figura P7.61. Encuentre la fuerza F si $V = 45$ ft/s. Suponga que $dp/dx = 0$.

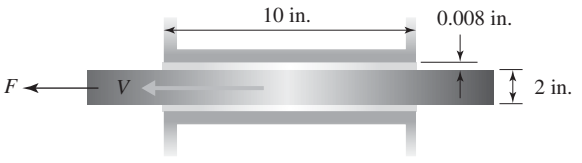


Fig. P7.61

7.62 Calcule el par de torsión T necesario para hacer girar la barra que se muestra en la figura P7.62 a 30 rad/s si el fluido que llena el espacio libre es aceite SAE-10W a 20 °C. Suponga un perfil de velocidad lineal.

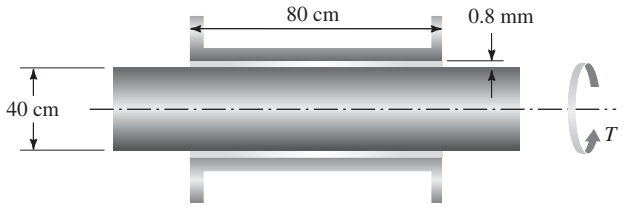


Fig. P7.62

7.63 Aceite con $\mu = 0.01$ N·s/m^2 llena el espacio libre mostrada en la figura P7.63. Estime el par de torsión necesario para girar el disco que se ilustra, suponiendo un perfil de velocidad lineal. ¿Es válida la suposición de que se trata de un flujo laminar? Use $S = 0.86$

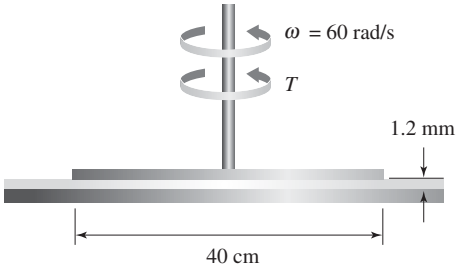


Fig. P7.63

7.64 Aproxime el par de torsión necesario para hacer girar el cilindro interno de 20 cm de diámetro que se muestra en la figura P7.64. Aceite SAE-30W a 20 °C llena el espacio libre. Suponga que se tiene un perfil de velocidad lineal.

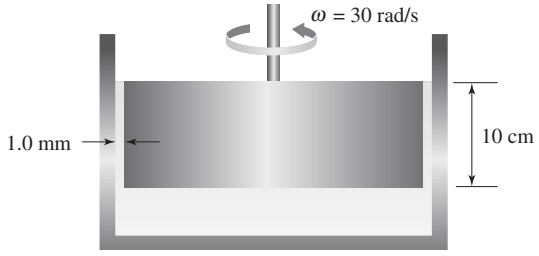


Fig. P7.64

7.65 Encuentre el par de torsión necesario para hacer girar el cono que se muestra en la figura P7.65 si aceite con $\mu = 0.01$ N·s/m^2 llena el espacio libre. Suponga que se tiene un perfil de velocidad lineal.

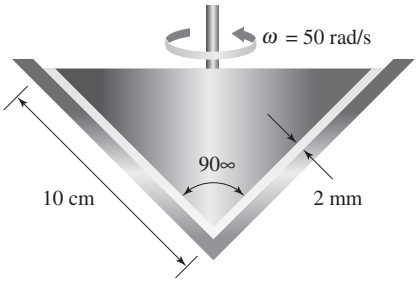


Fig. P7.65

7.66 Para crear un flujo con un número de Reynolds alto, el montaje del canal mostrado en la figura P7.66 fue propuesto por el Prof. John Foss de la Michigan State University. Es un canal presurizado, con lo cual se evitan fugas fatales que siempre están presentes en un canal de succión. (Un ventilador corriente arriba produce vórtices con sus aspas que hacen que un Re alto sea imposible de alcanzar.) Estime el requerimiento de potencia del ventilador 70% eficiente si el canal es de 1.2 m de ancho y Re = 7000.

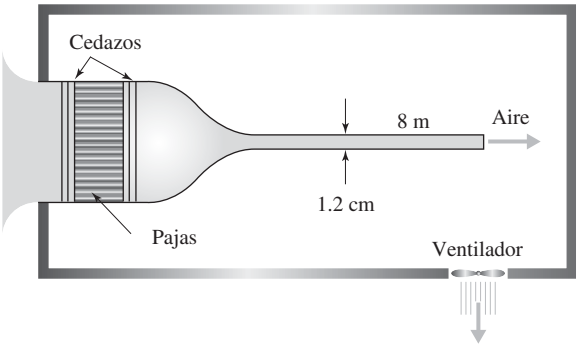


Fig. P7.66

Flujo laminar entre cilindros giratorios

7.67 Un largo cilindro de radio R gira en un gran contenedor de líquido. ¿Cuál es la distribución de la velocidad en el flujo laminar? Calcule el par de torsión necesario para hacer girar un cilindro de 2 pulgadas de diámetro y 40 pulgadas de largo a 1000 rpm si el líquido es agua a 60 °F. Suponga que se trata de un flujo laminar.

7.68 Aceite SAE-10W a 40 ºC llena el espacio libre entre dos cilindros concéntricos de 40 cm de largo con radios respectivos de 2 cm y 3 cm. ¿Qué par de torsión es necesario para hacer girar al cilindro interno a 3000 rpm si el cilindro externo está fijo? ¿Qué potencia se requiere? Verifique que la ecuación 7.5.17, en realidad, sea el perfil de la velocidad.

7.69 Se requiere un par de torsión de 0.015 N·m para hacer girar un cilindro de 4 cm de radio dentro de un cilindro fijo de 5 cm de radio a 40 rad/s. Los cilindros concéntricos son de 50 cm de largo. Calcule la viscosidad del fluido. Use $S = 0.9$. Verifique que la ecuación 7.5.17, en realidad, sea el perfil de la velocidad.

7.70 Encuentre una expresión para el par de torsión necesario para hacer girar el cilindro externo si el cilindro interno de la figura 7.6 está fijo.

7.71 Resuelva de nuevo el problema 7.62 usando la distribución de la velocidad de la ecuación 7.5.17 y calcule el porcentaje de error suponiendo un perfil de velocidad lineal.

Flujo turbulento

7.72 Promedie respecto al tiempo la ecuación diferencial de continuidad para un flujo incompresible y demuestre que resultan dos ecuaciones de continuidad: la ecuación de continuidad instantánea

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

y la ecuación de continuidad promediada respecto al tiempo

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

7.73 Encuentre una expresión para la diferencia entre la aceleración promediada respecto al tiempo $\overline{Du}/Dt$ y la cantidad $D\overline{u}/Dt$ partiendo del hecho de que

$$\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

7.74 Demuestre que la ecuación escrita en el problema 7.73 es en verdad válida. (*Sugerencia:* Use la ecuación de continuidad instantánea.)

7.75 Demuestre que la ecuación de Navier-Stokes de la componente x promedidada respecto al tiempo resulta en

$$\rho \frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}$$

para flujo desarrollado en un canal horizontal ancho. Usando $\overline{\tau}_{\text{lam}} = \mu(\partial\overline{u}/\partial y)$ y $\overline{\tau}_{\text{turb}} = -\rho\overline{u'v'}$, escriba la ecuación de Navier-Stokes promediada respecto al tiempo en términos de esfuerzos.

7.76 Las componentes de la velocidad en un punto en un flujo turbulento están dadas en la tabla 1. Encuentre $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ y $\overline{u'v'}$ en ese punto.

Tabla 1

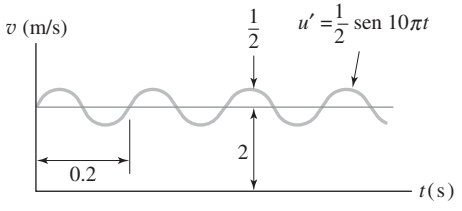
t (s)	u (m/s)	v (m/s)	t (s)	u (m/s)	v (m/s)
0.00	16.1	1.6	0.06	17.1	−1.4
0.01	25.7	−5.4	0.07	28.6	6.7
0.02	10.6	−8.6	0.08	6.7	−5.2
0.03	17.3	3.5	0.09	19.2	−8.2
0.04	5.2	4.1	0.10	21.6	1.5
0.05	10.2	− 6.0			

7.77 A largo de una pequeña distancia radial en un flujo turbulento desarrollado, la velocidad promediada respecto al tiempo como se da en la tabla siguiente. La caída de presión en una sección horizontal de 30 ft se mide que es de 8 psf. Encuentre $\overline{u'v'}$ en $r = 0.69$ ft. Fluye aire con $\rho = 0.0035$ slug/ft^3 y $\nu = 1.6 \times 10^{-4}$ ft^2/s.

r (ft)	0.60	0.63	0.69	0.72
$\overline{u}$ (ft/s)	81.4	76.9	70.2	60.7

7.78 Si en $r = 0.69$ ft para los datos del problema 7.77, medimos $\overline{u'^2} = 316$ ft^2/s^2 y $\overline{v'^2} = 156$ ft^2/s^2, ¿cuáles son las magnitudes de la viscosidad turbulenta, el coeficiente de correlación y la longitud de mezclado?

7.79 Las componentes de la velocidad se miden en un punto en un flujo laminar y se encuentra que son como se muestra en la figura P7.79. Encuentre $\overline{u'v'}$, η, l_m y K_{uv} si $d\overline{u}/dy = -10$ s^{-1} en el punto.



(a)

(*continúa en la página siguiente***)**

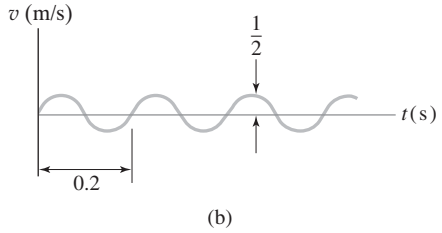


Fig. P7.79

7.80 Un tubo de 20 cm de diámetro con $e = 0.26$ mm transporta agua a 20 ºC. Determine si el tubo es liso o rugoso si la velocidad promedio es:
- **(a)** 0.02 m/s
- **(b)** 0.2 m/s
- **(c)** 2 m/s

7.81 Aceite SAE-30 a 40 ºC es transportado por un tubo de 10 cm de diámetro a una velocidad promedio de 6 m/s. ¿Cuál es el tamaño más grande permitido para el elemento rugoso si el tubo es hidráulicamente liso?

7.82 Calcule la velocidad máxima en el tubo del:
- **(a)** Problema 7.80a
- **(b)** Problema 7.80c

7.83 El perfil de la velocidad para agua a 20 ºC en un flujo turbulento en un tubo liso de 10 cm de diámetro está aproximado por $\overline{u} = 9.2y^{1/7}$ m/s. Encuentre:
- **(a)** El cortante en la pared
- **(b)** El gradiente de velocidad $d\overline{u}/dy$ en la pared
- **(c)** El gradiente de presión
- **(d)** El valor de η en $r = 2.5$ cm

7.84 Agua a 70 ºF fluye por un tubo horizontal de 5 pulgadas de diámetro a razón de 2.5 ft^3/s. Encuentre la constante n en el exponente de la ecuación 7.6.19. ¿Cuál es la velocidad máxima?

7.85 Demuestre que el factor de corrección por energía cinética es 1.10 para $n = 5$ y 1.03 para $n = 10$ usando $u = u_{máx}(y/r_0)^{1/n}$ en un tubo circular.

7.86 Agua a 20 ºC fluye por un tubo de 10 cm de diámetro con una velocidad promedio de 10 m/s. Usando $u = u_{máx}(y/r_0)^{1/n}$ con $n = 7$, trace el cortante viscoso y el cortante turbulento como una función de r. Además, encuentre $d\overline{p}/dx$.

7.87 Aceite SAE-10W a 10 ºC es transportado por un tubo liso de 80 cm de diámetro a razón de 1.2 m^3/s.
- **(a)** Encuentre el número de Reynolds.
- **(b)** Encuentre el factor de fricción.
- **(c)** Encuentre la velocidad máxima usando la ecuación 7.6.20.
- **(d)** Encuentre el espesor de la capa viscosa en la pared.
- **(e)** Compare el inciso (c) con la solución usando el perfil de velocidad logarítmico.

7.88 Sea el tubo del problema 7.87 un tubo de hierro colado (la figura 7.13 da un valor para e). Estime la velocidad máxima usando el perfil de velocidad logarítmico.

7.89 Se mide una caída de presión de 1.5 psi, con manómetros colocados a 15 ft entre sí, en un tubo liso horizontal de 4 pulgadas de diámetro que transporta agua a 100 ºF. Estime:
- **(a)** El cortante en la pared
- **(b)** La velocidad máxima
- **(c)** La velocidad promedio
- **(d)** El número de Reynolds
- **(e)** El caudal

7.90 Un tubo horizontal de 12 cm de diámetro transporta aceite SAE-10 a 10 ºC. Calcule el cortante en la pared, la velocidad promedio y el caudal, si la caída de presión a lo largo de una sección de 10 m del tubo se mide y es:
- **(a)** 5 kPa
- **(b)** 20 kPa
- **(c)** 200 kPa

7.91 Trace una gráfica lineal (no semilogarítmica) del perfil de la velocidad del flujo del problema 7.89 usando:
- **(a)** El perfil de logaritmo
- **(b)** El perfil exponencial

Flujo turbulento en tubos y conductos

7.92 Agua a 20 ºC fluye por un tubo de plástico de 8 cm de diámetro con un caudal de 20 L/s. Determine el factor de fricción usando (a) el diagrama de Moody y (b) la ecuación 7.6.26.

7.93 Se registra un caudal de 0.03 m^3/s de agua a 15 ºC por un tubo de hierro colado de 10 cm de diámetro. Determine el factor de fricción usando (a) el diagrama de Moody, y (b) una de las ecuaciones (7.6.26) a la (7.6.28).

7.94 Agua a 20 ºC fluye por un tubo de hierro colado de 4 cm de diámetro. Determine el factor de fricción, usando el diagrama de Moody si la velocidad promedio es:
- **(a)** 0.025 m/s
- **(b)** 0.25 m/s
- **(c)** 2.5 m/s
- **(d)** 25 m/s

7.95 Se tiene un caudal de 0.02 m^3/s por un tubo de hierro colado de 10 cm de diámetro. Usando el diagrama de Moody, calcule la caída de presión a lo largo de una sección horizontal de 100 m si el tubo transporta:
- **(a)** Agua a 20 ºC
- **(b)** Glicerina a 60 ºC
- **(c)** Aceite SAE-30W a 30 ºC
- **(d)** Keroseno a 10 ºC

Compare cada respuesta con la obtenida usando la ecuación 7.6.29.

7.96 Agua a 60 ºF fluye por un tubo de 1.5 pulgadas de diámetro con un caudal de 0.06 ft^3/s. Usando el diagrama de Moody, determine la pérdida de carga a lo largo de una sección de 600 ft si el tubo es:
- **(a)** Hierro colado
- **(b)** Hierro galvanizado
- **(c)** Hierro forjado
- **(d)** Plástico

7.97 Un flujo másico de 1.2 kg/s se tiene por un tubo de plástico de 10 cm de diámetro a 20 ºC y 500 kPa absoluta. Suponga que se trata de un flujo incompresible y usando el diagrama de Moody, encuentre la caída de presión a lo largo de una sección de 100 m del tubo si el fluido que fluye es:
- **(a)** Aire
- **(b)** Dióxido de carbono
- **(c)** Hidrógeno

7.98 Aceite SAE-30W fluye a razón de 0.08 m^3/s por un tubo horizontal de hierro galvanizado de 15 cm de diámetro. Encuentre la caída de presión a lo largo de 100 m si la temperatura del aceite es:
- **(a)** 0 ºC **(b)** 30 ºC
- **(c)** 60 ºC **(d)** 90 ºC

Compare cada respuesta con la que se obtiene usando la ecuación 7.6.29.

7.99 Seleccione el material, listados en la figura 7.13, del cual es probable que cada uno de los siguientes tubos esté hecho. Cada tubo de 5 cm de diámetro es probado con agua a 20 ºC usando un caudal de 400 L/min. Se miden las siguientes caídas de presión a lo largo de un tramo de 10 m de tubo horizontal:
- **(a)** Tubo 1: 36 kPa
- **(b)** Tubo 2: 24 kPa
- **(c)** Tubo 3: 19 kPa

7.100 Agua a 50 ºF sube por un plano inclinado a 30º, por un tubo de plástico de 2.5 pulg de diámetro, con un caudal de 0.3 ft^3/s. Encuentre el cambio de presión a lo largo de un tramo de 300 ft del tubo.

7.101 Agua a 40 ºC fluye por una sección horizontal de tubo de hierro forjado de 5 cm de diámetro, con un caudal de 0.02 m^3/s. ¿Se comporta el tubo como un tubo liso, o su rugosidad es importante?

7.102 Un tubo de concreto de 80 cm de diámetro transporta agua de lluvia a 20 ºC a razón de 5 m^3/s. ¿Qué caída de presión es de esperarse a lo largo de una sección de 100 m de tubo horizontal?

7.103 Una caída de presión de 500 kPa no ha de excederse a lo largo de un tramo de 200 m de un tubo horizontal de hierro colado de 10 cm de diámetro. Calcule el caudal máximo si el fluido es:
- **(a)** Agua a 20 ºC
- **(b)** Glicerina a 20 ºC
- **(c)** Aceite SAE-10W a 20 ºC
- **(d)** Keroseno a 20 ºC

7.104 Una caída de presión de 200 kPa no ha de excederse a lo largo de un tramo de 100 m de longitud de un tubo horizontal de 4 cm de diámetro. Estime el caudal máximo si se transporta agua a 20 ºC y el tubo es de:
- **(a)** Hierro colado
- **(b)** Hierro forjado
- **(c)** Plástico

7.105 Despreciando todas las pérdidas excepto la debida a la fricción en la pared, estime el caudal a través del tubo mostrado en la figura P7.105 si el diámetro es:
- **(a)** 4 cm
- **(b)** 8 cm
- **(c)** 12 cm
- **(d)** 16 cm

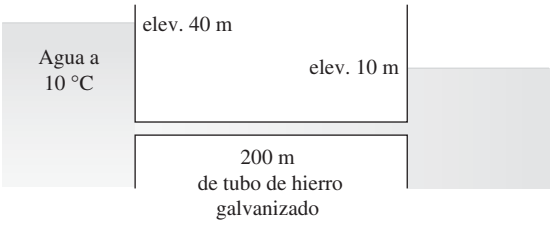


Fig. P7.105

7.106 Una caída de presión de 400 Pa es permisible en un flujo de gas en una sección horizontal de 400 m de tubo de hierro forjado de 12 cm de diámetro. Si la temperatura y la presión son 40 ºC y 200 kPa absoluta, encuentre el flujo másico máximo si el gas es:
- **(a)** Aire
- **(b)** Dióxido de carbono
- **(c)** Hidrógeno

7.107 Una caída de presión de 30 psi no ha de excederse a lo largo de un tramo de 600 ft de tubo horizontal, de concreto de 4 ft de diámetro, que transporta agua a 60 ºF. ¿Qué caudal puede adecuarse? Use:
- **(a)** El diagrama de Moody
- **(b)** La ecuación 7.6.30

7.108 Estime la medida de la tubería de plástico que debe seleccionarse si han de transportarse 0.002 m³/s de fluido, de forma que la caída de presión no exceda 200 kPa en una sección horizontal de 100 m. El fluido es:

(a) Agua a 20 ºC
(b) Glicerina a 60 ºC
(c) Keroseno a 20 ºC
(d) Aceite SAE-10W a 40 ºC

7.109 Seleccione la medida de un tubo de concreto que transportará 5 m³/s de agua a 20 ºC, de modo que la pérdida de carga no exceda 20 m a lo largo de una sección horizontal de 300 m de tubo. Use:

(a) El diagrama de Moody
(b) La ecuación 7.6.31

7.110 Un agricultor desea extraer agua a 10 ºC, por medio de un sifón, de un lago situado a 1200 m a un campo que está a una distancia de 3 m bajo la superficie del lago. ¿Qué medida de tubería estirada debe seleccionarse si se desea extraer 400 L de agua por minuto? Use:

(a) El diagrama de Moody
(b) La ecuación 7.6.31

Desprecie todas las pérdidas excepto la debida a la fricción en la pared. ¿Es también insignificante la energía cinética de salida?

7.111 Se transportará aire atmosférico a 30 ºC por un conducto cuadrado de lámina metálica (lisa) a razón de 4 m³/s. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del conducto para que la pérdida hidráulica no exceda 10 m a lo largo de un tramo horizontal de 200 m?

7.112 Agua a 20 ºC se transporta a través de un conducto liso de 2 cm × 4 cm y experimenta una caída de presión de 80 Pa a lo largo de un tramo horizontal de 2 m. ¿Cuál es el caudal?

7.113 Un conducto de plástico de 4 cm × 10 cm transporta agua a 20 ºC. Si se mide una caída de presión de 100 Pa con manómetros situados a 5 m entre sí en una sección horizontal, encuentre el caudal.

7.114 Un canal abierto rectangular de concreto de 1.2 m de ancho (use e = 1.5 mm) transporta agua a 20 ºC de un depósito a un lugar situado a 10000 m de distancia. Usando el diagrama de Moody, estime el caudal si el canal está sobre una pendiente de 0.0015 y el tirante de agua es:

(a) 0.3 m **(b)** 0.6 m **(c)** 0.9 m

Pérdidas menores

7.115 Si el coeficiente de pérdida para una expansión repentina está basado en la velocidad de salida V_2, determine el coeficiente de pérdida en términos de A_1 y A_2.

7.116 Explique, con referencia a la ecuación 3.4.15, por qué existen las regiones de alta y baja presión en la figura 7.14. Además, haga un bosquejo del perfil de la velocidad desde la esquina interna de la curva hasta el exterior de la curva, a lo largo de una recta de B a C como se indica en la figura P7.116. Explique por qué resulta un flujo secundario después de la curva.

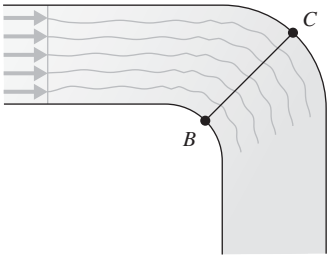
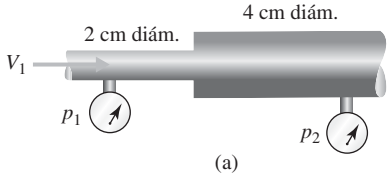
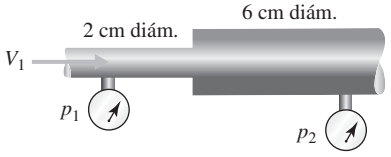


Fig. P7.116

7.117 Para cada sistema mostrado en la figura P7.117, encuentre p_2 si Q = 0.02 m³/s de aire a 20 ºC y p_1 = 50 kPa.



(a)

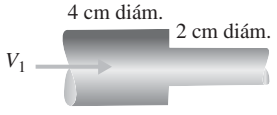


(b)

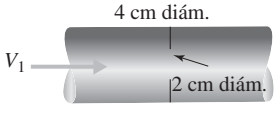
Fig. P7.117

7.118 Sustituya el ensanchamiento repentino del problema 7.117 con un ángulo de expansión de 20º y vuelva a resolver el problema.

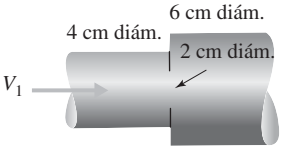
7.119 Para cada sistema mostrado en la figura P7.119, estime el coeficiente de pérdida basado en V_2 usando los datos de la figura 7.16.



(a)



(b)



(c)

Fig. P7.119

7.120 El caudal medido a través del tubo que se muestra en la figura P7.120 es de 0.12 ft³/s. Encuentre el coeficiente de la válvula. Desprecie la fricción en la pared.

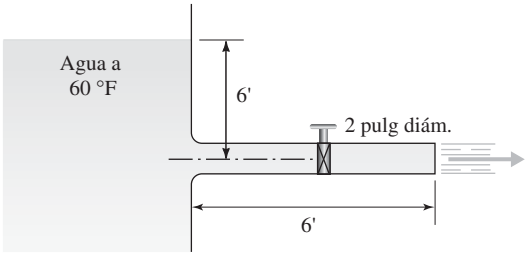


Fig. P7.120

7.121 El caudal medido a través del tubo que se muestra en la figura P7.121 es de 6 L/s. Encuentre el coeficiente de pérdida de la válvula si H es:

(a) 4 cm **(b)** 8 cm

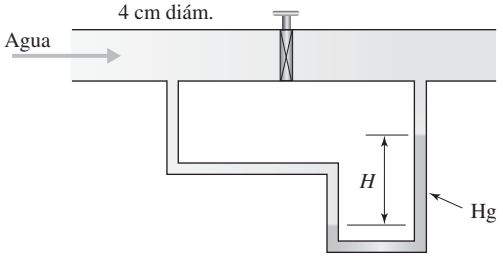


Fig. P7.121

Sistemas de tuberías simples

7.122 Encuentre el caudal del tubo mostrado en la figura P7.122. Trace la EGL y la HGL.

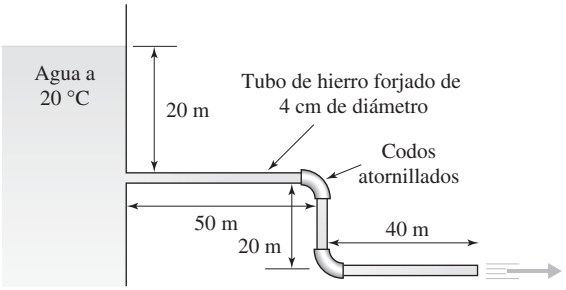


Fig. P7.122

7.123 Agua a 70 ºF fluye por un tubo horizontal de hierro colado de 4 pulgadas de diámetro y 1200 ft de largo, que está conectado a un depósito con entrada a escuadra. Una válvula de globo atornillada que controla el flujo está semiabierta. Encuentre el caudal si la elevación del depósito sobre la salida del tubo es:

(a) 15 ft
(b) 30 ft
(c) 60 ft

7.124 Estime el caudal esperado por el sifón de plástico mostrado en la figura P7.124 si su diámetro es:

(a) 4 cm **(b)** 8 cm **(c)** 12 cm

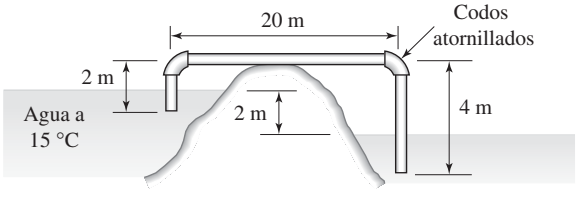


Fig. P7.124

7.125 Para la tubería de hierro colado mostrada en la figura P7.125, calcule el caudal y la presión mínima y trace la HGL y la EGL si:

(a) $H = 10$ m
(b) $H = 20$ m
(c) $H = 30$ m

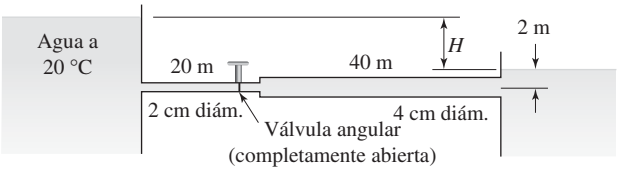


Fig. P7.125

7.126 De una tina de baño sale agua a 35 ºC por un tubo de plástico de 2.5 cm de diámetro a un tubo grande de drenaje lleno de aire. Hay dos codos atornillados en el tubo de 10 m. Si el tubo de drenaje está a 0.8 m bajo el nivel del agua en la tina, estime cuánto tiempo tardará en drenar 10 L de agua.

7.127 Un tubo de plástico de 3 cm de diámetro con codos atornillados se usa para extraer agua con un sifón, como se muestra en la figura P7.127. Estime la altura máxima H para la cual funcionará el sifón.

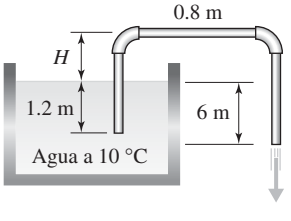


Fig. P7.127

7.128 Un aspersor de césped de 12 L se llena con 8 L de agua a 20 ºC. Mide 1.2 m de alto y tiene un tubo de cobre de 8 mm de diámetro ($e \simeq 0$) que llega al fondo (es un poco corto). Una manguera lisa de 1.2 m de largo y 5 mm de diámetro se conecta al tubo de cobre. La manguera termina con una boquilla de 2 mm de diámetro. Si el aspersor está presurizado a 100 kPa, estime la velocidad inicial de salida de la boquilla.

7.129 ¿Cuál es el caudal máximo que sale por el tubo que se muestra en la figura P7.129 si la diferencia de elevación de las superficies de los embalses es:

(a) 80 m

(b) 150 m

(c) 200 m

7.130 Un tubo de plástico de 9.4 mm y 60 m de largo transporta agua a 20 ºC desde un manantial hasta un estanque situado a 3 m abajo, similar a la situación mostrada en el problema 7.129. Se observa que el agua alterna entre una corriente de movimiento relativamente rápido a una corriente de movimiento relativamente lento. Explique este fenómeno con cálculos de apoyo.

7.131 Se tiene que bombear agua a 60 ºF a través de 900 ft de tubo de hierro colado desde un depósito hasta un dispositivo que está 30 ft arriba de la superficie del depósito. El agua tiene que entrar al dispositivo a 30 psi. Los componentes atornillados incluyen dos codos, una entrada a escuadra y una válvula angular. Si el caudal tiene que ser de 0.6 ft³/s, ¿qué potencia de la bomba se requiere (suponga 80% de eficiencia) si el diámetro del tubo es:

(a) 1.5 pulg?

(b) 3 pulg?

(c) 4.5 pulg?

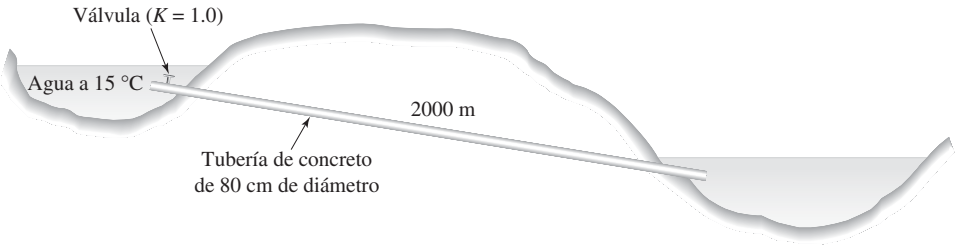


Fig. P7.129

7.132 ¿Qué potencia de la bomba (85% eficiente) es necesaria para obtener un caudal de 0.01 m³/s en el tubo que se muestra en la figura P7.132? ¿Cuál es la distancia máxima desde el depósito izquierdo a la que la bomba pueda ubicarse?

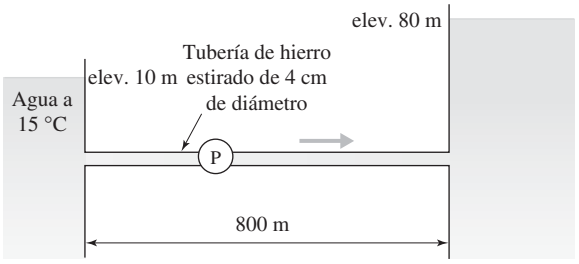


Fig. P7.132

7.133 Se obtiene un caudal de 2 m³/s en el tubo mostrado en la figura P7.133. ¿Cuál es la salida de potencia esperada de la turbina (85% eficiente) si la diferencia de elevación de las superficies de los depósitos es:

(a) 20 m **(b)** 60 m **(c)** 100 m

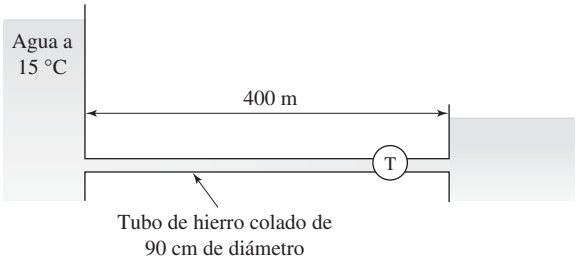


Fig. P7.133

7.134 ¿Qué potencia de la bomba (75% eficiente) es necesaria en la tubería mostrada en la figura P7.134? ¿Cuál es la distancia máxima desde el depósito a la que la bomba puede colocarse?

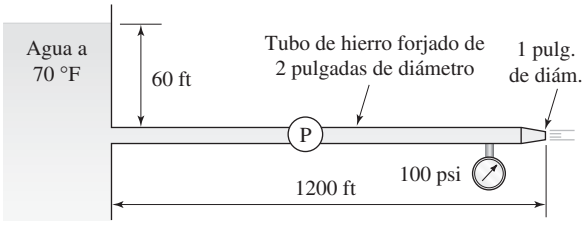


Fig. P7.134

7.135 La bomba de la figura P7.135 tiene las curvas características mostradas en el ejemplo 7.18.

(a) Estime el caudal y la potencia requerida por la bomba.

(b) Trace la EGL y la HGL.

(c) Si es posible que haya cavitación, determine la distancia máxima desde el depósito para colocar la bomba.

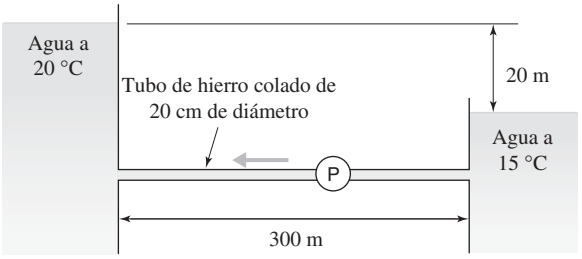


Fig. P7.135

7.136 Invierta la dirección del flujo en el problema 7.135 y vuelva a resolver el problema.

7.137 Una turbina sustituye a la bomba del problema 7.135. Estime la salida de potencia si $\eta_T = 0.88$. La curva característica de la turbina es $H_T = 0.8Q$, donde H_T está medida en metros y Q en L/s.

7.138 La bomba que se muestra en la figura P7.138 tiene las curvas características mostradas en el ejemplo 7.18. Estime el caudal y

(a) Calcule el requerimiento de potencia de la bomba.

(b) Calcule la presión a la entrada de la bomba.

(c) Calcule la presión a la salida de la bomba.

(d) Trace la EGL y la HGL.

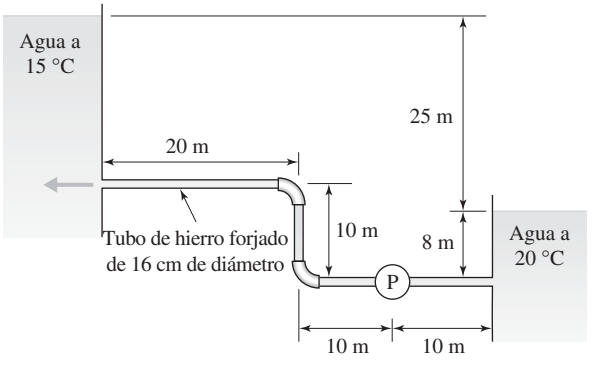


Fig. P7.138

7.139 Invierta la dirección del flujo en el problema 7.138 y vuelva a resolver el problema.

7.140 En el sistema de filtración que se muestra en la figura P7.140, se hace circular agua en forma permanente a través de un filtro usando una bomba. La curva característica de la bomba está dada por $H_p = 10 + 12Q - 150Q^2$, donde H_p está en metros y Q en m³/s. En el sistema se usa un tubo de 10 cm de diámetro. La longitud total del tubo usado es de 60 m, y el factor de fricción del tubo es $f = 0.04$. Determine el caudal y la entrada de potencia para la bomba. Todas las curvas son codos angulares a 90° sin paletas.

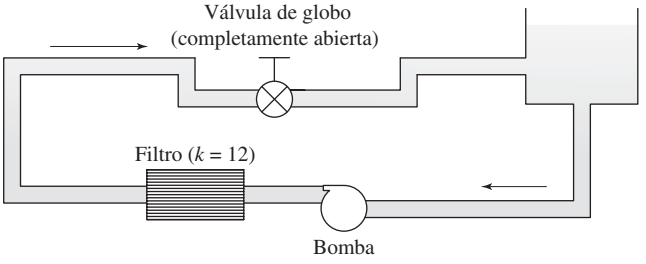
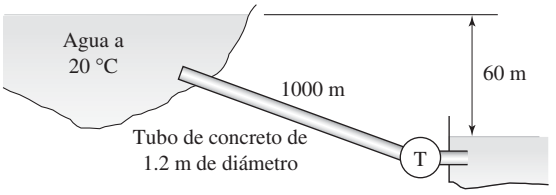
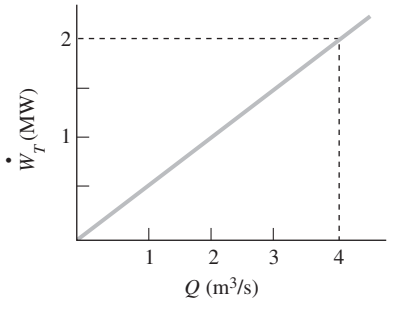


Fig. P7.140

7.141 Una turbina con la curva característica que se muestra en la figura P7.141 se inserta en la tubería. Calcule la salida de potencia de la turbina. Suponga que $\eta_T = 0.90$.



(a)



(b)

Fig. P7.141

Flujo en canal abierto

7.142 Usando un volumen de control que rodee un tramo finito del líquido en un canal que fluye con una profundidad constante, encuentre el esfuerzo cortante promedio en las paredes si fluye agua por un canal rectangular de 10 ft de ancho con una profundidad de 6 ft. La pendiente es de 0.001.

7.143 Usando el método mencionado en el problema 7.142, determine el esfuerzo cortante promedio en la porción de la pared de un conducto circular de 40 cm de diámetro en contacto con el agua, que está fluyendo con una profundidad constante de 10 cm. La pendiente es de 0.0016.

7.144 Calcule el caudal por un canal rectangular de madera cepillada, de 2 m de ancho, con una pendiente de 0.001 si su profundidad es de 60 cm. Use:

(a) La ecuación de Chezy-Manning

(b) La ecuación de Darcy-Weisbach

7.145 Por un conducto de concreto terminado de 6 ft de diámetro fluye agua. La pendiente del conducto es de 0.0012. Calcule el caudal si la profundidad del flujo es:

(a) poco menos de 6 ft

(b) 5.7 ft

(c) 3 ft

(d) 1.5 ft

(e) 0.5 ft

7.146 Para el canal que se muestra en la figura P7.146, encuentre el caudal y la velocidad promedio si $S = 0.001$ usando:

(a) La ecuación de Chezy-Manning

(b) La ecuación de Darcy-Weisbach

Fig. P7.146

7.147 ¿A qué profundidad fluirán 5 m³/s de agua por un canal rectangular de ladrillo de 2 m de ancho con $S = 0.001$? Use:

(a) La ecuación de Chezy-Manning

(b) La ecuación de Darcy-Weisbach

7.148 La sección transversal de un río recto es aproximadamente como se muestra en la figura P7.148. ¿A qué profundidad fluirán 100 m³/s de agua? La pendiente es de 0.001.

Fig. P7.148

7.149 Para el canal mostrado en la figura P7.149, si $S = 0.0016$, encuentre la profundidad del flujo si $Q = 10$ m³/s y el canal está construido con:

(a) Madera cepillada

(b) Ladrillo

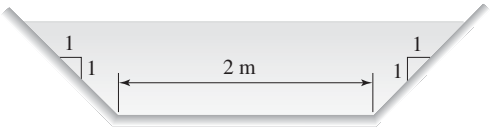


Fig. P7.149

7.150 Por un tubo de drenaje de 4 ft de diámetro fluye agua a un caudal de 24 ft³/s. Estime la profundidad si la pendiente es 0.001.

7.151 Por un tubo de drenaje de 80 cm de diámetro fluye agua a un caudal de 0.2 m³/s. Determine la profundidad si la pendiente es 0.001.

Un dirigible es una nave más ligera que el aire, que tiene líneas aerodinámicas para reducir las fuerzas de resistencia al avance que se encuentran durante su movimiento hacia adelante. Los dirigibles grandes, quizá hasta de 1000 pies de largo, podrían usarse como naves crucero para viajar por el mundo. ¡Los mareos se evitarían! (Cortesía de The Goodyear Tire & Rubber Company)

8

Flujos externos

Esquema

8.1 Introducción
8.2 Separación
8.3 Flujo alrededor de cuerpos sumergidos
  8.3.1 Coeficientes de arrastre
  8.3.2 Formación de vórtices
  8.3.3 Perfilado
  8.3.4 Cavitación
  8.3.5 Masa agregada
8.4 Sustentación y resistencia al avance en superficies aerodinámicas
8.5 Teoría del flujo potencial
  8.5.1 Ecuaciones de flujo básicas
  8.5.2 Soluciones simples
  8.5.3 Superposición
8.6 Teoría de la capa límite
  8.6.1 Antecedentes generales
  8.6.2 Ecuación integral de Von Kármán
  8.6.3 Solución aproximada para la capa límite laminar
  8.6.4 Capa límite turbulenta: Forma de la ley exponencial
  8.6.5 Capa límite turbulenta: Forma empírica
  8.6.6 Ecuaciones para la capa límite laminar
  8.6.7 Efectos del gradiente de presión
8.7 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Analizar los flujos separados y adheridos.
- Introducir los coeficientes de sustentación, de arrastre y de resistencia al avance.
- Determinar el arrastre y la resistencia al avance en cuerpos diversos.
- Estudiar la influencia de la formación de vórtices y el perfilado.
- Determinar cuándo está presente la cavitación.
- Calcular la sustentación y la resistencia al avance en superficies aerodinámicas.
- Superponer flujos potenciales simples para construir flujos de interés.
- Analizar capas límite laminares y turbulentas sobre una placa plana.
- Dar numerosos ejemplos y problemas que demuestren la forma en que las diversas cantidades de interés se determinan para los muchos flujos externos estudiados en este capítulo.

8.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de los flujos externos es de particular importancia para el ingeniero en aeronáutica en el análisis del flujo de aire alrededor de los diversos componentes de una aeronave. De hecho, buena parte del conocimiento actual de los flujos externos se ha obtenido de estudios motivados por esos problemas de aerodinámica. Pero también hay un considerable interés de otros ingenieros en los flujos externos, por ejemplo el del flujo de fluido alrededor de álabes de turbinas, automóviles, edificios, estadios deportivos, chimeneas, gotitas de aspersores, estribos de puentes, oleoductos submarinos, sedimento de ríos y glóbulos rojos sugieren una variedad de fenómenos que pueden entenderse sólo desde la perspectiva de los flujos externos.

Es tarea difícil determinar el campo de flujo externo a un cuerpo y la distribución de la presión en la superficie de un cuerpo, aun para la geometría más simple. Para exponer este tema, considere los flujos con número de Reynolds bajo (Re < 5 más o menos) y los flujos con número de Reynolds alto (Re > 1000). Los flujos con número de Reynolds bajo, llamados *flujos deslizantes* o *flujos de Stokes*, raras veces se presentan en aplicaciones de ingeniería (el flujo alrededor de gotitas de aspersores y glóbulos rojos, la lubricación en espacios libres pequeños y el flujo en medios porosos serían excepciones) y no se presentan en este libro; se dejan para el especialista. Dirigiremos nuestra atención sólo a los flujos con números de Reynolds altos. No obstante, en la figura 8.1 se muestra un flujo de Stokes.

Los flujos con número de Reynolds alto pueden subdividirse en tres categorías principales: (1) flujos incompresibles sumergidos, que comprenden objetos como automóviles, helicópteros, submarinos, aviones de baja velocidad, despegue y aterrizaje de aviones comerciales, edificios y álabes de turbinas; (2) flujos de líquidos que involucran una superficie libre como la que experimenta un barco o el estribo de un puente; y (3) flujos compresibles que comprenden objetos de alta velocidad ($V > 100$ m/s) como aviones, cohetes y balas. En este capítulo concentraremos nuestra atención en la primera categoría de flujos y consideraremos casos en los que

CONCEPTO CLAVE *Los flujos con número de Reynolds bajo raras veces se presentan en aplicaciones de ingeniería.*

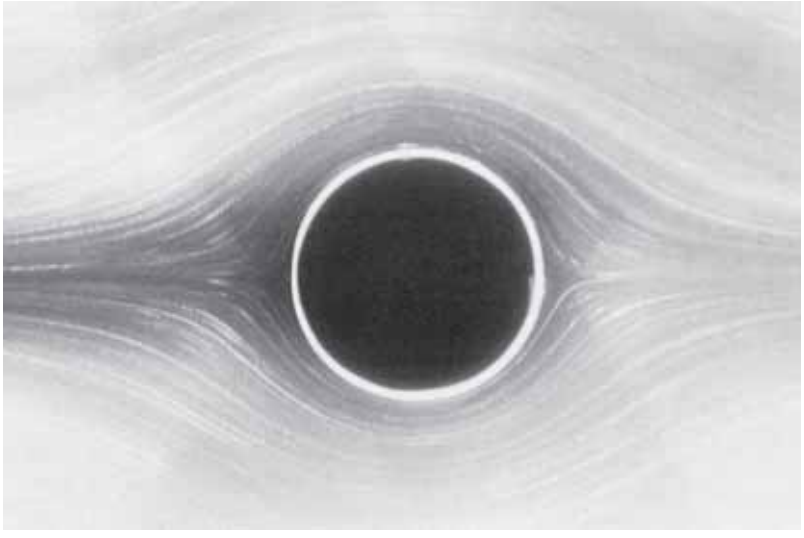


Fig. 8.1 Flujo que pasa por un cilindro circular con Re = 0.16. El flujo es de izquierda a derecha. Se asemeja superficialmente a la forma de un flujo potencial. El flujo del agua se muestra utilizando polvo de aluminio. (Fotografía de Sadatoshi Taneda, de *Album of Fluid Motion*, 1982, The Parabolic Press, Stanford, California.)

un cuerpo está alejado de una frontera sólida o de otros cuerpos. El flujo es considerablemente influido por la presencia de una frontera o de otro objeto, como se muestra en la figura 8.2; en el inciso (d) el objeto esbelto debe estar al menos a una distancia de cinco cuerpos debajo de la superficie libre, antes de que los efectos de la superficie libre puedan pasarse por alto. Los flujos como los mostrados en la figura 8.2 no se incluyen en una presentación introductoria.

Los flujos sumergidos incompresibles con número de Reynolds alto se dividen en dos categorías: flujos alrededor de cuerpos despuntados y flujos alrededor de cuerpos perfilados, como se muestra en la figura 8.3. La capa límite (vea la sección 3.3.2) cerca del punto de estancamiento es una capa límite laminar y, para un número de Reynolds lo suficientemente grande, experimenta una transición corriente abajo a una capa límite turbulenta, como se ilustra; el flujo puede separarse del cuerpo y formar una **región separada**, que es una región de flujo recirculante, como se muestra para el cuerpo despuntado, o simplemente deja de tener contacto con el cuerpo perfilado en el borde de salida (aquí puede haber una pequeña región separada). La **estela**, que se caracterizada por un *defecto de velocidad* es una región creciente (difusión) y sigue de cerca al cuerpo, como se ilustra. Las fronteras de la estela, la región separada, y la capa límite turbulenta dependen en gran medida del tiempo; en el diagrama, la ubicación promediada respecto al tiempo de la estela está ilustrada por las líneas discontinuas. Los esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad están concentrados en la delgada capa límite, la región separada y la estela; fuera de estas regiones el flujo se aproxima mediante un flujo inviscido.

De la figura puede suponerse que la región separada no intercambia masa con la corriente libre puesto que la masa no cruza una línea de corriente, pero cuando se ve instantáneamente, la línea de corriente separada depende en gran medida del tiempo, y debido a este carácter inestable la región separada puede intercambiar masa lentamente con la corriente libre.

Flujo que pasa por un cilindro circular, 116, 131, 190

Región separada: *Región de flujo recirculante.*

Estela: *Región de defecto de velocidad que crece debido a la difusión.*

Flujo sobre una superficie aerodinámica, 649

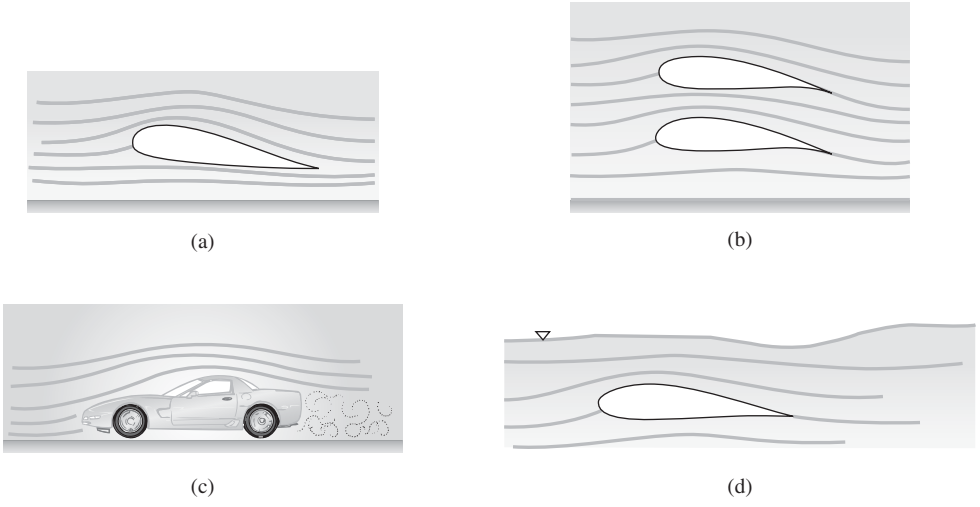


Fig. 8.2 Ejemplos de flujos sumergidos complicados: (a) flujo cerca de una frontera sólida; (b) flujo entre dos álabes de turbina; (c) flujo alrededor de un automóvil; (d) flujo cerca de una superficie libre.

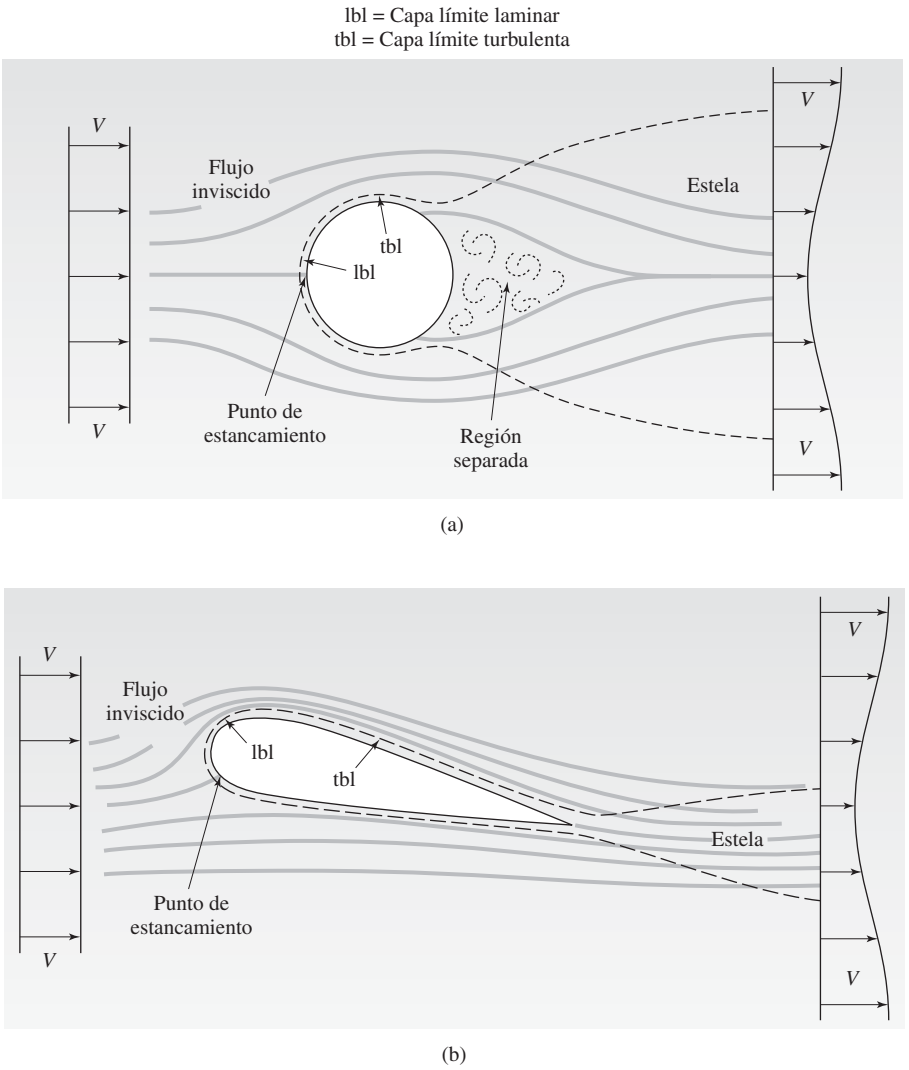


Fig. 8.3 Flujo alrededor de un cuerpo despuntado y de un cuerpo perfilado.

CONCEPTO CLAVE *La estela se difunde hacia el flujo principal y con el tiempo desaparece.*

Debemos hacer comentarios respecto a la región separada y la estela. La región separada al paso del tiempo se cierra; la estela sigue difundiéndose hacia el flujo principal y con el tiempo desaparece a medida que su área se hace excesivamente grande (el fluido vuelve a ganar la velocidad de corriente libre). Las líneas de corriente promediadas respecto al tiempo no entran a una región separada; entran a una estela. La región separada siempre está sumergida dentro de la estela.

El flujo alrededor de un cuerpo despuntado suele tratarse de manera empírica, como se hizo para un flujo turbulento en un conducto. Aquí seguimos este procedimiento. Estamos interesados principalmente en el **arrastre** o **resistencia al avance**, la fuerza que ejerce el flujo sobre el cuerpo en la dirección del flujo. La **sustentación**, que actúa normal a la dirección del flujo, será de interés para formas aerodinámicas,

Resistencia al avance: *Fuerza que ejerce el flujo en la dirección del flujo.*

Sustentación: *Fuerza que el flujo ejerce normal a la dirección del flujo.*

como se presenta en la sección 8.4. Los detalles del campo de flujo raras veces son de interés y no se presentan en este texto introductorio. Presentamos la resistencia al avance F_D y la sustentación F_L en términos de coeficientes adimensionales: el *coeficiente de resistencia al avance* y el *coeficiente de sustentación*, definidos como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{8.1.1}$$

donde A es con más frecuencia el área proyectada (proyectada sobre un plano normal a la dirección de flujo); para formas aerodinámicas, el área está basada en la cuerda (vea la figura 8.4). Los coeficientes de resistencia al avance para varias formas comunes se presentan en la sección 8.3.1. Como la resistencia al avance sobre un cuerpo despuntado está dominado por el flujo en la región separada, hay poco interés en estudiar el crecimiento de la capa límite en la parte frontal de un cuerpo despuntado y el respectivo cortante viscoso en la pared. Por tanto, el interés se concentra en los datos empíricos con los que se obtiene el coeficiente de resistencia al avance.

CONCEPTO CLAVE *La resistencia al avance sobre un cuerpo despuntado está dominada por el flujo en la región separada.*

El flujo alrededor de un cuerpo perfilado, es decir, en donde la región separada es insignificantemente pequeña o no existe, da la motivación para el estudio detallado de las capas límite laminar y turbulenta. Una capa turbulenta que se desarrolla sobre una superficie perfilada plana, por ejemplo una superficie aerodinámica, suele ser lo suficientemente delgada para que la curvatura de la superficie pueda ignorarse y el problema pueda tratarse como una capa límite que se desarrolla sobre una placa plana con un gradiente de presión diferente de cero. Daremos un estudio detallado del flujo sobre una placa plana con un gradiente de presión cero; una vez que ese problema se entienda, puede estudiarse la influencia de un gradiente de presión. Si puede determinarse el flujo en la capa límite o en un cuerpo perfilado, se puede calcular la resistencia al avance dado que éste es el es un resultado del esfuerzo cortante y de la fuerza de presión que actúan sobre la superficie del cuerpo.

Flujo separado sobre una superficie aerodinámica, 167

Fuera de la capa límite existe un *flujo de corriente libre,* inviscido, como se muestra en las figuras 8.3 y 8.4. Inicialmente, supondremos que se conoce el flujo de corriente libre. Antes de que pueda determinarse el perfil de la velocidad en la capa

CONCEPTO CLAVE *El flujo de corriente libre, inviscido, existe fuera de la capa límite.*

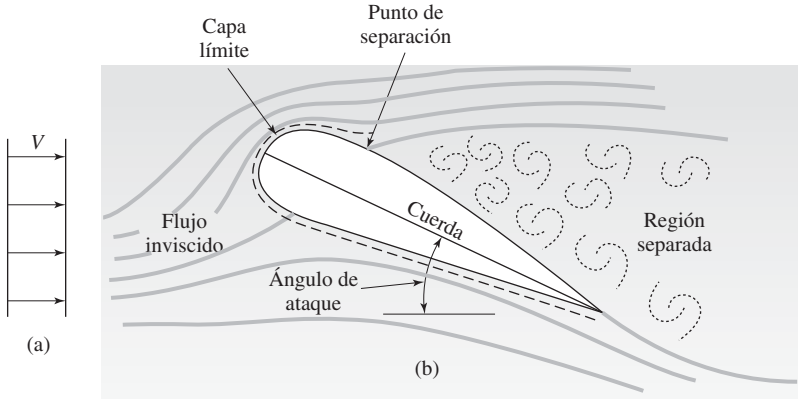


Fig. 8.4 Cuerpo perfilado que ha perdido sustentación.

límite, es necesario que se conozca la solución para flujo inviscido. Se encuentra si se ignora por completo la capa límite, dado que es tan delgada, y resolviendo las ecuaciones invicidas. La solución para flujo inviscido se usa entonces para obtener la sustentación en el cuerpo, y las dos cantidades usadas en la solución para flujo en capa límite: el gradiente de presión y la velocidad en el límite. Conocido el flujo inviscido y determinado el flujo en la capa límite, se pueden obtener las cantidades de interés en el flujo alrededor de un cuerpo perfilado.

8.2 SEPARACIÓN

Antes de presentar la información empírica asociada con el flujo alrededor de cuerpos despuntados, se estudiará la naturaleza general de la separación. Ocurre separación cuando el flujo de la corriente principal deja de tener contacto con un cuerpo, resultando en una región separada de flujo, como se muestra en la figura 8.3a. Cuando se presenta la separación en un cuerpo perfilado cerca de la parte delantera de una superficie aerodinámica, como ocurrirá con un ángulo de ataque lo suficientemente grande (el ángulo que el flujo de entrada forma con la **cuerda**, una recta que conecta el borde de salida con la nariz), a la situación de flujo se le conoce como **pérdida de sustentación**, como se muestra en la figura 8.4. La pérdida de sustentación es altamente indeseable en aviones en condiciones de crucero y resulta en ineficiencias cuando ocurre en álabes de turbinas. No obstante, se usa para obtener la elevada resistencia al avance necesaria en el aterrizaje de aviones, o en ciertas maniobras realizadas por aviones de acrobacias, pero en cuerpos despuntados la separación es inevitable a números de Reynolds altos y su efecto debe ser comprendido.

Cuerda: *Recta que conecta el borde de salida con la nariz.*

Pérdida de sustentación: *Condición de flujo donde ocurre separación en un cuerpo perfilado cerca de la parte delantera.*

CONCEPTO CLAVE *Para cuerpos despuntados, la separación es inevitable a números de Reynolds altos.*

La ubicación del punto de separación depende principalmente de la geometría del cuerpo; si el cuerpo tiene un cambio abrupto en su geometría, como el que se muestra en la figura 8.5, ocurrirá separación en el cambio abrupto o cerca del mismo pero también ocurrirá corriente arriba en la superficie plana, como se muestra. Además, la reunión se presentará en algún otro lugar, como se ilustra. Establezcamos el criterio que se emplea para predecir la ubicación del punto de separación en una superficie sin cambio abrupto de geometría.

Flujo separado sobre bordes afilados, 662, 664, 666

Considere el flujo sobre la superficie plana justo antes del escalón de la figura 8.5. La región cercana al punto delantero de separación está amplificada y se muestra en la figura 8.6; la coordenada y es normal a la pared y la coordenada x se mide a lo largo de la pared. Corriente abajo del punto de separación, la velocidad de la componente x cerca de la pared es en la dirección x negativa y entonces en la pared $\partial u/\partial y$ debe ser negativa.

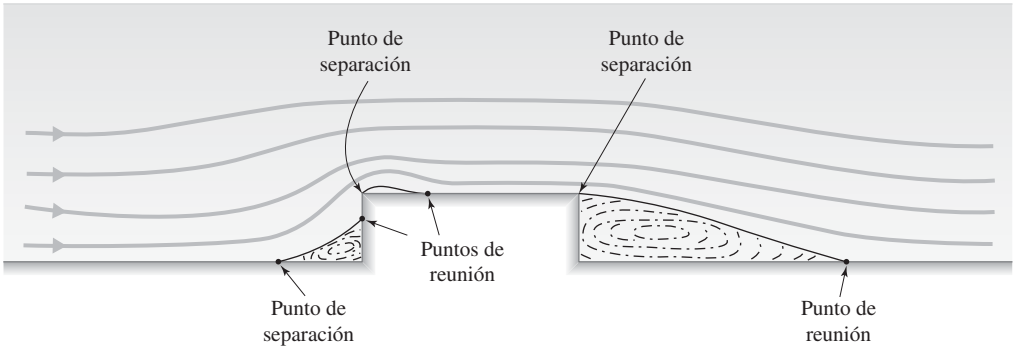


Fig. 8.5 Separación debida a cambios abruptos de geometría.

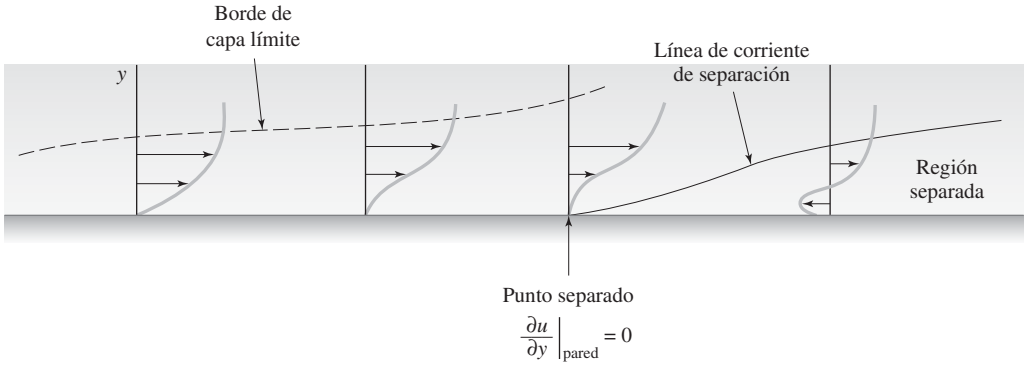


Fig. 8.6 Separación del flujo sobre una superficie plana debida a un gradiente de presión adverso.

Corriente arriba del punto de separación, la velocidad de la componente x cerca de la pared es en la dirección x positiva, demandando que $\partial u/\partial y$ en la pared sea positiva. Por tanto, concluimos que el punto de separación se define como aquel punto donde $(\partial u/\partial y)_{\text{pared}} = 0$.

CONCEPTO CLAVE
El punto de separación se define como el punto donde $(\partial u/\partial y)_{\text{pared}} = 0$.

Observe que la separación sobre la superficie plana ocurre conforme el flujo se aproxima a la región de estancamiento, donde la velocidad es baja y la presión es alta. Conforme el flujo se aproxima a la región de estancamiento la presión aumenta, es decir, $\partial p/\partial x > 0$; el gradiente de presión es positivo. Como es frecuente que la separación sea indeseable, un gradiente de presión positivo se denomina *gradiente de presión adverso;* un gradiente negativo es un *gradiente de presión favorable.* En general, el efecto de un gradiente de presión adverso resulta en velocidades decrecientes en la dirección de la corriente; si un gradiente de presión adverso actúa sobre una superficie en una distancia suficiente, puede resultar la separación. Esto es verdadero aun si la superficie es una placa plana, como la pared de un difusor. En la sección 8.6.7 se da más información.

Además de la geometría y del gradiente de presión, otros parámetros influyen en la separación. Éstos incluyen el número de Reynolds como un parámetro muy importante, con la rugosidad en la pared, la *intensidad de fluctuación de corriente libre*[1] (la intensidad de las perturbaciones que existen lejos del límite), y la temperatura de la pared que tiene menor influencia pero que ocasionalmente es importante.[2] Visualice, por ejemplo, un flujo alrededor de una esfera; a números de Reynolds lo suficientemente bajos, no habrá separación. Conforme el número de Reynolds aumenta a un valor particular, ocurrirá separación sobre una pequeña área en la parte posterior; esta área se hará cada vez más grande a medida que aumenta el número de Reynolds, hasta que a un número de Reynolds lo suficientemente grande ya no se observará un aumento adicional en el área de separación. La capa límite antes de la separación todavía será laminar. Tiene lugar un fenómeno interesante cuando la capa límite antes de la separación se hace turbulenta; hay un repentino movimiento del punto de separación hacia la parte posterior de la esfera, lo cual resulta en una reducción importante en el área de separación y por tanto en el arrastre. Este fenómeno se explica al comparar el perfil de la velocidad de una capa límite laminar con el de una capa límite turbulenta, como se ilustra en la figura 8.7. Así como fue verdadero en un flujo en un tubo, el perfil turbulento tiene un gradiente mucho mayor cerca de la pared (mucho mayor esfuerzo cortante en la pared) y entonces la

CONCEPTO CLAVE *Conforme la capa límite antes de la separación se hace turbulenta, el punto de separación se mueve a la parte posterior.*

[1]La intensidad de fluctuación de la corriente libre se define como $\sqrt{\overline{u'^2}}/V$, donde u' es la fluctuación. Un valor de 0.001 es bastante bajo, y 0.1 es bastante alto.

[2]Si un fluido fluye sobre un cuerpo que está rígidamente soportado, el nivel de vibración del sistema de apoyo también influirá en el fenómeno de separación. Las ondas sonoras externas también pueden ser importantes.

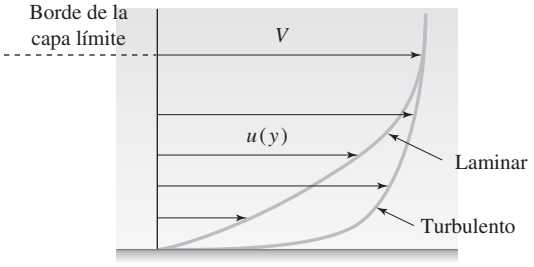


Fig. 8.7 Comparación de perfiles de velocidad laminares y turbulentos.

cantidad de movimiento del fluido cerca de la pared es considerablemente mayor en la capa límite turbulenta. Para una geometría determinada se requiere de una mayor distancia para reducir a cero la velocidad cerca de la pared, lo cual resulta en el movimiento del punto de separación hacia la parte posterior, como se observa en la figura 8.8, donde ambas esferas se mueven con la misma velocidad (la esfera en (b) tiene papel de lija pegado en la región de la nariz). En la figura 8.8a se observa que hay separación en la mitad delantera de la esfera, en una región de gradiente de presión favorable. Esta separación se debe a los efectos centrífugos conforme el fluido se mueve alrededor de la esfera. Este fenómeno de reducción de la resistencia al avance se observa en la caída en las curvas del coeficiente de resistencia al avance para una esfera y un cilindro, que se presenta en la sección siguiente.

8.3 FLUJO ALREDEDOR DE CUERPOS SUMERGIDOS

8.3.1 Coeficientes de arrastre

De nuestro estudio del análisis dimensional, recuerde que para un flujo permanente e incompresible en el que los efectos de la gravedad, térmicos y de tensión superficial son insignificantes, el parámetro de flujo principal que influye en el flujo es el número de Reynolds; otros parámetros ocasionalmente importantes incluyen la rugosidad relativa de la pared y la intensidad de fluctuación de la velocidad de corriente libre.

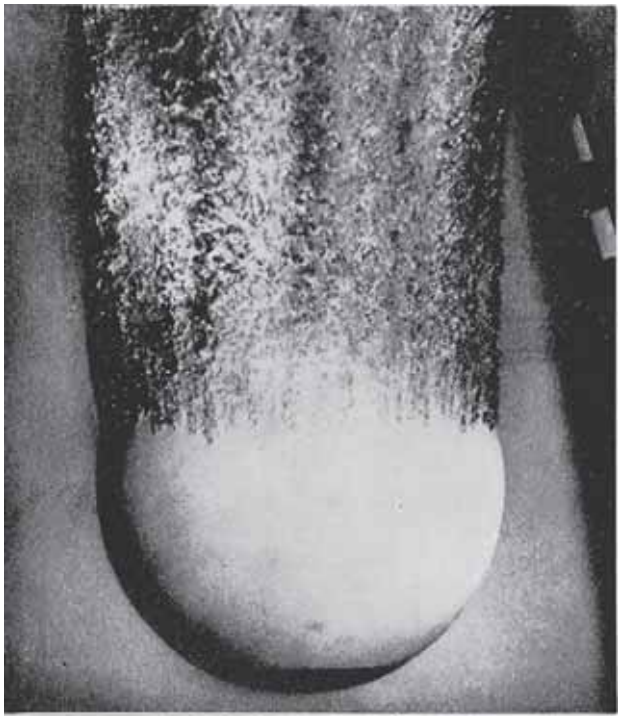
Presentaremos las curvas del coeficiente de arrastre para dos cuerpos que no muestran cambios geométricos súbitos; los coeficientes de arrastre para la esfera lisa y el largo cilindro liso se muestran en la figura 8.9 (página 354) respecto a un gran intervalo de números de Reynolds. En $\mathrm{Re} < 1$ resulta un flujo deslizante sin separación. Para la esfera, este problema de flujo deslizante se ha resuelto, con el resultado de que

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} \qquad \mathrm{Re} < 1 \tag{8.3.1}$$

Se observa separación en $\mathrm{Re} \simeq 10$ sobre un área muy pequeña en la parte posterior del cuerpo. El área separada aumenta a medida que aumenta el número de Reynolds hasta que $\mathrm{Re} \simeq 1000$, donde la región separada deja de crecer; durante este crecimiento de la región separada decrece el coeficiente de arrastre. En

(a)

(b)



Flujo alrededor de cuerpos sumergidos, 652, 657, 694

Fig. 8.8 Efecto de la transición de la capa límite en la separación: (a) capa límite laminar antes de la separación; (b) capa límite turbulenta antes de la separación. (Fotografías de la U.S. Navy.)

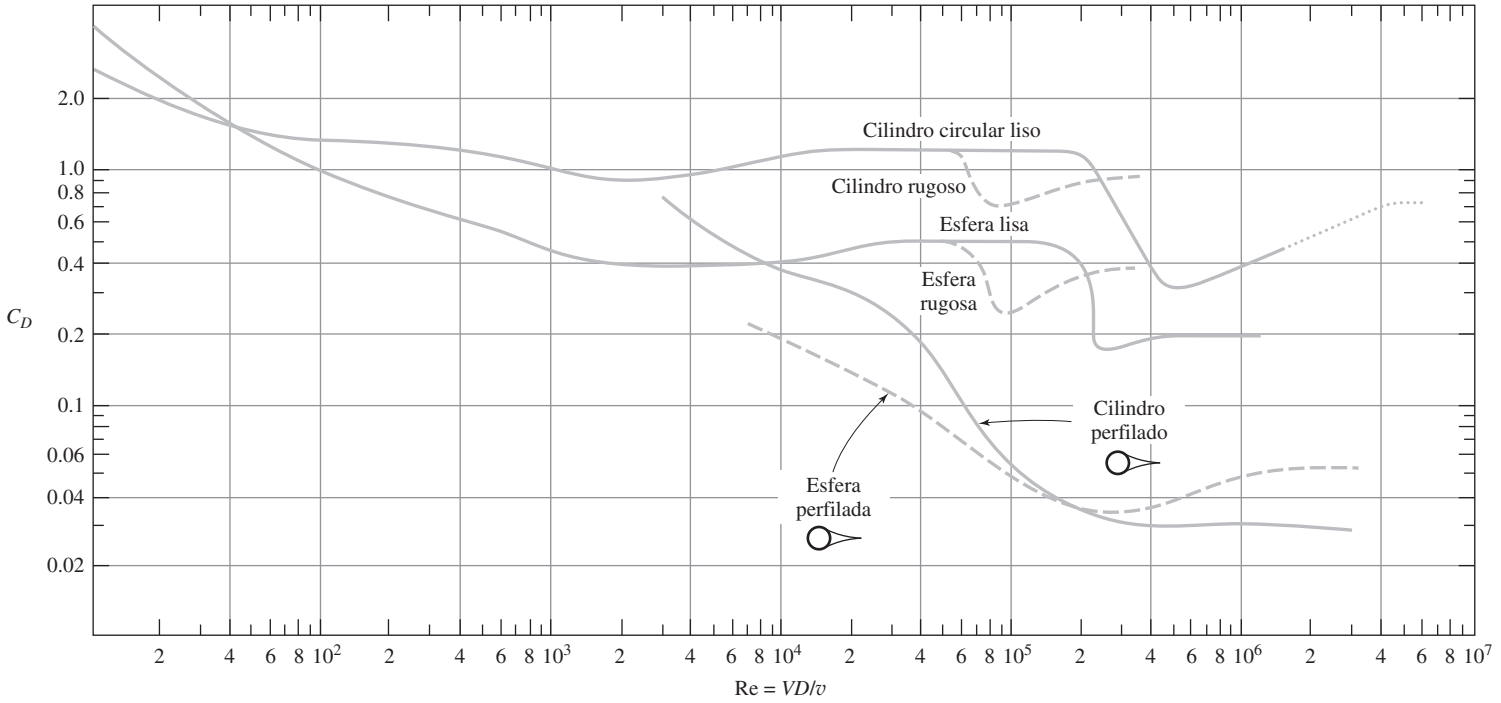


Fig. 8.9 Coeficientes de arrastre para el flujo alrededor de un cilindro largo y de una esfera.
(Vea E. Achenbach, *J. Fluid Mech.,* Vol. 46, 1971, y Vol. 54, 1972.)

Re = 1000, 95% del arrastre se debe al arrastre de la forma (la fuerza de arrastre debida a la presión que actúa sobre el cuerpo), y 5% se debe al arrastre friccional (la fuerza de arrastre debida a esfuerzos cortantes que actúan sobre el cuerpo).

La curva del coeficiente de arrastre es relativamente plana para cuerpos lisos en el intervalo de $10^3 < \text{Re} < 2 \times 10^5$. La capa límite antes del punto de separación es laminar y la región separada es como se muestra en la figura 8.8a. En $\text{Re} \simeq 2 \times 10^5$, para una superficie lisa y con baja intensidad de fluctuación de corriente libre, la capa límite antes de la separación experimenta una transición a un estado turbulento y la cantidad de movimiento incrementada en la capa límite "empuja" hacia atrás la separación, como se ilustra en la figura 8.8b, con un decremento considerable (una caída de 60 a 80%) en el arrastre. Si la superficie es rugosa (hoyuelos en una pelota de golf) o la corriente libre tiene alta intensidad de fluctuación de corriente libre, la caída en la curva C_D puede ocurrir en $\text{Re} \simeq 8 \times 10^4$. Como una resistencia al avance o arrastre más bajo suele ser deseable, con frecuencia se agrega rugosidad superficial; los hoyuelos en la pelota de golf pueden aumentar la distancia de vuelo en un 50 a 100%.

CONCEPTO CLAVE *Los hoyuelos en una pelota de golf pueden aumentar la distancia de vuelo de 50 a 100%.*

Después de la repentina caída en el arrastre, se observa que la curva C_D aumenta de nuevo con un número de Reynolds mayor. No se dispone fácilmente de información experimental para $\text{Re} > 10^6$ para una esfera y $\text{Re} > 6 \times 10^7$ para un cilindro, pero parece ser aceptable un valor de $C_D = 0.2$ para una esfera con un número de Reynolds grande. Algunos ingenieros usan $C_D = 0.4$ para cilindros con números de Reynolds grandes; no obstante, los datos presentados aquí sugieren que eso es demasiado bajo. Es necesaria más información experimental.

Resistencia al avance en una pelota de golf, 265

Para cilindros de longitud finita y cilindros elípticos, los coeficientes de arrastre se presentan en la tabla 8.1. Se supone que los cilindros de longitud finita tienen dos extremos libres. Si un extremo está fijo a una superficie sólida, su longitud debe duplicarse cuando se use la tabla 8.1. Los objetos despuntados con cambios abruptos de geometría tienen regiones separadas que son relativamente insensibles al número de Reynolds; los coeficientes de arrastre y de resistencia al avance para algunas formas comunes se dan en la tabla 8.2.

Tabla 8.1 Coeficientes de arrastre de cilindros[a] circulares de longitud finita con extremos libres[b], así como de cilindros elípticos de longitud infinita.

Cilindro circular		*Cilindro elíptico*[c]		
$\frac{\textit{Longitud}}{\textit{Diámetro}}$	$\frac{C_D}{C_{D\infty}}$	$\frac{\textit{Eje mayor}}{\textit{Eje menor}}$	Re	C_D
∞	1	2	4×10^4	0.6
40	0.82	4	10^5	0.46
20	0.76	4	2.5×10^4 a 10^5	0.32
10	0.68	8	2.5×10^4	0.29
5	0.62	8	2×10^5	0.20
3	0.62			
2	0.57			
1	0.53			

[a] $C_{D\infty}$ es el coeficiente de arrastre para el cilindro circular de longitud infinita obtenido en la figura 8.9.

[b] Si un extremo está fijo a una superficie sólida, duplique la longitud del cilindro.

[c] El flujo es en la dirección del eje mayor.

Tabla 8.2 Coeficientes de arrastre y de resistencia al avance para varios objetos despuntados

Objeto		Re	C_D
Cilindro cuadrado → □ w	$L/w = \infty$	$> 10^4$	2.0
	$L/w = 1$ (cubo)	$> 10^4$	1.1
esquinas redondeadas ($r = 0.2w$)	$L/w = \infty$	10^5	1.2
Placas rectangulares → w	$L/w = \infty$	$> 10^3$	2.0
	$L/w = 20$	$> 10^3$	1.5
	$L/w = 5$	$> 10^3$	1.2
	$L/w = 1$	$> 10^3$	1.1
Cilindro circular → L □ D	$L/D = 0.1$ (disco)	$> 10^3$	1.1
	$L/D = 4$	$> 10^3$	0.9
	$L/D = 7$	$> 10^3$	1.0
Cilindro → D		$> 10^4$	2.2
semicircular → C		$> 10^4$	1.2
Casco → C		2×10^4	2.3
semicircular → C		2×10^4	1.1
Cilindros equiláteros → ◁	2.0	$> 10^4$	2.0
→ ▷	1	$> 10^4$	1.4
Cono → ◁ α	$\alpha = 30°$	$> 10^4$	0.6
	$\alpha = 60°$	$> 10^4$	0.8
	$\alpha = 90°$	$>10^4$	1.2
Hemisferio sólido → ◗		$> 10^4$	1.2
→ ◖		$> 10^4$	0.4
Hemisferio hueco → D		$> 10^4$	1.4
→ C		$> 10^4$	0.4
Paracaídas		$> 10^7$	1.4
Automóvil			
1920	—	$> 10^5$	0.80
Moderno, con esquinas cuadradas	—	$> 10^5$	0.30
Moderno, con esquinas redondeadas	—	$> 10^5$	0.29
Vagoneta		$> 10^5$	0.42
Bicicleta, ciclista erguido			1.1
en carrera, inclinado sobre el manubrio			0.9
en carrera, detrás de otro			0.5
Camión (tractor y caja), estándar			0.96
con deflector perfilado			0.76
con deflector y separación sellada			0.70

Ejemplo 8.1

Un anuncio cuadrado, de 10 ft × 10 ft, está instalado en lo alto de un poste de 60 ft de altura y 12 pulgadas de diámetro (figura E8.1). Calcule el momento máximo que debe resistir la base para una velocidad del viento de 100 ft/s.

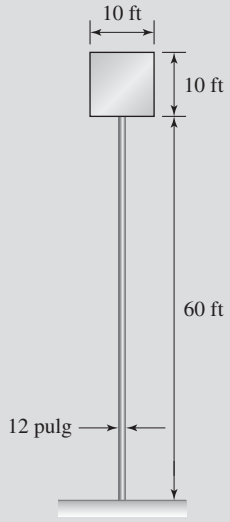


Fig. E8.1

Solución

La fuerza máxima F_1 que actúa sobre el anuncio ocurre cuando el viento es normal al anuncio; la cual es

$$F_1 = C_D \times \tfrac{1}{2}\,\rho V^2 A$$
$$= 1.1 \times \tfrac{1}{2} \times 0.0024 \text{ slug/ft}^3 \times 100^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \times 10^2 \text{ ft}^2 = 1320 \text{ lb}$$

donde C_D se obtuvo de la tabla 8.2 y usamos el valor estándar $\rho = 0.0024$ slug/ft^3 porque no es un dato del enunciado (recuerde que slug = lb·s^2/ft). La fuerza F_2 que actúa sobre el poste cilíndrico es (usando el área proyectada como A = 60 x 1 ft^2)

$$F_2 = C_D \times \tfrac{1}{2}\,\rho V^2 A$$
$$= 0.8 \times \tfrac{1}{2} \times 0.0024 \times 100^2 \times 60 = 576 \text{ lb}$$

donde C_D se obtuvo de la figura 8.9 con $\text{Re} = 100 \times 1/1.6 \times 10^{-4} = 6.2 \times 10^5$, suponiendo un nivel de fluctuación de alta intensidad (es decir, un cilindro rugoso); como ninguno de los dos extremos está libre, no usamos el factor de multiplicación de la tabla 8.1.

El momento resistente que debe tener la base de soporte es

$$M = d_1F_1 + d_2F_2$$
$$= 65 \times 1320 + 30 \times 576 = 103{,}000 \text{ ft-lb}$$

suponiendo que las fuerzas actúan en los centros de sus áreas respectivas.

Ejemplo 8.1a Fuerzas sobre una superficie aerodinámica, 924-931

Ejemplo 8.2

Determine la velocidad terminal de una esfera lisa de 30 cm de diámetro ($S = 1.02$) si se suelta desde el reposo en (a) aire a 20 ºC y (b) agua a 20 ºC.

Solución

(a) Cuando la velocidad terminal es alcanzada por un cuerpo en caída, el peso del cuerpo es equilibrado por la fuerza de arrastre que actúa sobre el cuerpo. Usando $\Sigma F = 0$ y la ecuación 8.1.1, tenemos

$$W = F_D$$

$$\therefore \gamma_{\text{esfera}} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 A$$

Usando $\gamma_{\text{esfera}} = S\gamma_{\text{agua}}$ y el área proyectada $A = \pi R^2$, esto se convierte en

$$S\gamma_{\text{agua}} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2$$

La velocidad puede ahora expresarse como

$$V = \left(\frac{8RS\gamma_{\text{agua}}}{3\rho C_D}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 0.15\ \text{m} \times 1.02 \times 9800\ \text{N/m}^3}{3 \times 1.20\ \text{kg/m}^3 \times C_D}\right)^{1/2} = \frac{57.7}{\sqrt{C_D}}$$

El número de Reynolds debe ser bastante grande por lo que $C_D = 0.2$ de la figura 8.9. Entonces

$$V = \frac{57.7}{\sqrt{0.2}} = 129\ \text{m/s}$$

Debemos comprobar el número de Reynolds para verificar el valor C_D supuesto. Es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{129 \times 0.3}{1.6 \times 10^{-5}} = 2.42 \times 10^6$$

Esto está más allá del extremo de la curva donde no se dispone de información; supondremos que el coeficiente de arrastre (agua) y de resistencia al avance (aire) permanece en 0.2, de modo que la velocidad terminal es 129 m/s.

(b) Para la esfera que cae en agua, debemos incluir la fuerza de flotación B que actúa en la misma dirección que la fuerza de arrastre F_D. De aquí que la suma de fuerzas da

$$W = F_D + B$$

$$\therefore \gamma_{\text{esfera}} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 A + \gamma_{\text{agua}} \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

Esto da

$$(S-1)\gamma_{\text{agua}} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2$$

Usando $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, resulta

$$V = \left(\frac{8R(S-1)\gamma_{\text{agua}}}{3\rho C_D}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 0.15 \times 0.02 \times 9800}{3 \times 1000 \times C_D}\right)^{1/2} = \frac{0.28}{\sqrt{C_D}}$$

Anticipamos que el número de Reynolds es más bajo que en el inciso (a), de modo que debemos suponer que está en el intervalo de $2 \times 10^4 < \text{Re} < 2 \times 10^5$. Entonces $C_D = 0.5$ y resulta

$$V = 0.40\ \text{m/s}$$

Esto da un número de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.40 \times 0.3}{10^{-6}} = 1.2 \times 10^5$$

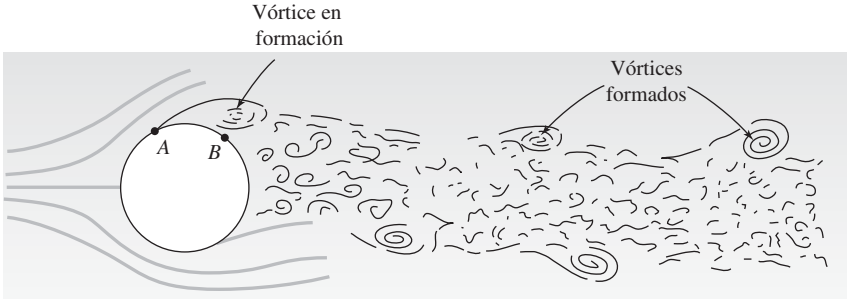
Esto está en el intervalo requerido, de modo que se espera que la velocidad terminal sea de 0.40 m/s. Desde luego que si la esfera se hiciera rugosa (arena pegada a la superficie), el valor C_D sería menor y la velocidad sería más grande.

Ejemplo 8.2a Laboratorio virtual de la estela de un cilindro, 936-938

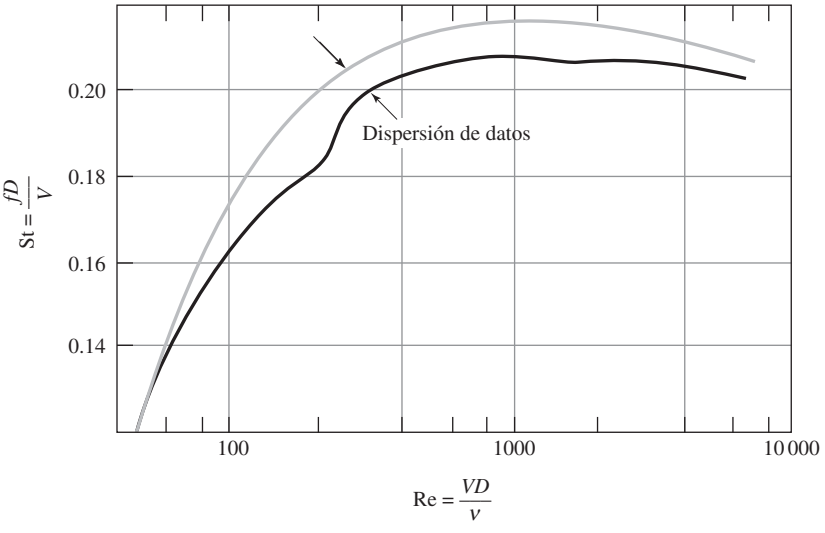
8.3.2 Formación de vórtices

CONCEPTO CLAVE *Los vórtices se forman regular y alternadamente desde lados opuestos de cilindros circulares.*

Los objetos largos y despuntados, como los cilindros circulares, exhiben un fenómeno particularmente interesante cuando se colocan perpendiculares a un flujo de un fluido; vórtices o remolinos (regiones de fluido circulante) se forman desde el objeto, regular y alternadamente desde lados opuestos, como se muestra en la figura 8.10. El flujo resultante corriente abajo con frecuencia se conoce como *calle de vórtices de Kármán*, llamado así en honor de Theodor von Kármán (1881-1963). Los vórtices se forman en el intervalo del número de Reynolds de $40 < \text{Re} < 10\,000$, y son acompañados por turbulencia arriba de Re = 300. En la figura 8.11 se presentan fotografías de la formación de vórtices para números de Reynolds alto y bajo.



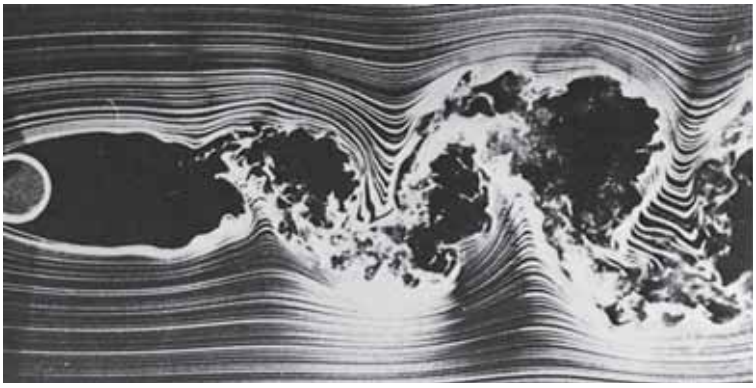
(a)



(b)

Fig. 8.10 Formación de vórtices de un cilindro: (a) formación de vórtices; (b) número de Strouhal contra número de Reynolds. (Roshko, A. (1952-01-01) Sobre el desarrollo de estelas turbulentas a partir de calles de vórtices.)

(a)



(b)

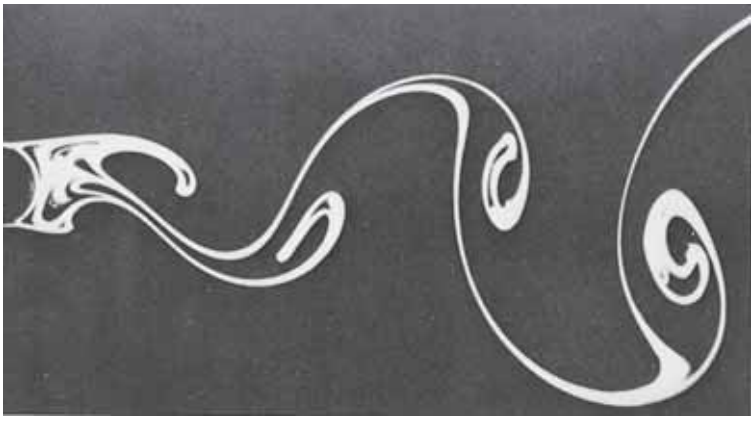


Fig. 8.11 Formación de vórtices para números de Reynolds alto y bajo: (a) Re = 10 000 (fotografía de Thomas Corke y Hassan Nagib); Re = 140 (fotografía de Sadatoshi Taneda. De *Album of Fluid Motion*, 1982, The Parabolic Press, Stanford, California).

Formación de vórtices, 81, 216

Puede aplicarse un análisis dimensional para hallar una expresión para la frecuencia de formación de los vórtices. Para flujos con número de Reynolds alto, es decir, flujos con fuerzas viscosas insignificantes, la frecuencia f de formación, en hertz, depende sólo de la velocidad y del diámetro. Entonces $f = f(V, D)$. Usando un análisis dimensional podemos demostrar que fD/V = constante. La frecuencia de formación, representada como una cantidad adimensional, se expresa como el número de Strouhal.

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{V} \tag{8.3.2}$$

De los resultados experimentales de la figura 8.10, observamos que el número de Strouhal es esencialmente constante (0.21) en el intervalo de $300 < \mathrm{Re} < 10\,000$; por tanto, la frecuencia es directamente proporcional a la velocidad en este intervalo relativamente grande del número de Reynolds .

El ingeniero o arquitecto debe ser cuidadoso cuando diseñe estructuras, por ejemplo torres y puentes, que forman vórtices. Cuando se forma un vórtice, una

pequeña fuerza se aplica a la estructura; si la frecuencia de formación es cercana a la frecuencia natural[3] (o a una de las armónicas) de la estructura, el fenómeno de resonancia puede ocurrir en el que la respuesta a la fuerza aplicada se multiplica por un factor grande. Por ejemplo, cuando ocurre resonancia en una torre de televisión, la deflexión de la torre debida a la fuerza aplicada puede ser tan grande que fallan los cables de soporte, llevando al colapso de la estructura. Esto ha ocurrido muchas veces, causando así graves daños y numerosas muertes y lesiones. El colapso del puente colgante Tacoma Narrows es indudablemente la falla más espectacular debida a la formación de vórtices. Las líneas "galopantes" de energía eléctrica, en las que una línea eléctrica alterna entre una catenaria usual y una invertida, es otro ejemplo que puede llevar a daños importantes; esto puede ocurrir cuando una línea de energía eléctrica se congela, presentando al viento un área de sección transversal mucho más grande.

CONCEPTO CLAVE *Si se presenta el fenómeno de resonancia, la respuesta a una fuerza aplicada se multiplica por un factor grande.*

Ejemplo 8.3

Se medirá la velocidad de una corriente de aire de movimiento lento, a 30 ºC, usando un cilindro y una toma de presión colocada entre los puntos A y B en el cilindro de la figura 8.10. Se espera que el intervalo de velocidad sea de $0.1 < V < 1$ m/s. ¿Qué dimensión del cilindro debe seleccionarse y qué frecuencia sería observada por el dispositivo medidor de presión para $V = 1$ m/s?

Solución

El número de Reynolds debe estar dentro del intervalo de formación de vórtices, por ejemplo 4000. Para la velocidad máxima el diámetro se encontraría como sigue:

$$4000 = \frac{VD}{\nu}$$

$$= \frac{1.0 \times D}{1.6 \times 10^{-5}}$$

$$\therefore D = 0.064 \text{ m} \qquad \text{Seleccione } D = 6 \text{ cm}$$

En $V = 0.1$ m/s el número de Reynolds es $0.1 \times 0.06/1.6 \times 10^{-5} = 375$. Se tendría formación de vórtices, de modo que esto es aceptable. La frecuencia de formación de vórtices esperada en $V = 1.0$ m/s se encuentra usando un número de Strouhal de la figura 8.10 de 0.21. Por tanto

$$0.21 = \frac{fD}{V}$$

$$= \frac{f \times 0.06}{1.0}$$

$$\therefore f = 3.5 \text{ hertz}$$

Ejemplo 8.3a Ejemplo de formación de vórtices, 195-197

[3]La frecuencia natural es la frecuencia con la que una estructura vibra cuando se le da un "golpe".

8.3.3 Perfilado

Si el flujo debe permanecer adherido a la superficie de un cuerpo despuntado, por ejemplo un cilindro o una esfera, debe moverse hacia regiones de presión cada vez más alta a medida que avance hacia el punto de estancamiento posterior. A números de Reynolds suficientemente altos (Re > 10), el flujo de movimiento lento de la capa límite cerca de la superficie no puede avanzar hacia la región de alta presión cerca del punto de estancamiento posterior, de modo que se separa del cuerpo. El **perfilado** reduce la alta presión en la parte posterior del objeto, de modo que el flujo de movimiento lento cerca de la superficie puede pasar hacia una región de presión ligeramente más alta. El fluido puede no ser capaz de avanzar hasta el borde de salida del objeto perfilado, pero la región de separación se reducirá a sólo un pequeño porcentaje de la región inicial separada en el cuerpo despuntado. El ángulo incluido en el borde de salida no debe ser mayor que aproximadamente 20º, porque de otro modo la región de separación será demasiado grande y el efecto de perfilado será anulado. Los coeficientes de arrastre para esferas y cilindros perfilados se muestran en la figura 8.9.

Perfilado: *Reducción de la alta presión en la parte posterior de un objeto, permitiendo que el flujo superficial de movimiento lento se mueva hacia atrás.*

CONCEPTO CLAVE *El ángulo en el borde de salida no debe ser mayor que 20° para que el perfilado sea efectivo.*

Cuando un cuerpo está perfilado, el área superficial aumenta considerablemente. Esto elimina la mayor parte del arrastre por presiónde pero aumenta el arrastre por esfuerzo cortante en la superficie. Para reducir al mínimo el arrastre, la idea es minimizar la suma del arrastre por presión y el arrastre por esfuerzo cortante. En consecuencia, el cuerpo perfilado no puede ser tan largo que el arrastre por esfuerzo cortante sea mayor que el arrastre por presión más el arrastre por esfuerzo cortante para un cuerpo más corto. Se requiere de un procedimiento de optimización, procedimiento que llevaría a una proporción entre el espesor y la longitud de la cuerda de alrededor de 0.25 para un tirante.

Obviamente, para un flujo con número de Reynolds bajo (Re < 10) el arrastre se debe principalmente al arrastre por esfuerzo cortante y por tanto el perfilado es innecesario; esto indudablemente llevaría a un arrastre mayor porque el área superficial aumentaría.

Por último, debe señalarse que otra ventaja del perfilado es que por lo general se elimina la formación periódica de vórtices. Las vibraciones producidas por la formación de vórtices suelen ser indeseables, de modo que el perfilado no sólo disminuye el arrastre sino que puede eliminar las vibraciones.

Perfilado, 651

Ejemplo 8.4

Un tirante en un avión de acrobacias que se desplaza a 60 m/s mide 4 cm de diámetro y 24 cm de largo. Calcule la fuerza de arrastre que actúa sobre el tirante como un cilindro circular, y como un tirante perfilado, como se muestra en la figura E8.4. ¿Se esperaría formación de vórtices del cilindro circular?

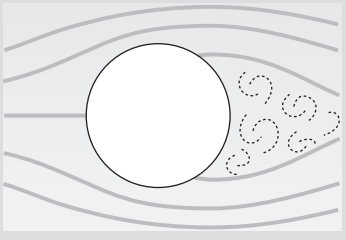


Fig. E8.4(a)

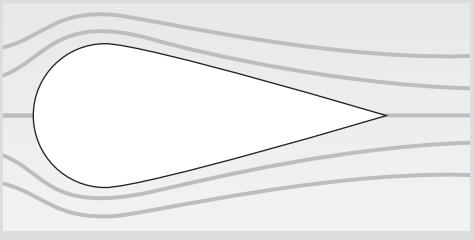


Fig. E8.4(b)

Solución

El número de Reynolds asociado con el cilindro y el tirante perfilado es, suponiendo que $T = 20\,^{\circ}\text{C}$,

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{60 \times 0.04}{1.5 \times 10^{-5}} = 1.6 \times 10^5$$

Suponiendo una superficie lisa como en (a), el coeficiente de arrastre es $C_D = 1.2$ de la figura 8.9. La fuerza de arrastre es entonces

$$F_D = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 A = 1.2 \times \frac{1}{2} \times 1.20\ \text{kg/m}^3 \times 60^2\ \text{m}^2/\text{s}^2 \times (0.24 \times 0.04)\ \text{m}^2 = 24.9\ \text{N}$$

Para el tirante perfilado de (b), la figura 8.9 da $C_D = 0.04$. La fuerza de arrastre es

$$F_D = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 A = 0.04 \times \frac{1}{2} \times 1.20 \times 60^2 \times (0.24 \times 0.04) = 0.82\ \text{N}$$

Ésta es una reducción de 97% en el arrastre, una reducción bastante considerable.

La formación de vórtices no debe esperarse en el cilindro circular; el número de Reynolds es demasiado alto. (Vea la figura 8.10.)

8.3.4 Cavitación

La **cavitación** es un cambio de fase muy rápido de líquido a vapor que ocurre en un líquido cuando la presión local es igual o menor que la presión de vapor. La primera aparición de cavitación es en la posición de la presión más baja en un campo de flujo. Se han identificado cuatro tipos de cavitación:

Cavitación: *Cambio de fase de líquido a vapor que ocurre siempre que la presión local es menor que la presión de vapor.*

1. *Cavitación viajera*, la cual existe cuando se forman burbujas de vapor o cavidades, que son arrastradas corriente abajo, y desaparecen.
2. *Cavitación fija*, que está presente cuando existe una cavidad fija de vapor como una región separada. La región separada puede volver a unirse al cuerpo, o la región separada puede envolver la parte posterior del cuerpo y ser cerrada por el flujo principal, en cuyo caso se conoce como *supercavitación*.
3. *Cavitación vorticial*, que se encuentra en el núcleo de un vórtice de alta velocidad, y por tanto baja presión, la cual se observa con frecuencia en el vórtice de punta que deja de tener contacto con una hélice.
4. *Cavitación vibratoria*, que puede haber cuando una onda de presión se mueve en un líquido. Una onda de presión está formada por un pulso de presión, que tiene una alta presión seguida por una baja presión. La parte de baja presión de la onda (o vibración) puede resultar en cavitación.

El primer tipo de cavitación, en el que se forman y colapsan burbujas de vapor, está asociado con daños potenciales. Las presiones instantáneas que resultan del colapso

CONCEPTO CLAVE *Las altas presiones instantáneas pueden causar daños a componentes de acero inoxidable.*

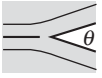
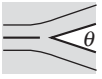
pueden ser extremadamente altas (quizá de 1400 MPa) y pueden dañar componentes de acero inoxidable, como ocurre en las hélices de barcos.

La cavitación ocurre cuando el *número de cavitación* σ, definido por

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \tag{8.3.3}$$

es menor que el número de cavitación crítico $\sigma_{\text{crít}}$, que depende de la geometría del cuerpo y del número de Reynolds. Aquí, p_∞ es la presión absoluta en la corriente libre no perturbada y p_v es la presión de vapor. A medida que σ decrece debajo de $\sigma_{\text{crít}}$, la cavitación aumenta en intensidad, pasando de cavitación viajera a cavitación fija a supercavitación.

Tabla 8.3 Coeficientes de arrastre para número de cavitación cero para cuerpos despuntados

Cuerpo bidimensinal				*Cuerpo axisimétrico*		
Geometría		θ	$C_D(0)$	*Geometría*	θ	$C_D(0)$
Placa plana		—	0.88	Disco	—	0.8
Cilindro circular		—	0.50	Esfera	—	0.30
		120	0.74	Cono	120	0.64
Cuña		90	0.64		90	0.52
		60	0.49		60	0.38
		30	0.28		30	0.20

El coeficiente de arrastre de un cuerpo depende del número de cavitación y, para números de cavitación pequeños, está dado por

$$C_D(\sigma) = C_D(0)(1 + \sigma) \tag{8.3.4}$$

donde algunos valores de $C_D(0)$ para formas comunes se listan en la tabla 8.3 para $\text{Re} \simeq 10^5$.

Una superficie hidrodinámica, un tipo de cuerpo aerodinámico que se usa para levantar una embarcación fuera del agua, es una forma que está invariablemente asociada con la cavitación. Los números del coeficientes de arrastre y de la sustentación, así como de la cavitación crítica, se dan en la tabla 8.4 para una superficie hidrodinámica común con $10^5 < \text{Re} < 10^6$, donde el número de Reynolds está basado en la longitud de la cuerda, y el área usada con C_D y C_L es la cuerda multiplicada por la longitud.

Tabla 8.4 Coeficientes de arrastre y sustentación y número de cavitación crítico para una superficie hidrodinámica común

Ángulo (°)	*Coeficiente de sustentación* C_L	*Coeficiente de arrastre* C_D	*Número de cavitación crítico* σ_{crit}
−2	0.2	0.014	0.5
0	0.4	0.014	0.6
2	0.6	0.015	0.7
4	0.8	0.018	0.8
6	0.95	0.022	1.2
8	1.10	0.03	1.8
10	1.22	0.04	2.5

Ejemplo 8.5

Una superficie hidrodinámica tiene que operar a 20 pulgadas debajo de la superficie de agua a 60 ºF, a un ángulo de ataque de 8º y desplazarse a 45 ft/s. Si la longitud de su cuerda es de 24 pulgadas y mide 6 pies de largo, calcule su sustentación y arrastre. ¿Hay cavitación?

Solución

La presión absoluta p_∞ es

$$p_\infty = \gamma h + p_{\text{atm}}$$
$$= 62.4 \times \frac{20}{12} + 2117 = 2221 \text{ psf absoluta}$$

La presión de vapor es $p_v = 0.256$ psia, de modo que

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$= \frac{2221 - 0.256 \times 144}{\frac{1}{2} \times 1.94 \times 45^2} = 1.11$$

Contestando primero la última pregunta, vemos que esto es menor que 1.8; por tanto, existe cavitación.

La fuerza de sustentación es, encontrando C_L en la tabla 8.4,

$$F_L = C_L \times \frac{1}{2}\rho V^2 A$$
$$= 1.1 \times \frac{1}{2} \times 1.94 \text{ slug/ft}^3 \times 45^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \times \left(\frac{24}{12} \times 6\right) \text{ft}^2 = 25{,}900 \text{ lb}$$

La fuerza de arrastre es, tomando C_D de la tabla 8.4,

$$F_D = C_D \times \frac{1}{2}\rho V^2 A$$
$$= 0.03 \times \frac{1}{2} \times 1.94 \times 45^2 \times (2 \times 6) = 707 \text{ lb}$$

8.3.5 Masa agregada

CONCEPTO CLAVE *Un cuerpo no sólo acelera, también lo hace parte del fluido que lo rodea.*

Las secciones previas de este capítulo se han referido a cuerpos que se mueven a velocidad constante. En esta sección consideramos cuerpos que aceleran partiendo del reposo en un fluido. Cuando un cuerpo acelera, decimos que actúa una fuerza desequilibrada sobre el cuerpo; el cuerpo no sólo acelera sino que también lo hace parte del fluido que lo rodea. La aceleración del fluido circundante requiere de una fuerza agregada sobre y arriba de la fuerza requerida para acelerar sólo el cuerpo. Una forma relativamente sencilla de tomar en cuenta la masa de fluido siendo acelerado es agregar una masa, llamada *masa agregada* m_a, a la masa del cuerpo. Sumando fuerzas en la dirección de movimiento para un cuerpo simétrico que se mueve en la dirección de su eje de simetría tenemos, para movimiento horizontal

$$F - F_D = (m + m_a)\frac{dV_B}{dt} \tag{8.3.5}$$

donde V_B es la velocidad del cuerpo y F_D es la fuerza de arrastre. Para una aceleración inicial partiendo del reposo F_D sería cero.

La masa agregada está relacionada con la masa del fluido m_f desplazada por el cuerpo mediante la relación

$$m_a = km_f \tag{8.3.6}$$

donde k es el coeficiente de masa agregada. Para una esfera $k = 0.5$; para un elipsoide con eje mayor igual a dos veces el eje menor y moviéndose en la dirección del eje mayor, $k = 0.2$; para un cilindro largo que se mueva normal a su eje, $k = 1.0$. Estos valores se calcularon para flujos inviscidos y por tanto son aplicables para movimientos que parten del reposo, de modo que las fuerzas viscosas son insignificantes.

Para cuerpos densos que aceleran en la atmósfera, la masa agregada es insignificante pequeña y por lo común se ignora. Las masas que aceleran desde el reposo en un líquido son más influidas por la masa agregada y esto normalmente debe tomarse en cuenta. Las estructuras fuera de la costa, que sean sometidas a movimientos ondulatorios oscilantes, experimentan fuerzas periódicas cuya determinación debe incluir el efecto de la masa agregada.

Ejemplo 8.6

Una esfera con una gravedad específica de 2.5 se libera desde el reposo en agua. Calcule su aceleración inicial. ¿Cuál es el porcentaje de error si se ignora la masa agregada?

Solución

La suma de fuerzas en la dirección vertical, con cero arrastre, es

$$W - B = (m + m_a)\frac{dV_B}{dt}$$

donde B es la fuerza de flotación. Sustituyendo en las cantidades apropiadas da, haciendo $\forall$ = volumen de la esfera,

$$S\gamma_{\text{agua}}\forall - \gamma_{\text{agua}}\forall = (\rho_{\text{agua}} S\forall + 0.5\rho_{\text{agua}}\forall)\frac{dV_B}{dt}$$

Esto da

$$g(S-1) = (S+0.5)\frac{dV_B}{dt}$$

Por tanto

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{g(S-1)}{S+0.5} = \frac{9.8(2.5-1)}{2.5+0.5} = 4.90 \text{ m/s}^2$$

Si se ignora la masa agregada, la aceleración sería

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{g(S-1)}{S} = \frac{9.8(2.5-1)}{2.5} = 5.88 \text{ m/s}^2$$

Éste es un error de 20%.

8.4 SUSTENTACIÓN Y RESISTENCIA AL AVANCE EN SUPERFICIES AERODINÁMICAS

La separación ocurre en un cuerpo despuntado, por ejemplo un cilindro, debida al fuerte gradiente de presión adversa en la capa límite en la parte posterior del cuerpo. Una superficie aerodinámica es un cuerpo perfilado diseñado para reducir el gradiente de presión adversa de modo que no ocurra separación, por lo general con un pequeño ángulo de ataque, como se muestra en la figura 8.12. Sin separación la resistencia al avance se debe principalmente al esfuerzo cortante en la pared, que resulta de los efectos viscosos en la capa límite.

La capa límite en una superficie aerodinámica es muy delgada, razón por la que puede ser ignorada al despejar el campo de flujo (el patrón de las líneas de corriente y la distribución de la presión) que rodea la superficie aerodinámica. Como la capa límite es tan delgada, la presión en la pared no es tan influenciada por la existencia de la capa límite. En consecuencia, la sustentación en una superficie aerodinámica puede ser aproximada al integrar la distribución de la presión como se da por la solución para flujo inviscido en la pared. En la siguiente sección demostraremos cómo se hace esto; en ésta, simplemente damos resultados empíricos.

CONCEPTO CLAVE *La sustentación en una superficie aerodinámica puede ser aproximada al integrar la solución para flujo inviscido.*

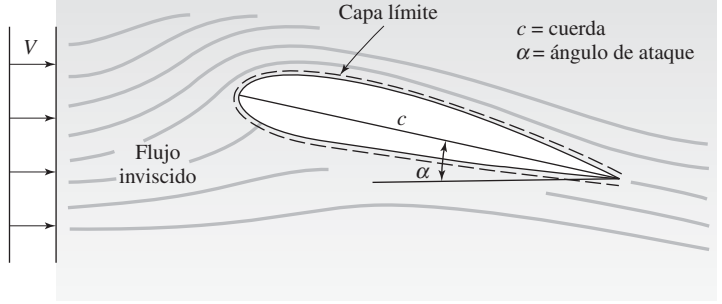


Fig. 8.12 Flujo alrededor de una superficie aerodinámica a un ángulo de ataque.

La resistencia al avance en una superficie aerodinámica puede predecirse si se resuelven las ecuaciones de la capa límite (ecuaciones de Navier-Stokes simplificadas) para el esfuerzo cortante en la pared y si se ejecuta la integración apropiada. El campo de flujo inviscido debe conocerse antes de resolver las ecuaciones de la capa límite, dado que el gradiente de presión en la pared y la velocidad del flujo inviscido en la pared[4] son necesarias como entradas para calcular el flujo de capa límite. Los cálculos de la capa límite se presentarán en la sección 8.6; en esta sección presentamos los resultados empíricos para la resistencia al avance.

El coeficiente de resistencia al avance que se presenta puede parecer bajo en comparación con los coeficientes de la sección precedente. Para superficies aerodinámicas se usa un área proyectada mucho más grande, es decir, el área de planta, que es la cuerda c (vea la figura 8.12) multiplicada por la longitud L de la superficie aerodinámica. Entonces los coeficientes de resistencia al avance y sustentación se definen como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 cL} \qquad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 cL} \tag{8.4.1}$$

CONCEPTO CLAVE *El coeficiente de sustentación de diseño está cercano a la condición de coeficiente de resistencia al avance mínimo.*

Para una superficie aerodinámica común, los coeficientes de sustentación y de resistencia al avance se dan en la figura 8.13. Para una superficie aerodinámica diseñada especialmente el coeficiente de resistencia al avance puede ser de sólo 0.0035, pero el coeficiente de sustentación máximo es de alrededor de 1.5. El coeficiente de sustentación de diseño (condición de crucero) es aproximadamente de 0.3, que está cercano a la condición de coeficiente de resistencia al avance mínimo. Esto corresponde a un ángulo de ataque de alrededor de 2º, lejos de la condición de pérdida de sustentación de unos 16º.

Las superficies aerodinámicas convencionales no son simétricas, razón por la que hay un coeficiente de sustentación positivo a un ángulo de ataque de cero. La sustentación es directamente proporcional al ángulo de ataque pero se desvía de la función de línea recta justo antes de la pérdida de sustentación. El coeficiente de resistencia al avance también aumenta linealmente hasta un ángulo de ataque de unos cinco grados para una superficie aerodinámica convencional; después aumenta en una relación no lineal con el ángulo de ataque.

Para despegar y aterrizar a velocidades relativamente bajas, es necesario alcanzar coeficientes de sustentación considerablemente más altos que el máximo de 1.7 de la figura 8.13. O bien, si ha de aceptarse un coeficiente de sustentación relativamente bajo, el área $c \times L$ debe aumentarse. Ambos se obtienen en realidad. Los alerones se proyectan hacia fuera de una sección de cada superficie aerodinámica, lo que resulta una cuerda mayor y el ángulo de ataque del alerón también se aumenta. Se usan ranuras (espacios abiertos) para mover aire a alta presión de la parte inferior hacia el flujo de capa límite de cantidad de movimiento relativamente bajo en la parte alta, como se muestra en la figura 8.14; esto evita la separación desde el alerón, manteniendo así una elevada sustentación. El coeficiente de sustentación puede llegar a 2.5 con un alerón con una sola ranura y a 3.2 con un alerón de doble ranura. En algunos aviones modernos puede haber tres alerones en serie con tres ranuras junto con un alerón de nariz, para asegurar que la capa límite no se separe de la superficie superior de la superficie aerodinámica.

CONCEPTO CLAVE *Las ranuras permiten que aire a alta presión energicen el aire de movimiento lento, evitando así la separación del alerón.*

[4]Debido a que la capa límite es muy delgada, la velocidad en su borde exterior se toma como la velocidad en la pared de la solución para flujo inviscido.

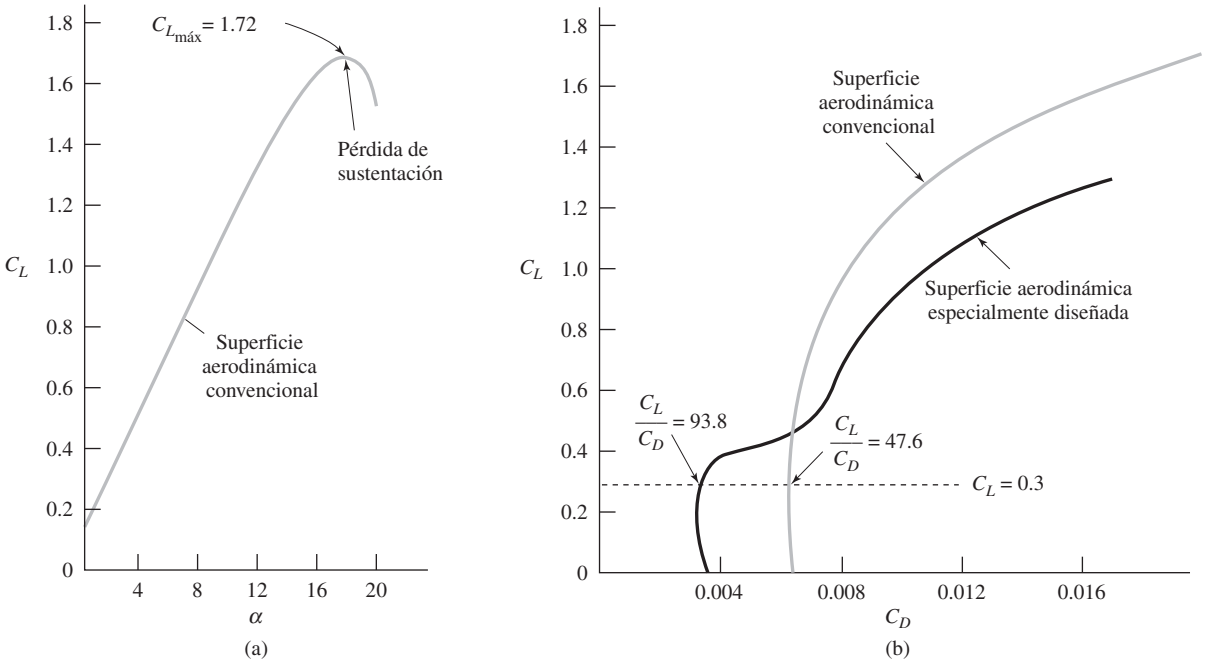


Fig. 8.13 Coeficientes de sustentación y de resistencia al avance para superficies aerodinámicas con $\text{Re} = Vc/\nu \simeq 9 \times 10^6$.

La sustentación total en un avión es proporcionada principalmente por la superficie aerodinámica. La longitud efectiva de ésta cuando se calcula la sustentación se toma como la distancia de punta a punta, es decir la **envergadura**, porque el fuselaje actúa para producir sustentación en la sección media del avión. El cálculo de la resistencia al avance debe incluir el cortante que actúa en la superficie aerodinámica, el fuselaje y la sección de cola.

Envergadura: *La longitud efectiva de una superficie aerodinámica es la distancia de punta a punta.*

El coeficiente de resistencia al avance es esencialmente constante en superficies aerodinámicas hasta de un número de Mach de alrededor de 0.75. Entonces se presenta un repentino aumento hasta que el número de Mach llega a la unidad; vea la figura 8.15. Luego el coeficiente de resistencia al avance baja lentamente. Es obvio que la condición de M = 1 ha de evitarse. Así, un avión vuela ya sea a M < 0.75 o M > 1.5 o a valores similares, para evitar los altos coeficientes de resistencia al avance cercanos a M = 1. Cerca de M = 1 hay también regiones de flujo que oscilan de subsónicas a supersónicas, oscilaciones que crean fuerzas que es mejor evitar.

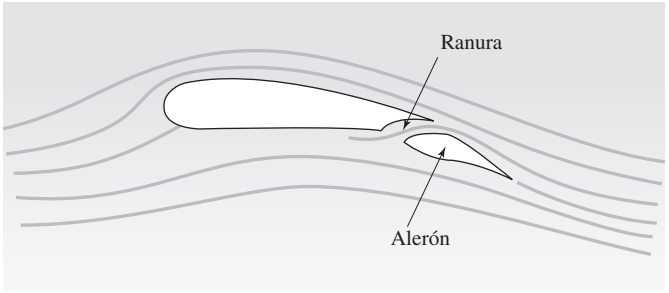


Fig. 8.14 Superficie aerodinámica con alerón y ranura para control de la separación.

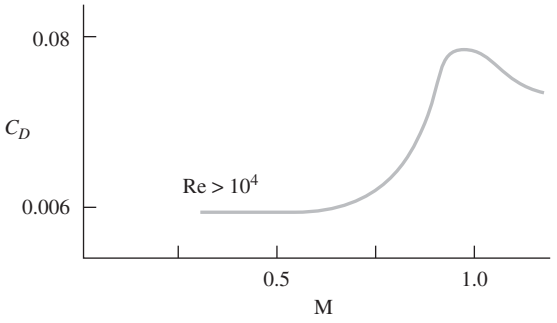


Fig. 8.15 Coeficiente de resistencia al avance como función del número de Mach (velocidad) para una superficie sin alas en flecha común.

Es útil usar superficies aerodinámicas con alas en flecha, dado que es la componente de la velocidad normal al borde de ataque de la superficie aerodinámica la que debe usarse para calcular el número de Mach en la figura 8.15. Velocidades de crucero con M = 0.8 con alas en flecha no son raras. Debe señalarse, no obstante, que el consumo de combustible depende de la potencia requerida, y la potencia es la fuerza de resistencia al avance multiplicada por la velocidad; por tanto, el consumo de combustible depende de la velocidad elevada al cubo porque la fuerza de resistencia al avance depende de la velocidad al cuadrado, suponiendo que todos los otros parámetros son constantes. Una velocidad más baja resulta en ahorro de combustible aunque los motores deban operar más tiempo cuando recorren una distancia fija.

CONCEPTO CLAVE *La componente de la velocidad normal al borde de ataque se usa para calcular el número de Mach.*

Un comentario final sobre superficies aerodinámicas se refiere a la influencia de una superficie aerodinámica finita. Para entender el flujo alrededor de una superficie aerodinámica finita hacemos referencia a un vórtice. Las partículas de fluido giran alrededor del centro de un vórtice a medida que se desplazan a lo largo del campo de flujo. Hay una alta presión en la parte inferior y una baja presión en el lado superior de la superficie aerodinámica mostrada en la figura 8.16, con un modelo de superficie aerodinámica en la figura 8.17. Esto resulta en un movimiento de aire del lado inferior al lado superior alrededor de los extremos de la superficie aerodinámica, como se muestra, resultando en un fuerte vórtice en la punta. También se forman vórtices distribuidos a lo largo de la superficie aerodinámica, y todos se reúnen en dos grandes vórtices de salida. En un día claro, los dos vórtices de salida pueden aparecer como estelas blancas visibles de vapor de agua detrás de un avión que vuele a gran altura. Los vórtices de salida persisten a una considerable distancia (quizá 15 km) detrás un avión grande, y sus velocidades de 90 m/s pueden hacer

Vórtice de salida, 725, 577

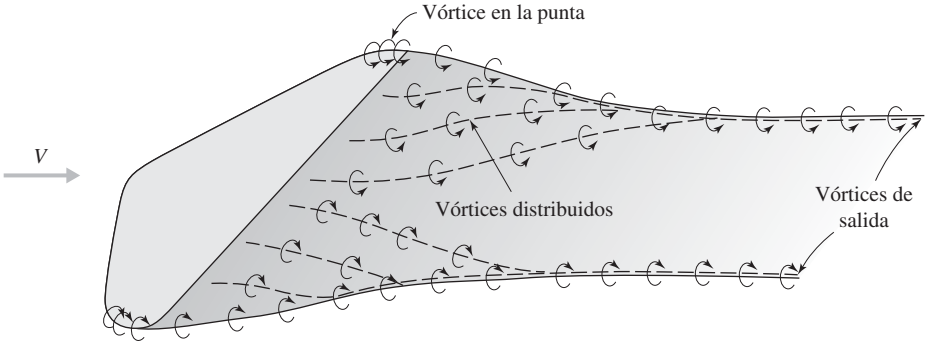


Fig. 8.16 Vórtice de salida.

Fig. 8.17 Vórtices de salida de un ala rectangular. El flujo permanece adherido sobre toda la superficie del ala. Los centros de los núcleos de los vórtices dejan de tener contacto con el borde de salida en las puntas. El modelo se prueba en un túnel de humo a un número de Reynolds de 100 000. (Fotografía de M. R. Head. de *Album of Fluid Motion*, 1982, The Parabolic Press, Stanford, California.)

que un avión pequeño que vuele detrás del grande dé una voltereta. Además, los vértices de salida inducen una deflexión hacia debajo de los filetes de aire, es decir una componente de la velocidad hacia abajo, que debe ser tomada en cuenta en el diseño del avión. La sección de cola está ubicada alta para reducir al mínimo el efecto de esta deflexión.

CONCEPTO CLAVE *Los vórtices de salida detrás de un avión grande pueden hacer que un avión pequeño pierda el control.*

Ejemplo 8.7

Un avión ligero pesa 10 000 N, su envergadura es de 12 m, su cuerda mide 1.8 m y se anticipa una carga útil de 2000 N. Calcule (a) la velocidad de despegue si se desea un ángulo de ataque de 8º, (b) la velocidad de pérdida de sustentación de la superficie aerodinámica convencional y (c) la potencia requerida por la superficie aerodinámica durante un vuelo de crucero a 50 m/s.

Solución

(a) La sustentación de un avión es igual a su peso. Con la carga útil, el peso total es 12 000 N; por tanto, la ecuación del coeficiente de sustentación (8.4.1) da lo siguiente:

$$V = \left(\frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho C_L c L} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{12\,000 \text{ N}}{\frac{1}{2} \times 1.20 \text{ kg/m}^3 \times 1.0 \times 1.8 \text{ m} \times 12 \text{ m}} \right)^{1/2} = 30.4 \text{ m/s}$$

donde usamos $C_L = 1.0$ en $\alpha = 8°$ de la figura 8.13, y $\rho = 1.2$ kg/m^3 puesto los que aviones ligeros despegan al nivel del suelo y no se da la elevación.

(*continúa*)

(b) La velocidad de pérdida de sustentación se encuentra usando un coeficiente de sustentación máximo de 1.72 de la figura 8.13:

$$V_{\text{pérdida}} = \left(\frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho C_L c L} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{12\,000}{\frac{1}{2} \times 1.20 \times 1.72 \times 1.8 \times 12} \right)^{1/2} = 23.2 \text{ m/s}$$

(c) La potencia demandada por la superficie aerodinámica durante un vuelo de crucero es igual a la fuerza de resistencia al avance multiplicada por la velocidad. Se supone que el coeficiente de sustentación de diseño es igual a 0.3, y por tanto de la figura 8.13, suponiendo una superficie aerodinámica convencional, $C_D = 0.0063$. Esto da

$$F_D = \frac{1}{2}\rho V^2 c L C_D$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.20 \text{ kg/m}^3 \times 50^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \times 1.8 \text{ m} \times 12 \text{ m} \times 0.0063 = 204 \text{ N}$$

La potencia es entonces

$$\text{potencia} = F_D \times V$$

$$= 204 \text{ N} \times 50 \text{ m/s} = 10\,200 \text{ W} \quad \text{o} \quad 13.7 \text{ hp}$$

La potencia total sería considerablemente mayor porque deben incluirse la resistencia al avance sobre el fuselaje y la sección de cola.

8.5 TEORÍA DEL FLUJO POTENCIAL

8.5.1 Ecuaciones básicas de flujo

CONCEPTO CLAVE *La solución para flujo inviscido es muy importante en nuestro estudio de flujos externos.*

Existe un flujo inviscido fuera de la capa límite y en la estela en flujos con número de Reynolds alto alrededor de cuerpos. Para una superficie aerodinámica la capa límite es muy delgada, y el flujo inviscido da una buena aproximación al flujo real; se usa predecir la distribución de la presión sobre una superficie, con lo cual se obtiene una buena estimación de la sustentación. También nos da la velocidad a usar como condición límite en la solución de capa límite de la sección 8.6; de esa solución podemos calcular la resistencia al avance y predecir posibles puntos de separación. En consecuencia, la solución para flujo inviscido es muy importante en nuestro estudio de flujos externos. Obviamente, si usamos los resultados empíricos de secciones previas, son innecesarios los detalles de la solución para flujo inviscido. Si, por otra parte, deseamos predecir cantidades tales como la sustentación y la resistencia al avance y localizar posibles puntos de separación usando las ecuaciones diferenciales requeridas, es esencial la solución para flujo inviscido.

Considere un campo de velocidad que está dado por el gradiente de una función escalar ϕ, es decir,

$$\mathbf{V} = \nabla\phi \tag{8.5.1}$$

Flujo potencial: *Flujo con vorticidad cero.*

en la que ϕ recibe el nombre de *función potencial de velocidad*. Este campo de velocidad se llama **flujo potencial** (o *flujo irrotacional*) y posee la propiedad de que la vorticidad ω, que es el rotacional del vector velocidad, es cero; esto se expresa con

$$w = \nabla \times \mathbf{V} = 0 \tag{8.5.2}$$

CONCEPTO CLAVE *La vorticidad es cero para un flujo potencial.*

El hecho de que la vorticidad sea cero para un flujo potencial puede demostrarse si hacemos $\mathbf{V} = \nabla\phi$ y desarrollamos la ecuación 8.5.2 en coordenadas rectangulares. Una partícula de fluido que no posee vorticidad (es decir, no está girando) no puede obtener vorticidad sin la acción de la viscosidad; las fuerzas de presión normales y las fuerzas de cuerpo que actúan a través del centro de masa no pueden impartir rotación a una partícula de fluido. Este resultado también se observa de la *ecuación de vorticidad*, que se obtiene al tomar el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes (5.3.17) (vea la sección 5.3.4 si los detalles son de interés); la ecuación de vorticidad es

Flujos potenciales, 123, 271

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{8.5.3}$$

Observe que si $\boldsymbol{\omega} = 0$, la única forma en que $D\boldsymbol{\omega}/Dt$ no puede ser cero es que los efectos viscosos actúen en el último término. Si los efectos viscosos están ausentes, como en un flujo inviscido, entonces $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$ y la vorticidad debe permanecer igual a cero.

Con la velocidad dada por el gradiente de una función escalar, la ecuación diferencial de continuidad (5.2.10), para un flujo incompresible, da

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{8.5.4}$$

que se conoce como *ecuación de Laplace*, nombrada en honor de Pierre S. Laplace (1749-1827). En coordenadas rectangulares esto es

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{8.5.5}$$

Con las condiciones de frontera apropiadas esta ecuación puede resolverse. No obstante, los problemas tridimensionales son muy difíciles, de modo que nos concentramos en flujos planos en los que las componentes de la velocidad u y v dependen de x y de y. Esto es aceptable para superficies aerodinámicas bidimensionales y otros flujos planos, tal como el flujo alrededor de cilindros.

Antes de intentar obtener una solución para la ecuación 8.5.5, definamos otra función escalar que nos ayudará en nuestro estudio de flujos de fluido planos. La ecuación de continuidad (5.2.9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.5.6}$$

motiva la definición. Si hacemos

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.5.7}$$

Función de corriente: *La función de corriente es constante a lo largo de una línea de corriente.*

observamos que la ecuación de continuidad se satisface automáticamente; la función escalar $\psi(x, y)$ se denomina **función de corriente**. Con el uso de la descripción matemática de una línea de corriente, $\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$, vemos que, para un flujo plano, $udy - vdx = 0$. Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones 8.5.7, esto se convierte en

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx = 0 \tag{8.5.8}$$

Esto es, por definición, $d\psi = 0$. Entonces ψ es constante a lo largo de una línea de corriente. El ejemplo 8.9 mostrará que la diferencia $(\psi_2 - \psi_1)$ entre cualesquiera dos líneas de corriente es igual al caudal por unidad de profundidad entre dos líneas de corriente.

El vector vorticidad para un flujo plano tiene sólo una componente z puesto que $\omega = 0$ y no hay variación con z. La vorticidad es

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.5.9}$$

Para nuestro flujo potencial demandamos que la vorticidad sea cero, de modo que la ecuación 8.5.9 nos da, usando las ecuaciones 8.5.7,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{8.5.10}$$

Entonces vemos que la función de corriente ψ y la función de potencial ϕ satisfacen la ecuación de Laplace para este flujo plano.

En lugar de intentar obtener una solución para la ecuación de Laplace para un flujo particular de interés, usaremos una técnica diferente; identificaremos algunas funciones relativamente simples que satisfagan la ecuación de Laplace y luego superpondremos estas funciones simples para crear flujos de interés. Es posible generar cualquier flujo plano deseado usando esta técnica. Por tanto, en realidad no resolveremos la ecuación de Laplace.

CONCEPTO CLAVE
Superpondremos funciones simples para crear flujos de interés.

Antes de presentar algunas funciones simples, haremos algunas observaciones adicionales respecto a ϕ y ψ. Usando las ecuaciones 8.5.1 y 8.5.7, vemos que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.5.11}$$

Estas relaciones entre las derivadas de ϕ y ψ son las famosos *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, nombradas así en honor de Augustin L. Cauchy (1789-1857) y Georg F. Riemann (1826-1866), de la teoría de las variables complejas. Las funciones ϕ y ψ son funciones armónicas ya que satisfacen la ecuación de Laplace y forman una *función analítica* $(\phi + i\psi)$ llamada *potencial de velocidad compleja.* La teoría de las variables complejas con todos sus poderosos teoremas es entonces aplicable a esta restringida clase de problemas: es decir, flujos planos, potenciales, incompresibles. Un ejemplo demostrará que las líneas de corriente y las líneas de potencial constante se intersecan entre sí a ángulos rectos.

CONCEPTO CLAVE *Las líneas de corriente y las de potencial constante se intersecan a ángulos rectos.*

Ejemplo 8.8

Una función escalar de potencial está dada por $\phi = A \tan^{-1}(y/x)$. Encuentre la función de corriente $\psi(x, y)$.

Solución

La relación entre ϕ y ψ está dada por la ecuación 8.5.11. Tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}$$

Esto puede integrarse como sigue:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy = -A \int \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy$$

$$\therefore \psi = -\frac{A}{2}\ln(x^2 + y^2) + f(x)$$

Debe agregarse una función de x en lugar de una constante porque se usan derivadas parciales. Ahora, derivemos esta expresión respecto a x. Resulta

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{df}{dx}$$

Esto debe ser igual a $(-\partial\phi/\partial y)$ como lo requiere la ecuación 8.5.11; esto es,

$$-\frac{Ax}{x^2 + y^2} + \frac{df}{dx} = -\frac{Ax}{x^2 + y^2}$$

Entonces

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \text{o} \qquad f = C$$

Como ϕ y ψ se usan para hallar las componentes de la velocidad por medio de derivación, la constante C no es de interés; por lo general se iguala a cero. En consecuencia,

$$\psi = -\frac{A}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

Ejemplo 8.9

Demuestre que la diferencia en la función de corriente entre cualesquiera dos líneas de corriente es igual al caudal por unidad de profundidad entre las dos líneas de corriente. El caudal por unidad de profundidad está denotado por q.

Solución

Considere el flujo entre dos líneas de corriente infinitesimalmente cercanas, como se muestra en la figura E8.9a. El caudal por unidad de profundidad a través del área elemental es, por referencia de la fig. E8.9b,

(*continúa*)

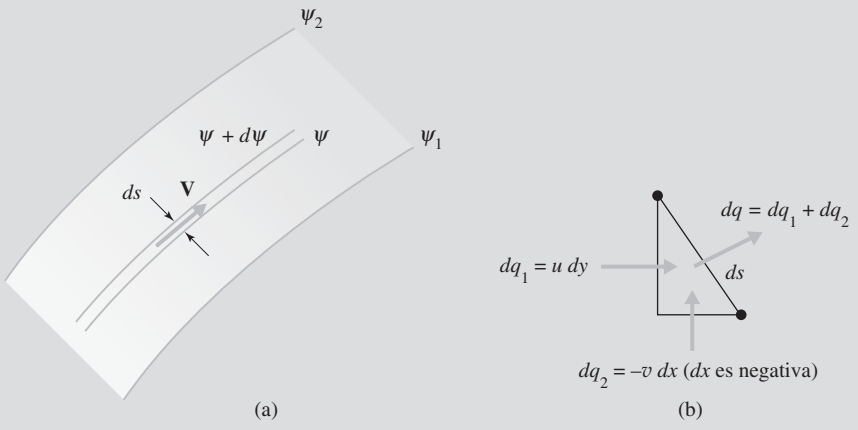


Fig. E8.9

$$\begin{aligned} dq &= dq_1 + dq_2 \\ &= u dy - v dx \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \end{aligned}$$

Si esto se integra entre dos líneas de corriente con $\psi = \psi_1$ y $\psi = \psi_2$, resulta

$$q = \psi_2 - \psi_1$$

con lo que se demuestra el enunciado del ejemplo.

Ejemplo 8.10

Demuestre que las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de un flujo plano, incompresible, potencial, se intersecan a ángulos rectos.

Solución

Si, en un punto, la pendiente de una línea de corriente es el recíproco negativo de la pendiente de una línea equipotencial, las dos rectas son perpendiculares entre sí. La pendiente de una línea de corriente (vea la fig. 8.10a) está dada por

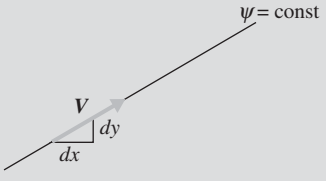


Fig. E8.10a

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = \text{const}} = \frac{v}{u}$$

La pendiente de una línea equipotencial se encuentra a partir de

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = 0$$

ya que ϕ = constante a lo largo de una línea equipotencial. Esto da

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = \text{const}} = -\frac{\partial \phi/\partial x}{\partial \phi/\partial y} = -\frac{u}{v}$$

Por tanto, vemos que la pendiente de la línea de corriente es el recíproco negativo de la pendiente de la línea equipotencial; esto es,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = \text{const}} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = \text{const}}\right)^{-1}$$

Entonces, siempre que líneas de corrientes intersequen las líneas equipotenciales, deben hacerlo a ángulos rectos. Se muestra un bosquejo de las líneas de corriente y líneas equipotenciales (igualmente separadas a grandes distancias desde el cuerpo), conocidas como *red de flujo*, en la figura E8.10b para un flujo sobre un vertedero. Este bosquejo cuidadosamente trazado se puede usar para aproximar las velocidades en puntos de interés en un flujo inviscido. Las presiones pueden entonces estimarse usando la ecuación de Bernoulli.

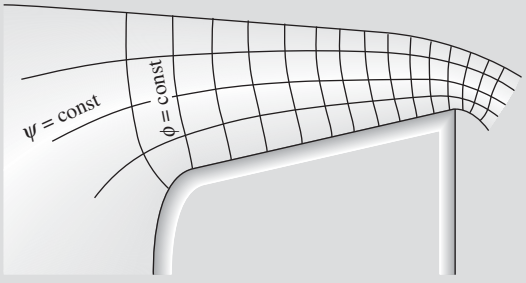


Fig. E8.10b

8.5.2 Soluciones simples

A continuación, identifiquemos algunas funciones relativamente simples que satisfacen la ecuación de Laplace, pero, antes de hacerlo, es más conveniente usar coordenadas polares. La ecuación de Laplace, la ecuación de continuidad, y las componentes de la velocidad toman las formas siguientes:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{8.5.12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{8.5.13}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{8.5.14}$$

Flujos potenciales simples, 277

Introduciremos los nombres de cuatro flujos simples, trazados en la figura 8.18 y sus funciones correspondientes, cada una de las cuales satisface la ecuación de Laplace. Los nombres y las funciones son:

Flujo uniforme:	$\psi = U_\infty y$	$\phi = U_\infty x$	(8.5.15)
Fuente de líneas:	$\psi = \dfrac{q}{2\pi}\theta$	$\phi = \dfrac{q}{2\pi}\ln r$	(8.5.16)
Vórtice irrotacional:	$\psi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$\phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$	(8.5.17)
Doblete:	$\psi = -\dfrac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r}$	$\phi = -\dfrac{\mu \cos\theta}{r}$	(8.5.18)

Se supone que la velocidad de flujo uniforme U_∞ es en la dirección x; si se desea una componente y, se agrega un término apropiado. La *intensidad de la fuente* q es el caudal por unidad de profundidad que sale de la fuente; un valor negativo creará un *sumidero*. La *fuerza de vórtice* Γ es la *circulación* alrededor del origen, definida por

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \tag{8.5.19}$$

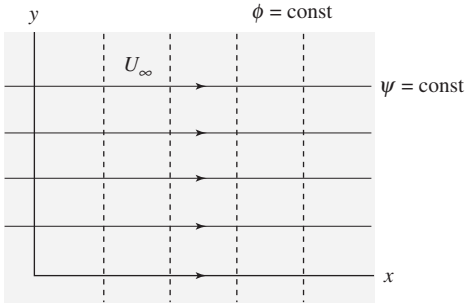
donde L debe ser una curva cerrada (comúnmente se usa un círculo) alrededor del origen y el sentido de las manecillas del reloj es positiva. La *magnitud de doblete* μ es para un doblete orientado en la dirección x negativa; observe la flecha grande (en la figura 8.18d) que muestra la dirección del doblete. Los dobletes orientados en otras direcciones raras veces son de interés y no se consideran aquí.

CONCEPTO CLAVE *Un doblete puede visualizarse como una fuente y un sumidero de igual magnitud separados una distancia muy pequeña.*

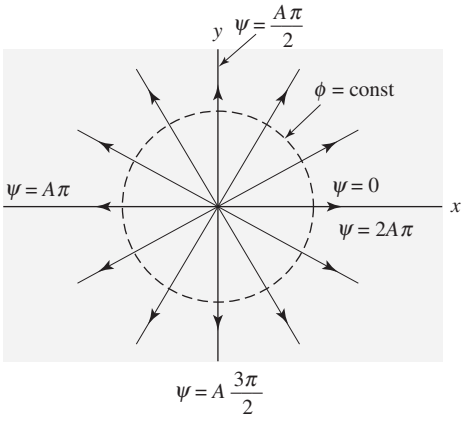
De los cuatro flujos presentados antes, el doblete es más bien misterioso; puede visualizarse como una fuente y un sumidero de igual magnitud separados una distancia muy pequeña. Su utilidad es en la creación de ciertos otros flujos de interés. El vórtice irrotacional se encuentra cuando se arremolina agua al drenarse por un drenaje o hacia la turbina de una represa hidroeléctrica o, más espectacularmente, en un tornado.

Las componentes de la velocidad para los cuatro flujos simples se muestran, usando las ecuaciones 8.5.11 y 8.5.14 para coordenadas rectangulares y polares, como sigue:

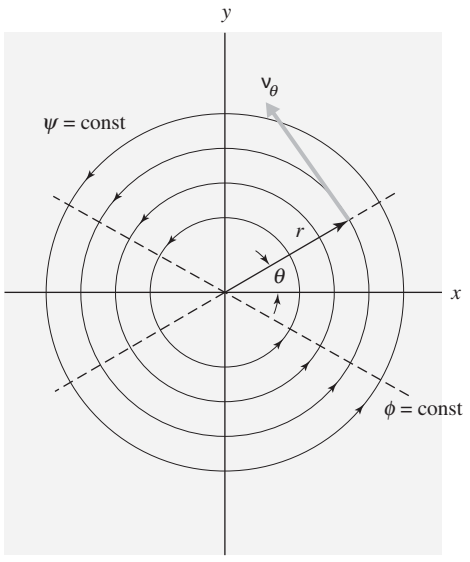
Flujo uniforme:	$u = U_\infty$	$v = 0$	(8.5.20)
	$v_r = U_\infty \cos\theta$	$v_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta$	



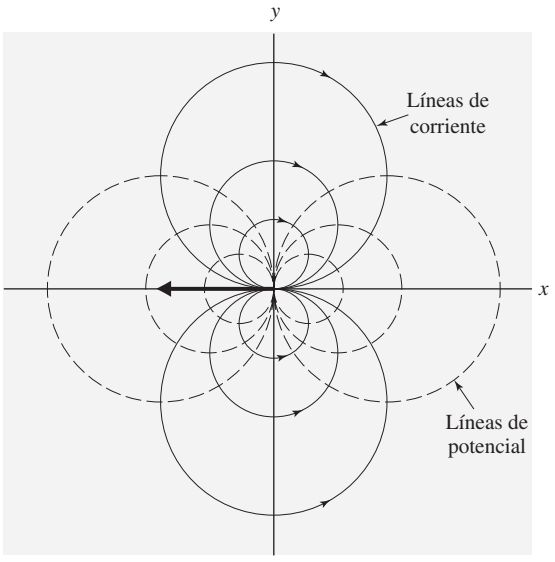
(a) Flujo uniforme en la dirección x



(b) Fuente de líneas



(c) Vórtice irrotacional



(d) Doblete

Fig. 8.18 Cuatro flujos potenciales simples.

Fuente de líneas:

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \qquad v_\theta = 0$$

$$u = \frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{8.5.21}$$

Vórtice irrotacional:	$v_r = 0$	$v_\theta = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}$	
	$u = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$	$v = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2}$	(8.5.22)
Doblete:	$v_r = -\dfrac{\mu\cos\theta}{r^2}$	$v_\theta = -\dfrac{\mu\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$	
	$u = -\mu\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$	$v = -\mu\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$	(8.5.23)

Un doblete, 281

Ejemplo 8.11

La presión manométrica alejada de un vórtice irrotacional (un tornado simplificado) en la atmósfera es cero. Si la velocidad en $r = 20$ m es 20 m/s, estime la velocidad y presión en $r = 2$ m. (El vórtice irrotacional deja de ser un buen modelo de tornado cuando r es pequeño. En el "ojo" del tornado el movimiento es aproximado por un movimiento de cuerpo rígido.)

Solución

Para un vórtice irrotacional, sabemos que

$$v_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\Gamma &= -2\pi r v_\theta \\ &= -2\pi \times 20 \times 20 = -800\pi\ \text{m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

La velocidad en $r = 2$ m es entonces

$$v_\theta = -\frac{-800\pi}{2\pi \times 2} = 200\ \text{m/s}$$

La ecuación de Bernoulli para este flujo incompresible, inviscido y permanente da la presión como sigue, suponiendo una atmósfera en calma lejos del tornado:

$$\begin{aligned}p_\infty^{\,0} + \frac{U_\infty^{\,2\,0}}{2}\rho &= p + \frac{v_\theta^2}{2}\rho \\ \therefore p &= -\frac{1}{2}\rho v_\theta^2 \\ &= -\frac{1}{2} \times 1.20 \times 200^2 = -24\,000\ \text{Pa}\end{aligned}$$

El signo negativo denota un vacío. Es este vacío el que hace que los techos de construcciones se desprendan durante un tornado.

8.5.3 Superposición

CONCEPTO CLAVE *El flujo plano e incompresible más complicado puede construirse usando estos flujos sencillos.*

Los flujos simples presentados en la sección 8.5.2 son de particular interés, porque pueden superponerse entre sí para formar flujos más complicados de importancia en ingeniería. De hecho, el flujo plano e incompresible más complicado puede construirse usando estos flujos simples. Por ejemplo, supóngase que se desea un flujo alrededor de una superficie aerodinámica con un alerón con una ranura. Podríamos dividir la superficie de la superficie aerodinámica en un número relativamente grande (200, por ejemplo) de paneles, localizar una fuente o un sumidero (alternadamente, un doblete) en el centro de cada panel, agregar un flujo uniforme y un vórtice irrotacional y después, al ajustar[5] las magnitudes de la fuente del panel, podría crearse el flujo inviscido deseado. El desarrollo del modelo y la rutina computarizada necesarios para realizar los cálculos se consideran fuera del ámbito de este libro.

En esta sección demostramos una superposición al crear un flujo alrededor de un cilindro circular con y sin circulación. Primero, superponemos un flujo uniforme y un doblete; el resultado es

$$\psi = U_\infty y - \frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r} \tag{8.5.24}$$

La componente de la velocidad v_r es (sea $y = r \operatorname{sen}\theta$)

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= U_\infty \cos\theta - \frac{\mu}{r^2}\cos\theta \end{aligned} \tag{8.5.25}$$

Hagamos la pregunta: ¿Hay un radio r_c para el cual $v_r = 0$? Si hacemos $v_r = 0$ encontramos que

$$r_c = \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty}} \tag{8.5.26}$$

Con este radio, v_r es idénticamente cero para todos los ángulos θ y por tanto el círculo $r = r_c$ debe ser una línea de corriente.

Los puntos de estancamiento se encuentran haciendo $v_\theta = 0$ en el círculo $r = r_c$. De donde resulta

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -U_\infty \operatorname{sen}\theta - \frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r_c^2} = -2U_\infty \operatorname{sen}\theta = 0 \end{aligned} \tag{8.5.27}$$

[5]Las intensidades de las fuentes se ajustan de modo que la componente normal de la velocidad en el centro de cada panel sea igual a cero. La fuerza de vórtice se ajusta tal que el punto de estancamiento posterior se produzca en el borde de salida.

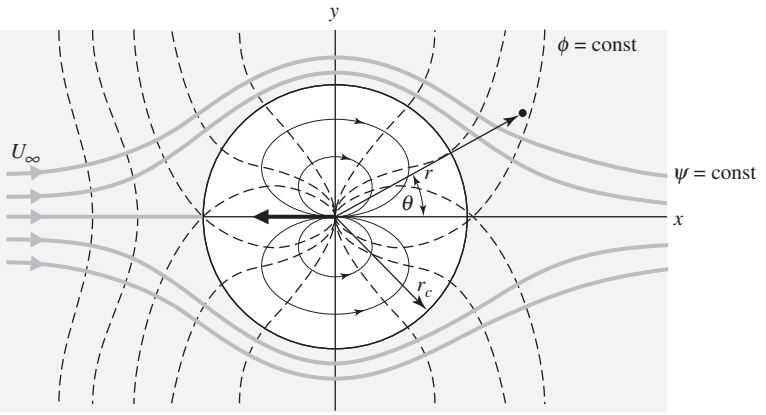
Entonces vemos que $v_\theta = 0$ a $\theta = 0^\circ$ y 180°. El flujo es como se muestra en la figura 8.19a. Sólo tenemos interés en el flujo externo a la línea de corriente circular $r = r_c$.

Si se deseara la distribución de presión en el cilindro, podría usarse la ecuación de Bernoulli entre el punto de estancamiento donde $V = 0$ y $p = p_0$ y algún punto arbitrario en el cilindro para obtener

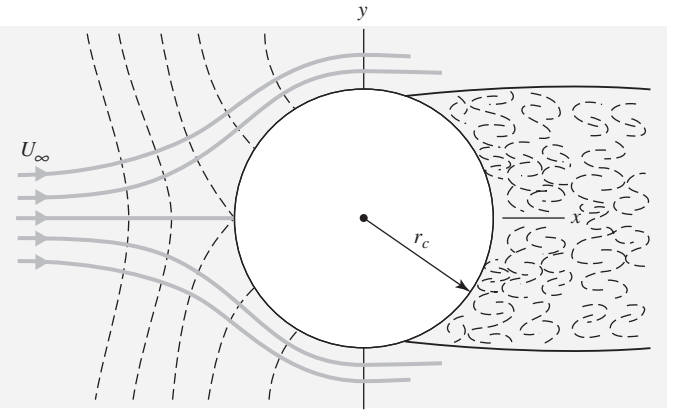
$$\begin{aligned} p_c &= p_0 - \rho \frac{v_\theta^2}{2} \\ &= p_0 - 2\rho U_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned} \tag{8.5.28}$$

Esto da una distribución de presión simétrica que da cero resistencia al avance y cero sustentación. La predicción de cero sustentación es aceptable para un flujo real, pero el resultado de resistencia al avance cero es inaceptable. Esto puede sugerir que ignoremos la solución para flujo sin fricción; no obstante, en comparación con la situación real de flujo de la figura 8.19b, la distribución de presión medida en el cilindro hasta el punto de separación casi es igual

CONCEPTO CLAVE *La distribución de presión hasta el punto de separación es casi la misma que la pronosticada por el flujo potencial.*



(a) Flujo potencial



(b) Flujo real

Fig. 8.19 Flujo alrededor de un cilindro circular.

a la pronosticada por la solución de flujo potencial. De aquí que la solución de flujo potencial nos es muy útil, incluso para cuerpos despuntados que experimentan un flujo separado. A números de Reynolds bajos, los efectos viscosos no están confinados a una capa límite delgada, de modo que la teoría de flujo potencial no es útil.

Consideremos ahora un flujo alrededor de un cilindro giratorio. Esto se logra al agregar un vórtice irrotacional al doblete y al flujo uniforme, de modo que

$$\psi = U_\infty y - \frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \tag{8.5.29}$$

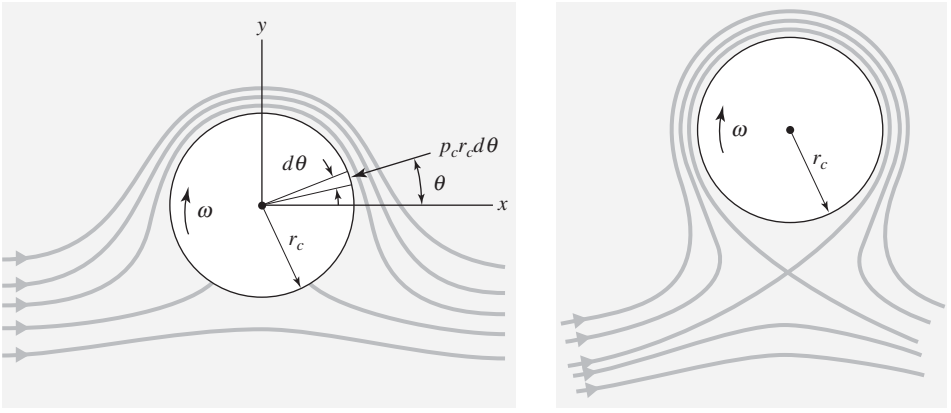
Como el flujo de vórtice, que consiste de líneas de corriente circulares, no influye en la componente de la velocidad v_r, el cilindro $r = r_c$ permanece sin cambio. Los puntos de estancamiento, sin embargo, cambian y se ubican al hacer $v_\theta = 0$ en $r = r_c$; esto es, haciendo $\mu = U_\infty r_c^{\,2}$,

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -2U_\infty \operatorname{sen}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} = 0 \end{aligned} \tag{8.5.30}$$

Esto da la ubicación de los puntos de estancamiento como se muestra en la figura 8.20. En (a) los puntos de estancamiento están sobre el cilindro donde $r = r_c$, pero en (b) la circulación es lo suficientemente grande para que un solo punto de estancamiento quede fuera del cilindro con $\theta = 270°$.

La ecuación de Bernoulli da la distribución de presión como

$$p_c = p_0 - \rho \frac{U_\infty^2}{2} \left(2 \operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_c U_\infty} \right)^2 \tag{8.5.31}$$



(a) $\Gamma < 4\pi U_\infty r_c$ (b) $\Gamma > 4\pi U_\infty r_c$

Fig. 8.20 Flujo alrededor de un cilindro circular con circulación.

Esto puede integrarse y da la resistencia al avance = 0 y la sustentación por longitud unitaria como

$$F_L = -\int_0^{2\pi} p_c \operatorname{sen}\theta \, r_c d\theta = \rho U_\infty \Gamma \tag{8.5.32}$$

CONCEPTO CLAVE *La expresión $\rho U_\infty \Gamma$ da una excelente aproximación de la sustentación para todos los cilindros.*

Esta expresión para la sustentación da una excelente aproximación de la sustentación para todos los cilindros, incluyendo la superficie aerodinámica. Junto con la conclusión de resistencia al avance cero, forma el *teorema de Kutta-Joukowski*.

Otras superposiciones de los flujos simples se incluyen en los problemas.

Ejemplo 8.12

Un cilindro de 8 pulgadas de diámetro gira en el sentido de las manecillas del reloj a 1000 rpm en una corriente de aire atmosférico a 60 ºF que fluye a 15 ft/s. Localice cualesquiera puntos de estancamiento y encuentre la presión mínima en el cilindro.

Solución

Se calcula que la circulación (vea la ecuación 8.5.19) es

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r_c^2 \omega = 2\pi \times \left(\frac{4}{12}\right)^2 \times \frac{1000 \times 2\pi}{60} = 73.1 \text{ ft}^2/\text{s}$$

Esto es mayor que $4\pi U_\infty r_c = 4\pi \times 15 \times 4/12 = 62.8$ ft^2/s; por tanto, el punto de estancamiento está fuera del cilindro (vea la figura 8.20b) en $\theta = 270$º. El radio del cilindro es

$$r_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty \operatorname{sen} 270^\circ} = -\frac{73.1}{4\pi \times 15 \times (-1)} = 0.388 \text{ ft}$$

Sólo existe un punto de estancamiento.

La presión mínima se localiza en la parte superior del cilindro donde $\theta = 90$º. Usando la ecuación de Bernoulli desde la corriente libre hasta ese punto, tenemos, haciendo $p_\infty = 0$,

$$\overset{0}{\cancel{p_\infty}} + \rho \frac{U_\infty^2}{2} = p_{\text{mín}} + \frac{\rho}{2}(v_\theta)_{\text{máx}}^2$$

$$\therefore p_{\text{mín}} = \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 - (v_\theta)_{\text{máx}}^2\right] = \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 - \left(-2U_\infty \operatorname{sen} 90^\circ - \frac{\Gamma}{2\pi r_c}\right)^2\right]$$

$$= \frac{0.0024 \text{ slug/ft}^3}{2}\left[15^2 - \left(2 \times 15 + \frac{73.1}{2\pi \times 4/12}\right)^2\right] \text{ft}^2/\text{s}^2 = -4.78 \text{ psf}$$

Ejemplo 8.12a Laboratorio virtual de flujo potencial, 295

8.6 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

8.6.1 Antecedentes generales

En nuestro estudio de los flujos externos con número de Reynolds altos hemos observado que los efectos viscosos están confinados a una delgada capa de fluido, una capa límite, próxima al cuerpo y a la estela corriente abajo del cuerpo. Para un cuerpo perfilado como lo es una superficie aerodinámica, puede obtenerse una buena aproximación de la resistencia al avance al integrar el esfuerzo cortante viscoso en la pared. Para predecir el cortante en la pared, debe conocerse el gradiente de velocidad en la pared. Esto requiere una solución completa del campo de flujo (es decir, una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes) dentro de la capa límite. Esta solución también nos permite predecir ubicaciones de posible separación. En esta sección deducimos las ecuaciones integrales y diferenciales y damos técnicas de solución para un flujo de capa límite sobre una placa plana con un gradiente de presión cero; este flujo simplificado tiene numerosas aplicaciones. Los flujos con gradiente de presión diferentes de cero sobre placas planas y los flujos sobre superficies curvas no se consideran en esta presentación introductoria.

Analicemos ahora algunas de las características de una capa límite. El borde de la capa límite, con espesor designado por $\delta(x)$, no puede ser observado en un flujo real; arbitrariamente lo definimos como el lugar geométrico de puntos donde la velocidad es igual a 99% de la velocidad de corriente libre [la velocidad de la corriente libre es la velocidad en la pared de flujo inviscido $U(x)$, como se muestra en la figura 8.21. Como la capa límite es delgada, la presión en ésta se supone que es la presión $p(x)$ en la pared, como lo predice la solución para flujo inviscido.

CONCEPTO CLAVE *El borde de la capa límite no puede ser observado en el flujo real.*

CONCEPTO CLAVE *La presión en la capa límite es la presión en la pared de la solución para flujo inviscido.*

La capa límite inicia como un flujo laminar con espesor cero en el borde de entrada de una placa plana, como se ilustra en la figura 8.22, o con algún espesor finito en el punto de estancamiento de un cuerpo despuntado o una superficie aerodinámica (vea la figura 8.3). Después de una distancia x_T, que depende de la velocidad de corriente libre, la viscosidad, el gradiente de presión, la rugosidad en la pared, el nivel de fluctuación de corriente libre, y de la rigidez de la pared, el flujo laminar experimenta un proceso de transición que resulta, después de una corta distancia, en un flujo turbulento como se muestra en la figura. Para el flujo sobre una placa plana con gradiente de presión cero este proceso de transición ocurre cuando $U_\infty x_T/\nu = 3 \times 10^5$ para flujo sobre placas rugosas o con alta intensidad de fluctuación de corriente libre ($\sqrt{\overline{u'^2}}/U_\infty \simeq 0.1$), o $U_\infty x_T/\nu = 5 \times 10^5$ para flujo sobre

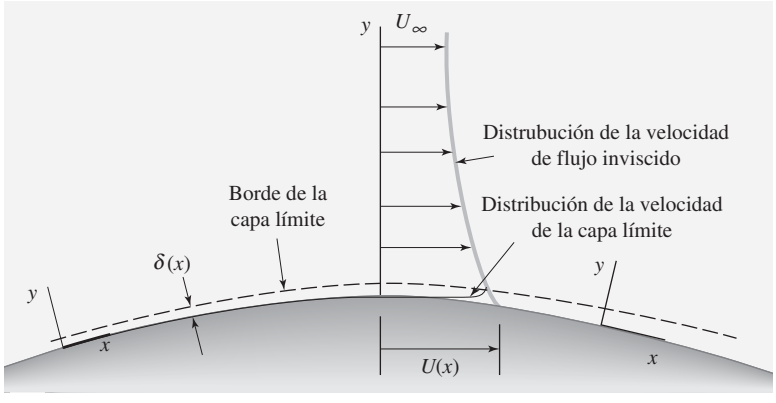


Fig. 8.21 Capa límite sobre una superficie curva.

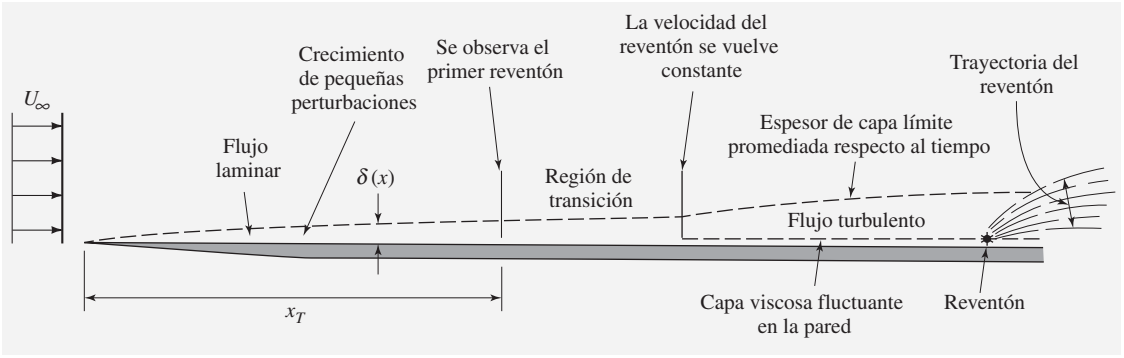
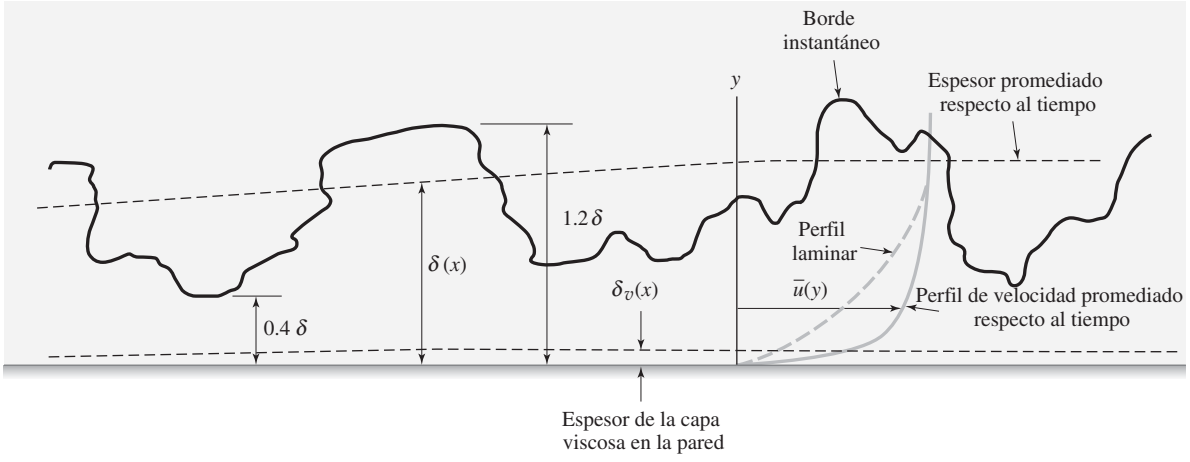
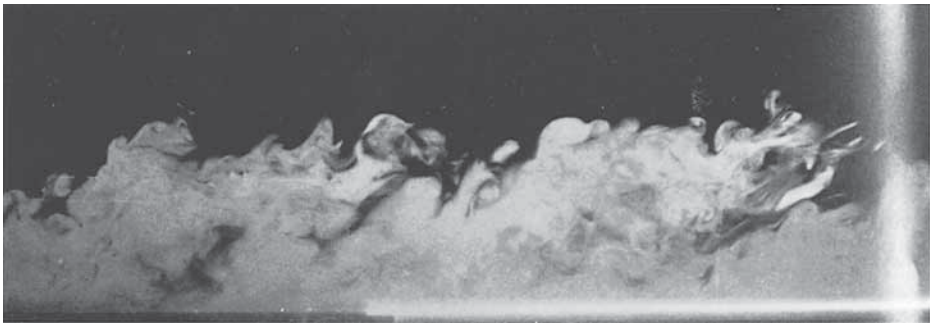


Fig. 8.22 Capa límite con transición.



(a)



(b)

Fig. 8.23 Capa límite turbulenta: (a) trazo de nomenclatura; (b) corte en la dirección de la corriente de la capa límite. (Fotografía de R. E. Falco)

placas rígidas lisas con baja intensidad de fluctuación de corriente libre. Para niveles de fluctuación extremadamente bajos en laboratorios de investigación, los flujos laminares se han observado sobre placas rígidas lisas con bordes de entrada cuidadosamente diseñados hasta de $U_\infty x_T/\nu = 10^6$.

La cantidad $U_\infty x/\nu$ es el *número de Reynolds local* y $U_\infty x_T/\nu$ es el *número de Reynolds crítico*. Para una placa plana rígida lisa y un nivel muy bajo de fluctuación de corriente libre, un flujo con gradiente de presión cero se hace inestable (es decir, crecerán las pequeñas perturbaciones) a un número de Reynolds local de aproximadamente 6×10^4. Las perturbaciones pequeñas crecen inicialmente como una onda bidimensional, luego como una onda tridimensional, y finalmente revientan como un lugar turbulento; el reventón inicial forma el inicio de la región de transición. La región de transición es relativamente corta y por lo general se ignora en los cálculos. El flujo hasta x_T se supone que es laminar, y el flujo después de x_T es considerado como turbulento.

Capas límite, 163, 260, 602, 671

CONCEPTO CLAVE *La región de transición es relativamente corta y por lo general se ignora en los cálculos.*

La capa límite turbulenta se engrosa mucho más rápidamente que la capa laminar. También tiene un cortante en la pared considerablemente mayor. Un trazo de una capa límite turbulenta son su capa viscosa en la pared, sumergida, se ilustra en la figura 8.23a, y una fotografía real en la figura 8.23b. El espesor promediado respecto al tiempo $\delta(x)$ y el espesor de la capa viscosa en la pared promediado respecto al tiempo es $\delta_\nu(x)$. Ambas capas son en realidad bastante dependientes del tiempo. El espesor instantáneo de la capa límite varía entre 0.4δ y 1.2δ, como se muestra. El perfil turbulento tiene una pendiente mayor en la pared que un perfil laminar con el mismo espesor de capa límite, como se ilustra en la figura 8.23a.

CONCEPTO CLAVE *Un perfil turbulento tiene una pendiente mayor en la pared que un perfil laminar.*

Por último, debemos destacar que la capa límite es bastante delgada. Una capa límite gruesa se muestra a escala en la figura 8.24. Hemos supuesto un flujo laminar hasta x_T y uno turbulento de allí en adelante. Para velocidades más altas disminuye el espesor de la capa límite. Si suponemos que $U_\infty = 100$ m/s, la capa límite difícilmente se notaría trazada a la misma escala, pero todos los efectos viscosos están confinados en esa capa delgada; la velocidad se lleva al reposo con gradientes muy grandes. Los efectos viscosos disipadores en esta delgada capa son lo suficientemente grandes como para ocasionar temperaturas lo suficientemente altas que los satélites se queman cuando reingresan a la atmósfera.

CONCEPTO CLAVE *Los efectos viscosos en la capa límite causan que los satélites se quemen.*

8.6.2 Ecuación integral de Von Kármán

Del perfil de la velocidad en la capa límite de la figura 8.24, se observa que la velocidad pasa de $u = 0.99U_\infty$ en $y = \delta$ a $u = 0$ en $y = 0$ a lo largo de una distancia muy corta

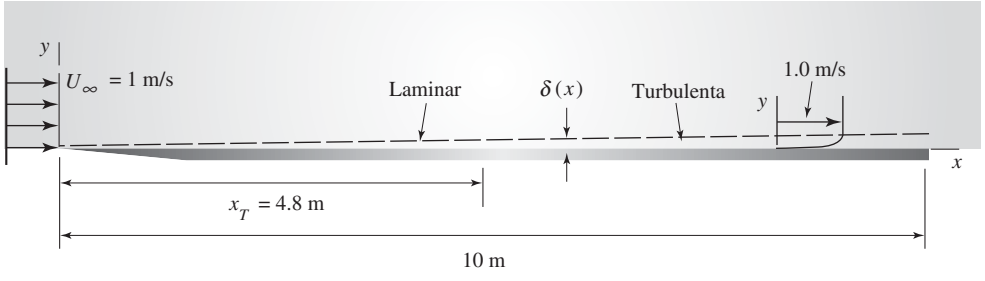


Fig. 8.24 Capa límite en aire con $\text{Re}_{crít} = 3 \times 10^5$.

CONCEPTO CLAVE
Podemos aproximar el perfil de la velocidad con una considerable precisión.

(el espesor de la capa límite). Por tanto, no es de sorprender que podamos aproximar el perfil de la velocidad para flujo laminar y turbulento con una considerable precisión. Si el perfil de la velocidad puede considerarse conocido, las ecuaciones integrales de continuidad y de la cantidad de movimiento harán posible predecir el espesor de la capa límite y el cortante en la pared y, por tanto, la resistencia al avance. Desarrollemos las ecuaciones integrales para la capa límite.

Considere un volumen de control infinitesimal, mostrado en la figura 8.25a. La ecuación integral de continuidad nos permite hallar $\dot{m}_{\text{parte superior}}$ (vea la figura 8.25b). Es, suponiendo una profundidad unitaria,

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\text{parte superior}} &= \dot{m}_{\text{salida}} - \dot{m}_{\text{entrada}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} \rho u \, dy \, dx \end{aligned} \tag{8.6.1}$$

La ecuación integral de la cantidad de movimiento toma la forma

$$\Sigma F_x = \dot{mom}_{\text{salida}} - \dot{mom}_{\text{entrada}} - \dot{mom}_{\text{parte superior}} \tag{8.6.2}$$

donde $\dot{mom}$ representa el flujo de la cantidad de movimiento en la dirección x. Por consulta de las figuras 8.25c y 8.25d esto se hace, despreciando los términos de orden superior,

$$-\delta \, dp - \tau_0 dx = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} \rho u^2 \, dy \, dx - \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} \rho u \, dy \, dx\right) U(x) \tag{8.6.3}$$

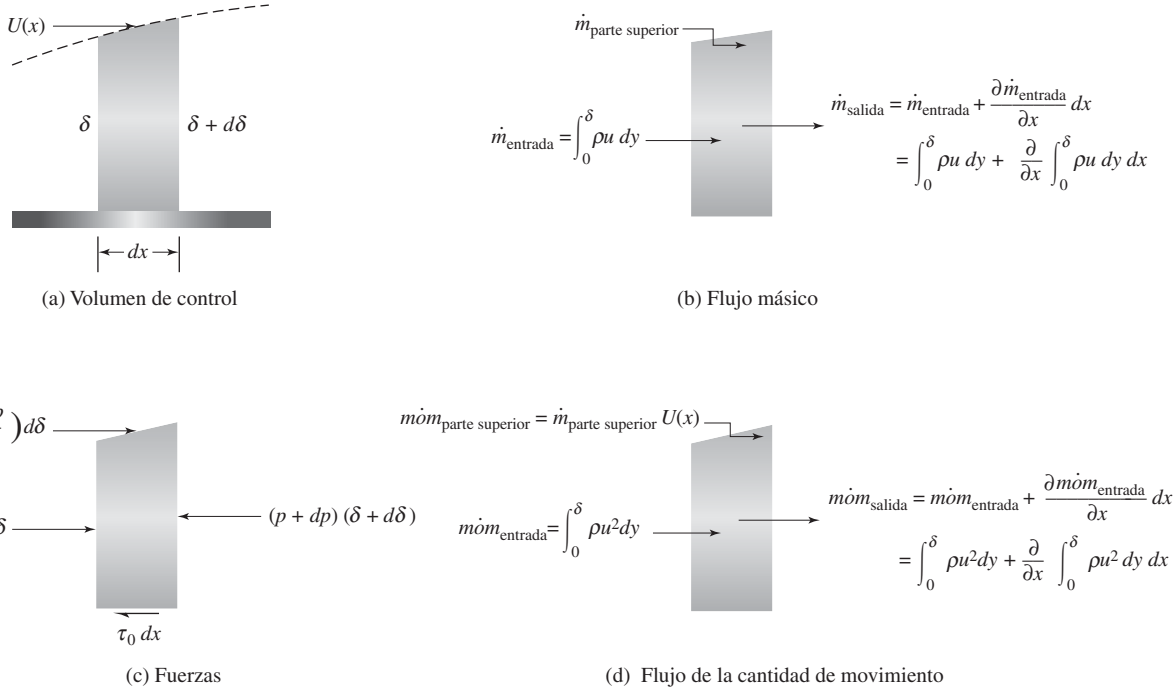


Fig. 8.25 Volumen de control para una capa límite con $U(x)$ variable.

donde $\dot{m}_{\text{parte superior}}$ está dado en la ecuación 8.6.1. No hemos supuesto que $U(x)$ sea constante. Dividamos todo entre $(-dx)$ y obtenemos

$$\tau_0 + \delta \frac{dp}{dx} = U(x) \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u \, dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 \, dy \tag{8.6.4}$$

donde hemos usado derivadas ordinarias porque las integrales son sólo funciones de x. Es frecuente que esta ecuación se conozca como *ecuación integral de Von Kármán*.

Para el flujo sobre una placa plana con gradiente de presión cero, de modo que $dp/dx = 0$ y $U(x) = U_\infty$, la ecuación integral de Von Kármán toma la forma simplificada de

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u U_\infty dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 \, dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (U_\infty - u) \, dy \end{aligned} \tag{8.6.5}$$

Si se puede suponer el perfil de la velocidad, esta ecuación junto con $\tau_0(x) = \mu \partial u/\partial y|_{y=0}$ nos permite despejar tanto $\partial(x)$ como $\tau_0(x)$. Esto se demostrará en las siguientes secciones para una capa límite laminar y una turbulenta.

Antes de hacer esto, no obstante, hay dos longitudes adicionales que con frecuencia se usan en la teoría de la capa límite. Son el *espesor de desplazamiento* δ_d y el *espesor de la cantidad de movimiento* θ, definidos por

$$\delta_d = \frac{1}{U} \int_0^\delta (U - u) \, dy \tag{8.6.6}$$

$$\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\delta u(U - u) \, dy \tag{8.6.7}$$

El espesor de desplazamiento es el desplazamiento de las líneas de corriente en la corriente libre como resultado del déficit de velocidad en la capa límite, como puede demostrarse por consideraciones de continuidad. El espesor de la capa de la cantidad de movimiento es el espesor equivalente de una capa fluida con velocidad U con cantidad de movimiento igual a la cantidad de movimiento pérdida debida a la fricción; el espesor de la cantidad de movimiento se usa con frecuencia como una longitud característica en estudios de la capa límite turbulenta. Los problemas de final de capítulo demostrarán el uso de δ_d y θ. Debe observarse, sin embargo, que la ecuación integral de Von Kármán (8.6.5) toma la forma, suponiendo que ρ = constante,

$$\tau_0 = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} \tag{8.6.8}$$

8.6.3 Solución aproximada de la capa límite laminar

Es posible usar la ecuación integral de Von Kármán y obtener una aproximación bastante precisa de la capa límite laminar en una placa plana con gradiente de pre-

sión cero. Tenemos cuatro condiciones que un perfil de velocidad propuesto debe satisfacer:

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{en} \quad y = 0 \\ u &= U_\infty && \text{en} \quad y = \delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 && \text{en} \quad y = \delta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 && \text{en} \quad y = 0 \end{aligned} \tag{8.6.9}$$

Las tres primeras de estas condiciones son obvias con base en un bosquejo del perfil de la velocidad; la cuarta condición proviene de la ecuación de Navier-Stokes de la componente x (5.3.14) dado que $u = v = 0$ en la pared, $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ en la pared y $dp/dx = 0$ para el flujo permanente sobre la placa plana considerada.

Un polinomio cúbico puede satisfacer las cuatro condiciones mencionadas; supongamos que

$$\frac{u}{U_\infty} = A + By + Cy^2 + Dy^3 \tag{8.6.10}$$

donde A, B, C y D pueden ser funciones de x. Usando las cuatro condiciones, vemos que

$$A = 0 \qquad B = \frac{3}{2\delta} \qquad C = 0 \qquad D = -\frac{1}{2\delta^3} \tag{8.6.11}$$

Por tanto, una buena aproximación para el perfil de la velocidad en un flujo laminar es

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{8.6.12}$$

Utilicemos ahora este perfil de la velocidad para hallar $\delta(x)$ y $\tau_0(x)$. La ecuación integral de Von Kármán (8.6.5) da

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho\left(\frac{3y}{2\delta} - \frac{y^3}{2\delta^3}\right)\left(1 - \frac{3y}{2\delta} - \frac{y^3}{2\delta^3}\right)U_\infty^2 dy \\ &= 0.139\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \end{aligned} \tag{8.6.13}$$

En la pared sabemos que $\tau_0 = \mu\, \partial u/\partial y\,|_{y=0}$ o usando el perfil cúbico (8.6.12),

$$\tau_0 = \mu\left(U_\infty \frac{3}{2\delta}\right) \tag{8.6.14}$$

Igualando las expresiones anteriores para $\tau_0(x)$, encontramos que

$$\delta\, d\delta = \frac{\frac{3}{2}\mu U_\infty}{0.139\rho U_\infty^2}\, dx = 10.8\,\frac{\nu}{U_\infty}\, dx \tag{8.6.15}$$

Usando $\delta = 0$ en $x = 0$ (el borde de entrada), la ecuación 8.6.15 se integra para dar

$$\delta = 4.65\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 4.65\,\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{8.6.16}$$

donde Re_x es el número de Reynolds local. Esto se vuelve a sustituir en la ecuación 8.6.14, dando el cortante en la pared como

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0.323\rho U_\infty^2\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} \\ &= \frac{0.323\rho U_\infty^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\end{aligned} \tag{8.6.17}$$

El esfuerzo cortante se hace adimensional al dividir entre $\frac{1}{2}\,\rho U_\infty^2$. El **coeficiente de fricción superficial local** c_f resultante es

Coeficiente de fricción superficial local: *Un esfuerzo cortante adimensional en la pared.*

$$\begin{aligned}c_f &= \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\,\rho\, U_\infty^2} \\ &= \frac{0.646}{\sqrt{U_\infty x/\nu}} = \frac{0.646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\end{aligned} \tag{8.6.18}$$

Si el cortante en la pared se integra a lo largo de la longitud L, resulta, por ancho unitario,

$$\begin{aligned}F_D &= \int_0^L \tau_0\, dx = 0.646\rho U_\infty\sqrt{U_\infty L\nu} \\ &= \frac{0.646\rho U_\infty^2 L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\end{aligned} \tag{8.6.19}$$

o en términos del **coeficiente de fricción superficial** C_f,

Coeficiente de fricción superficial: *Fuerza de arrastre adimensional .*

$$\begin{aligned}C_f &= \frac{F_D}{\frac{1}{2}\,\rho\, U_\infty^2 L} \\ &= \frac{1.29}{\sqrt{U_\infty L/\nu}} = \frac{1.29}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\end{aligned} \tag{8.6.20}$$

donde Re_L es el número de Reynolds en el extremo de la placa plana.

Observe que el esfuerzo cortante τ_0 se vuelve indefinido cuando $x \to 0$. Por tanto, no esperaríamos que $\tau_0(x)$ sea una muy buena aproximación del cortante en la pared cerca del borde de entrada, pero la expresión para el arrastre es aceptable.

Estos resultados son bastante buenos cuando se comparan con los resultados de una solución de las ecuaciones diferenciales (consulte la sección 8.6.6). El espesor de la capa límite es 7% demasiado bajo; la constante de la ecuación 8.6.16 debe ser 5 si se obtuviera una solución exacta. El cortante en la pared es 3% demasiado bajo; la constante en la ecuación 8.6.17 debe ser 0.332.

Ejemplo 8.13

Supongamos que el perfil de la velocidad en un flujo con capa límite pueda ser aproximado por un perfil de velocidad parabólico. Calcule el espesor de la capa límite con la ecuación 8.6.16 y el cortante en la pared con la ecuación 8.6.17. Compare con los calculados antes para el perfil cúbico.

Solución

Se supone que el perfil de velocidad parabólico es

$$\frac{u}{U_\infty} = A + By + Cy^2$$

La cuarta condición, que sería imposible de satisfacer, de (8.6.9) se omite; esto deja

$$0 = A$$
$$1 = A + B\delta + C\delta^2$$
$$0 = B + 2C\delta$$

Una solución simultánea da

$$A = 0 \qquad B = \frac{2}{\delta} \qquad C = -\frac{1}{\delta^2}$$

El perfil de la velocidad es entonces

$$\frac{u}{U_\infty} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}$$

Esto se sustituye en la ecuación integral de Von Kármán para obtener

$$\tau_0 = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$
$$= \frac{2}{15}\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

También usamos $\tau_0 = \mu\, \partial u/\partial y\,|_{y=0}$; esto es,

$$\tau_0 = \mu U_\infty \frac{2}{\delta}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$\delta\, d\delta = 15\,\frac{\nu}{U_\infty}\,dx$$

Usando $\delta = 0$ en $x = 0$, esto se integra a

$$\delta = 5.48\,\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

Esto es 18% más alto que el valor usando el cúbico pero sólo 10% más alto que el resultado más preciso de $5\,\sqrt{\nu x/U_\infty}$.

Se encuentra que el cortante en la pared es

$$\tau_0 = \frac{2\mu U_\infty}{\delta} = 0.365\rho U_\infty^2\,\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}}$$

Éste es 13% más alto que el valor usando el cúbico y 10% más alto que el valor más preciso de $0.322\,\rho U_\infty^2\,\sqrt{\nu/xU_\infty}$. Debido a que la capa límite es tan delgada, hay poca diferencia entre un perfil cúbico y una parábola o el perfil real; consulte el perfil en la figura 8.24.

Ejemplo 8.13a Crecimiento de la capa viscosa, 619-621

8.6.4 Capa límite turbulenta: forma de la ley exponencial

Para un flujo con capa límite turbulenta tenemos dos métodos para obtener la información deseada. Ambos métodos utilizan datos experimentales, pero el que presentamos en esta sección es el más simple de los dos. El segundo método, que se presentará en la siguiente sección, nos da más información de la que comúnmente deseamos para la mayoría de las aplicaciones y es más preciso.

En el método que se presentará primero ajustamos los datos para el perfil de la velocidad con una ecuación de la ley exponencial. La forma de la ley exponencial es

$$\frac{\overline{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \qquad n = \begin{cases} 7 & \mathrm{Re}_x < 10^7 \\ 8 & 10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^8 \\ 9 & 10^8 < \mathrm{Re}_x < 10^9 \end{cases} \tag{8.6.21}$$

donde

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \tag{8.6.22}$$

CONCEPTO CLAVE *La forma de la ley exponencial da malos resultados cerca de la pared.*

La ecuación integral de Von Kármán puede aplicarse ahora siguiendo los pasos empleados para un flujo laminar, excepto cuando se evalúa el esfuerzo cortante en la pared. La forma de la ley exponencial (8.6.21) da $(\partial\overline{u}/\partial y)_{y=0} = \infty$; por tanto, el

perfil da malos resultados cerca de la pared, en especial para el esfuerzo cortante. Entonces, en lugar de usar $\tau_0 = (\mu\ \partial\overline{u}/\partial y)_{y=0}$ usamos una relación empírica; la *fórmula de Blasius*, así llamada en honor de Paul R. H. Blasius (1883-1970), que relaciona el coeficiente de fricción superficial local con el espesor de la capa límite, es

$$c_f = 0.046 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \tag{8.6.23}$$

o bien, relaciona τ_0 con c_f usando la definición de c_f en la ecuación 8.6.18, la relación del esfuerzo cortante es

$$\tau_0 = 0.023\ \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \tag{8.6.24}$$

La ecuación integral de Von Kármán nos da una segunda expresión para τ_0. Sustituimos el perfil de la velocidad de (8.6.21) con $\mathrm{Re}_x < 10^7$ en la ecuación 8.6.5 y obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy \\ &= \frac{7}{72}\,\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \end{aligned} \tag{8.6.25}$$

Combinando las dos expresiones anteriores para τ_0, encontramos que

$$\delta^{1/4}\, d\delta = 0.237 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/4} dx \tag{8.6.26}$$

Suponiendo un flujo turbulento desde el borde de entrada (la porción laminar es con frecuencia bastante corta, es decir, $L \gg x_T$), resulta

$$\begin{aligned} \delta &= 0.38x\left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{1/5} \\ &= 0.38x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \end{aligned} \qquad \mathrm{Re}_x < 10^7 \tag{8.6.27}$$

Sustituyendo esta expresión para δ de nuevo en la ecuación 8.6.23, encontramos que

$$c_f = 0.059\ \mathrm{Re}_x^{1/5} \qquad \mathrm{Re}_x < 10^7 \tag{8.6.28}$$

y, realizando la integración pedida, resulta, con $n = 7$,

$$C_f = 0.073\ \mathrm{Re}_L^{-1/5} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^7 \tag{8.6.29}$$

donde $Re_L = U_\infty L/\nu$. Las relaciones previas pueden extenderse hasta $\mathrm{Re}_x \simeq 10^8$ sin incurrir en un error sustancial.

Si L no es mucho mayor que x_T, por ejemplo $L = 3x_T$, entonces hay una parte laminar importante en la parte de entrada de una placa plana, y el coeficiente de fricción superficial puede modificarse como

CONCEPTO CLAVE *Puede haber una parte laminar importante en el borde de entrada de una placa plana.*

$$C_f = 0.073\mathrm{Re}_L^{-1/5} - 1700\mathrm{Re}_L^{-1} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^7 \qquad (8.6.30)$$

Esta relación está basada en una transición que ocurre en $\mathrm{Re}_{\text{crít}} = 5 \times 10^5$. Si $\mathrm{Re}_{\text{crít}} = 3 \times 10^5$, la constante de 1700 es sustituida por 1060; si $\mathrm{Re}_{\text{crít}} = 6 \times 10^5$, es sustituida por 2080.

Por último, el espesor de desplazamiento y el espesor de la cantidad de movimiento pueden evaluarse, usando $n = 7$, y es

$$\begin{aligned} \delta_d &= 0.048x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \\ \theta &= 0.037x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \end{aligned} \qquad (8.6.31)$$

Ejemplo 8.14

Estime el espesor de la capa límite al final de una superficie plana de 4 m de largo si la velocidad de corriente libre es de $U_\infty = 5$ m/s. Use aire atmosférico a 30 ºC. También calcule la fuerza de arrastre si la superficie es de 5 m de ancho. (a) Desprecie la porción laminar del flujo y (b) tome en cuenta la parte laminar usando $\mathrm{Re}_{\text{crít}} = 5 \times 10^5$.

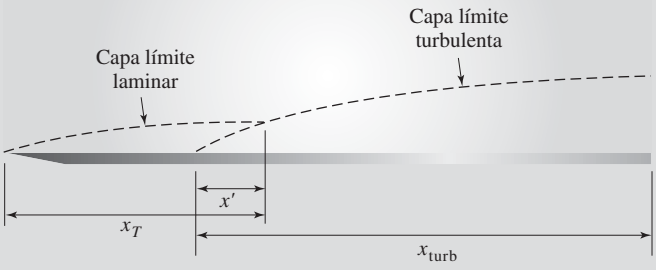


Fig. E8.14

Solución

(a) Supongamos primero flujo turbulento desde el borde de entrada. El espesor de la capa límite está dado por la ecuación 8.6.27. Es

$$\begin{aligned} \delta &= 0.38x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \\ &= 0.38 \times 4 \times \left(\frac{5 \times 4}{1.6 \times 10^{-5}}\right)^{-1/5} = 0.0917 \text{ m} \end{aligned}$$

La fuerza de arrastre es, usando la ecuación 8.6.29,

$$\begin{aligned} F_D &= C_f \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw \\ &= 0.073\left(\frac{5 \times 4}{1.6 \times 10^{-5}}\right)^{-1/5} \times \frac{1}{2} \times 1.16 \text{ kg/m}^3 \times 5^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \times 4 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 1.28 \text{ N} \end{aligned}$$

(*continúa*)

En las predicciones anteriores se supone que $\mathrm{Re}_L < 10^7$. El número de Reynolds es

$$\mathrm{Re}_L = \frac{5 \times 4}{1.6 \times 10^{-5}} = 1.25 \times 10^6$$

Por lo tanto, los cálculos son aceptables.
(b) Ahora tomemos en cuenta la parte laminar de la capa límite. Por consulta de la figura E8.14, la distancia x_T se encuentra como sigue:

$$\mathrm{Re}_{\text{crít}} = 5 \times 10^5 = \frac{U_\infty x_T}{\nu}$$
$$\therefore x_T = 5 \times 10^5 \times 1.6 \times \frac{10^{-5}}{5} = 1.6 \text{ m}$$

El espesor de la capa límite en x_T es, sustituyendo la constante de 4.65 en la ecuación 8.6.16 por el valor más preciso de 5,

$$\delta = 5\sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}}$$
$$= 5\sqrt{\frac{1.6 \text{ m} \times 1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{5 \text{ m/s}}} = 0.0113 \text{ m}$$

La ubicación del origen ficticio del flujo turbulento (vea la figura E8.14) se encuentra usando la ecuación 8.6.27 y es

$$x'^{4/5} = \frac{\delta}{0.38}\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{1/5}$$
$$\therefore x' = \left(\frac{0.0113}{0.38}\right)^{5/4}\left(\frac{5}{1.6 \times 10^{-5}}\right)^{1/4} = 0.292 \text{ m}$$

La distancia x_{turb} es entonces $x_{\text{turb}} = 4 - 1.6 + 0.292 = 2.69$ m. Usando la ecuación 8.6.27, el espesor en el extremo de la superficie es

$$\delta = 0.38x\left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{1/5}$$
$$= 0.38 \times 2.69 \times \left(\frac{1.6 \times 10^{-5}}{5 \times 2.69}\right)^{1/5} = 0.067 \text{ m}$$

El valor del inciso (a) es 37% demasiado alto cuando se compara con este valor más preciso.

La fuerza de arrastre más precisa se encuentra usando la ecuación 8.6.30 y es

$$F_D = C_f \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$
$$= [0.073\,\mathrm{Re}_L^{-1/5} - 1700\mathrm{Re}_L^{-1}] \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$
$$= \left[0.073\left(\frac{5 \times 4}{1.6 \times 10^{-5}}\right)^{-1/5} - 1700\left(\frac{5 \times 4}{1.6 \times 10^{-5}}\right)^{-1}\right] \times \frac{1}{2} \times 1.16 \times 5^2 \times 4 \times 5$$
$$= 0.88 \text{ N}$$

La predicción del inciso (a) es 45% demasiado alta. Para superficies relativamente cortas es obvio que resultan errores significativos si se desprecia la parte laminar más delgada con su esfuerzo cortante más pequeño.

Ejemplo 8.14a Perfiles en un penacho turbulento, 861-864

8.6.5 Capa límite turbulenta: forma empírica

El segundo método para predecir cantidades de flujo turbulento sobre una placa plana con gradiente de presión cero está basado enteramente en datos. Es más preciso que la forma de la ley exponencial, pero también más complicado. El perfil de la velocidad turbulenta promediada respecto al tiempo puede dividirse en dos regiones, la *región interna* y la *región externa*, como se muestra en la figura 8.26. La región interna está caracterizada por la relación *autosimilar* (la variable dependiente adimensional depende sólo de una variable independiente adimensional),

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) \tag{8.6.32}$$

CONCEPTO CLAVE *u_τ es una velocidad ficticia llamada velocidad de corte.*

en la que u_τ es la *velocidad de corte*, dada por[6]

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{8.6.33}$$

El perfil de la velocidad en la región externa está dado por la relación autosimilar

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{8.6.34}$$

donde $U_\infty - \overline{u}$ recibe el nombre de *defecto de velocidad.*

La región interna tiene tres zonas distintas: la capa viscosa en la pared, la zona de amortiguación y la zona turbulenta, como se muestra en la figura 8.26b. La *capa viscosa en la pared* altamente fluctuante tiene un perfil lineal promediado respecto al tiempo dado por

CONCEPTO CLAVE *La capa viscosa en la pared es altamente fluctuante.*

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{8.6.35}$$

La cantidad ν/u_τ es la longitud característica en la región interna turbulenta; de aquí que la distancia adimensional desde la pared está denotada por

$$y^* = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{8.6.36}$$

La capa viscosa en la pared es muy delgada, extendiéndose hasta $y^* \simeq 5$. Existe un perfil logarítmico de $y^* \simeq 50$ a $y/\delta \simeq 0.15$. En esta *zona turbulenta* autosimilar,

[6]La velocidad de corte es una velocidad ficticia y se define porque la cantidad $\sqrt{\tau_0/\rho}$ se presenta a menudo en relaciones empíricas en los flujos con capa límite turbulenta.

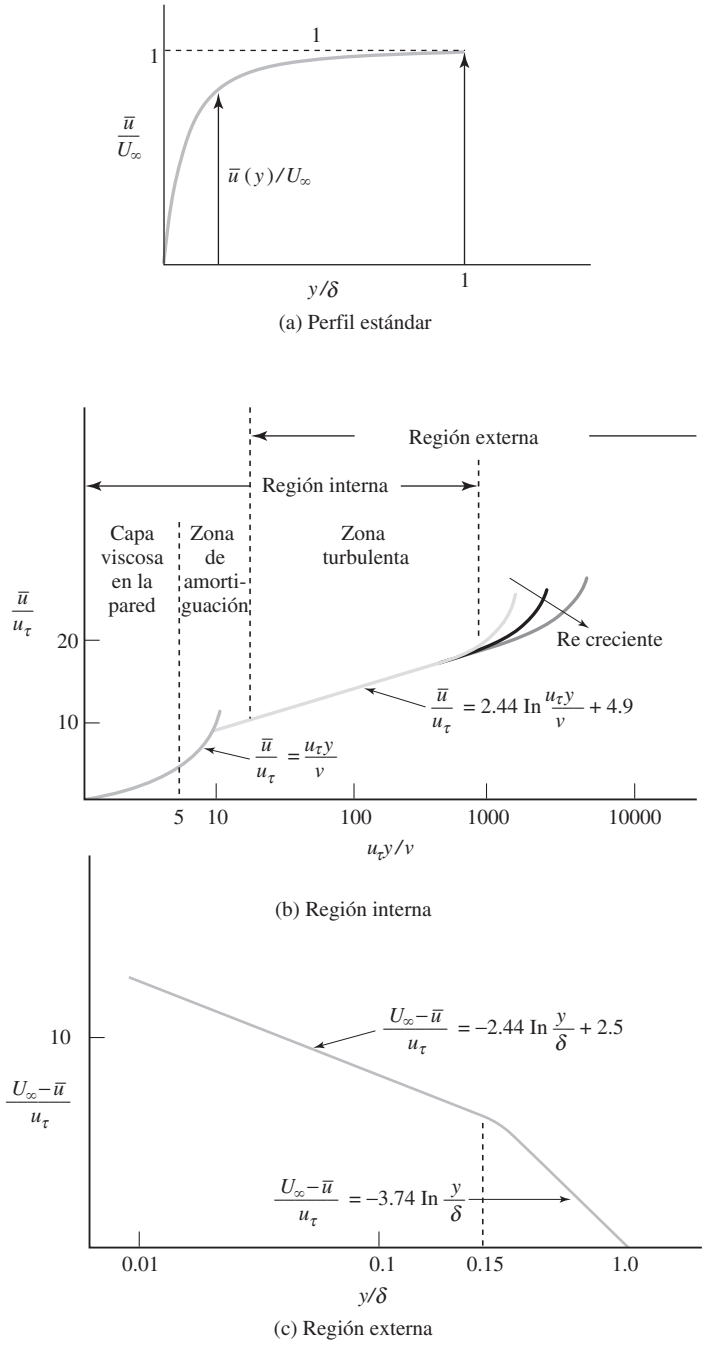


Fig. 8.26 Perfil de la velocidad en una capa límite turbulenta.

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + 4.9 \qquad 50 < \frac{u_\tau y}{\nu} \qquad \frac{y}{\delta} < 0.15 \tag{8.6.37}$$

La ubicación del borde externo de la zona turbulenta depende en gran medida del número de Reynolds. El valor de $u_\tau y/\nu$ que localiza el borde externo aumenta cuando aumenta el número de Reynolds, como se muestra. Una *zona de amortiguación*, sin perfil de velocidad específico, conecta las dos zonas autosimilares.

La región externa relaciona el defecto de velocidad con y/δ. En la zona turbulenta el perfil del defecto de velocidad está trazado en la figura 8.26c y es

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = -2.44 \ln \frac{y}{\delta} + 2.5 \qquad 50 < \frac{u_\tau y}{\nu} \qquad \frac{y}{\delta} < 0.15 \tag{8.6.38}$$

Entre $y/\delta = 0.15$ y $y/\delta = 1$ los investigadores ajustan los datos con varias relaciones; la seleccionada aquí es

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = -3.74 \ln \frac{y}{\delta} \qquad \frac{y}{\delta} > 0.15 \tag{8.6.39}$$

Las ecuaciones anteriores contienen la velocidad de corte u_τ, que depende del cortante en la pared τ_0. La ecuación que es válida en la pared es la ecuación 8.6.35, la cual, usando $\tau_0 = \mu\, \partial u/\partial y|_{y=0}$, simplemente nos da una identidad. No nos permite calcular τ_0. Por tanto, es necesaria una relación para que nos dé τ_0 (o igualmente c_f). Se usan varias relaciones; una que da excelentes resultados es

$$c_f = \frac{0.455}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_x)^2} \tag{8.6.40}$$

CONCEPTO CLAVE *Este coeficiente de fricción superficial local nos permite determinar τ_0 y por tanto también u_τ.*

Este coeficiente de fricción superficial local nos permite determinar τ_0 y por tanto u_τ en cualquier lugar de interés. Los perfiles de la velocidad pueden usarse para calcular cantidades de interés, pero u_τ debe conocerse.

Suponiendo un flujo turbulento desde el borde de entrada, el esfuerzo cortante puede integrarse para obtener el arrastre. Entonces el coeficiente de fricción superficial se convierte en

$$C_f = \frac{0.523}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_L)^2} \tag{8.6.41}$$

Esta relación es muy buena y puede usarse hasta $\mathrm{Re}_L = 10^9$ con un error de 2% o menor. Aun con $\mathrm{Re}_L = 10^{10}$ el error es de alrededor de 4%. Para tomar en cuenta una parte laminar, el mismo término incluido en la ecuación 8.6.30 puede restarse a la ecuación 8.6.41.

Para concluir esta sección, puede obtenerse una relación muy útil al combinar los dos perfiles logarítmicos para la zona turbulenta común. Sustituya la ecuación 8.6.37 en la 8.6.38 para obtener

$$\frac{U_\infty}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + 7.4 \tag{8.6.42}$$

Esta ecuación permita un cálculo fácil de δ conociendo u_τ.

Ejemplo 8.15

Estime el espesor δ_ν de la capa viscosa en la pared, y el espesor de la capa límite en el extremo de una placa plana de 15 ft de largo, si $U_\infty = 100$ ft/s en aire atmosférico a 60 ºF. También, calcule la fuerza de arrastre en un lado si la placa mide 10 ft de ancho. Use los datos empíricos.

Solución

Para hallar el espesor de la capa viscosa en la pared debemos conocer la velocidad de corte y por tanto el cortante en la pared. El cortante en la pared, usando la ecuación 8.6.40, y la velocidad de corte en $x = 15$ ft son

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c_f \\ &= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \frac{0.455}{(\ln 0.06 \mathrm{Re}_x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 0.0024 \text{ slug/ft}^3 \times 100^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \frac{0.455}{\left(\ln 0.06 \dfrac{100 \times 15}{1.6 \times 10^{-4}}\right)^2} = 0.0311 \text{ psf}\end{aligned}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.0311 \text{ lb/ft}^2}{0.0024 \text{ slug ft}^3}} = 3.6 \text{ ft/s}$$

El espesor de la capa viscosa en la pared se determina usando la ecuación 8.6.36 con $y^* = 5$ como sigue:

$$\frac{u_\tau \delta_\nu}{\nu} = 5$$

$$\delta_\nu = \frac{5\nu}{u_\tau} = \frac{5 \times 1.6 \times 10^{-4}}{3.6} = 2.22 \times 10^{-4} \text{ ft}$$

El espesor de la capa límite se encuentra usando la ecuación 8.6.42:

$$\frac{U_\infty}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + 7.4$$

$$\frac{100}{3.6} = 2.44 \ln \frac{3.6 \times \delta}{1.6 \times 10^{-4}} + 7.4 \qquad \therefore \delta = 0.188 \text{ ft}$$

La fuerza de arrastre se calcula usando la ecuación 8.6.41 y es

$$F_D = C_f \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$
$$= \frac{0.523}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_L)^2} \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$
$$= \frac{0.523}{\left(\ln 0.06 \dfrac{100 \times 15}{1.6 \times 10^{-4}}\right)^2} \times \frac{1}{2} \times 0.0024 \text{ slug/ft}^3 \times 100^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2 (15 \times 10) \text{ ft}^2 = 5.4 \text{ lb}$$

La porción laminar de la capa límite se ha despreciado.

Ejemplo 8.16

Estime el espesor máximo de la capa límite y el arrastre debido a la fricción en el costado de un barco que mide 40 m de largo con una profundidad sumergida de 8 m, suponiendo que el costado del barco se aproxima a una placa plana. El barco navega a 10 m/s. (a) Utilice los métodos empíricos y (b) compare con los resultados usando el modelo de la ley exponencial.

Solución

(a) El espesor de capa límite se encuentra de la ecuación 8.6.42. Primero debemos hallar τ_0 de la ecuación 8.6.40 y a continuación u_τ como sigue:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \frac{0.455}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_L)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \frac{0.455}{\left(\ln 0.06 \dfrac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^2} = 78.8 \text{ Pa}$$
$$\therefore u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$
$$= \sqrt{\frac{78.8 \text{ N/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 0.28 \text{ m/s}$$

El espesor máximo de la capa límite se encuentra usando la ecuación 8.6.42:

$$\frac{U_\infty}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + 7.4$$
$$\frac{10}{0.28} = 2.44 \ln \frac{0.28\delta}{10^{-6}} + 7.4 \qquad \therefore \delta = 0.39 \text{ m}$$

El arrastre es

$$F_D = C_f \times \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$
$$= \frac{0.523}{\left(\ln 0.06 \dfrac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^2} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 10^2 \times 40 \times 8 = 29\,000 \text{ N}$$

(*continúa*)

(b) Primero, calculamos el número de Reynolds: $\text{Re} = 10 \times 40/10^{-6} = 4 \times 10^8$. Seleccionamos $n = 9$. La ecuación 8.6.25 se convierte en

$$\tau_0 = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9}\right]dy$$
$$= \frac{9}{110}\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Igualando esto al τ_0 de la ecuación 8.6.24, encontramos que

$$\delta^{1/4}\, d\delta = 0.281\,(\nu/U_\infty)^{1/4}\, dx$$

Supongamos $\delta = 0$ en $x = 0$ e integramos. Esto nos da

$$\delta = 0.433x\ \text{Re}_x^{-1/5}$$
$$= 0.433(40)\left(\frac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^{-1/5} = 0.33\ \text{m}$$

Este valor es 15% demasiado bajo.

Se encuentra que la fuerza de arrastre es

$$F_D = 0.071\text{Re}_L^{-1/5} \times \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$
$$= 0.071\left(\frac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^{-1/5} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 10^2 \times 40 \times 8 = 21\,600\ \text{N}$$

Este valor es 25% demasiado bajo. Obviamente, las ecuaciones de la ley exponencial dan un error considerable.

8.6.6 Ecuaciones para la capa límite laminar

La solución presentada en la sección 8.6.3 para la capa límite laminar fue una solución aproximada que usaba un polinomio cúbico para aproximar el perfil de la velocidad. En esta sección simplificamos las ecuaciones de Navier-Stokes; también presentamos una solución más precisa para la capa límite laminar sobre una placa plana con gradiente de presión cero.

La ecuación de Navier-Stokes para la componente x para un flujo plano, permanente e incompresible, es (vea la ecuación 5.3.14 e ignore el término de la gravedad)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{8.6.43}$$

CONCEPTO CLAVE *No hay variación de presión en la dirección y en la capa límite.*

En la teoría de la capa límite se supone que la capa límite es muy delgada (vea la figura 8.22), de modo que no hay variación de presión en la dirección y en la capa límite; esto es, $p = p(x)$. Además (éste es un punto muy importante), la presión $p(x)$ está dada por la solución de flujo inviscido como la presión en la pared; por tanto, la presión no es una incógnita. Esto deja sólo dos incógnitas, u y v. La ecuación 8.6.43 nos da una ecuación y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.6.44}$$

nos da la otra. La ecuación de Navier-Stokes para la componente y no se utiliza en la teoría de la capa límite porque todos los términos son insignificantes por lo pequeños ($v \ll u$ como se infiere de la figura 8.24).

Además de la simplificación que da un gradiente de presión conocida, $\partial^2 u/\partial x^2$ es mucho menor que los gradientes grandes que existen en la dirección y (consulte el bosquejo de la figura 8.24); en consecuencia, despreciando $\partial^2 u/\partial x^2$, la ecuación para la capa límite que debe resolverse es

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8.6.45}$$

donde el gradiente de presión dp/dx se supone conocido a partir de la solución para flujo inviscido. Es frecuente que esto se conozca como *ecuación para la capa límite de Prandtl*, llamada así en honor de Ludwig Prandtl (1875-1953). Ninguno de los términos a la izquierda puede ignorarse; la componente y de v puede ser pequeña, pero el gradiente de velocidad $\partial u/\partial y$ es muy grande; por tanto, debe retenerse el producto.

Concentremos nuestra atención en el flujo sobre una placa plana con gradiente de presión cero. Además, introduzcamos la función de corriente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.6.46}$$

La ecuación de la capa límite en términos de la función de corriente, se convierte en

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \tag{8.6.47}$$

En esta forma no puede separarse la dependencia de x y de y. Si transformamos esta ecuación (estas transformaciones se seleccionan por prueba y error y experiencia) al hacer

$$\xi = x \qquad \eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{8.6.48}$$

resulta entonces

$$-\frac{1}{2\xi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} \tag{8.6.49}$$

Esta ecuación puede parecer más difícil de resolver que la ecuación 8.6.47, pero al observar la posición de ξ en esta ecuación, separamos las variables al hacer

$$\psi(\xi, \eta) = \sqrt{U_\infty \nu \xi}\, F(\eta) \tag{8.6.50}$$

Se puede demostrar entonces que las componentes de la velocidad son, usando las ecuaciones 8.6.48 y 8.6.50,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty F'(\eta)$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\,(\eta F' - F) \tag{8.6.51}$$

Sustituyamos la ecuación 8.6.50 en la ecuación 8.6.49 y resulta una ecuación diferencial ordinaria, no lineal; que es

$$F\frac{d^2F}{d\eta^2} + 2\frac{d^3F}{d\eta^3} = 0 \tag{8.6.52}$$

Esta ecuación sustituye a la ecuación diferencial parcial (8.6.47). Expresemos ahora las condiciones límite.

Las condiciones límite $[u(x,0) = 0, v(x,0) = 0$ y $u(x, y > \delta) = U_\infty]$ toman la forma

$$F = F' = 0 \text{ en } \eta = 0 \qquad \text{y} \qquad F' = 1 \text{ con } \eta \text{ grande} \tag{8.6.53}$$

El problema de valor frontera, consistente en la ecuación diferencial ordinaria (8.6.52) y las condiciones frontera (8.6.53), puede ahora resolverse numéricamente. Los resultados se tabulan en la tabla 8.5. Las últimas dos columnas se usan para dar v y τ_0, respectivamente.

Definiendo el espesor de la capa límite como el punto donde $u = 0.99U_\infty$, vemos de la tabla 8.5 que esto ocurre donde $\eta = 5$. Por tanto, con $\eta = 5$ y $y = \delta$ en la ecuación 8.6.48, tenemos

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \tag{8.6.54}$$

Usando

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty F''\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{8.6.55}$$

el cortante en la pared en una capa límite laminar con $dp/dx = 0$ es

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.332\,\rho U_\infty^2\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} \tag{8.6.56}$$

Tabla 8.5 Solución para la capa límite laminar con $dp/dx = 0$

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	F	$F' = u/U_\infty$	$\frac{1}{2}(\eta F' - F)$	F''
0	0	0	0	0.3321
1	0.1656	0.3298	0.0821	0.3230
2	0.6500	0.6298	0.3005	0.2668
3	1.397	0.8461	0.5708	0.1614
4	2.306	0.9555	0.7581	0.0642
5	3.283	0.9916	0.8379	0.0159
6	4.280	0.9990	0.8572	0.0024
7	5.279	0.9999	0.8604	0.0002
8	6.279	1.0000	0.8605	0.0000

El coeficiente de fricción superficial local es

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{8.6.57}$$

y el coeficiente de fricción superficial es

$$C_f = \frac{1.33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{8.6.58}$$

Integrando numéricamente las ecuaciones 8.6.6 y 8.6.7, se encuentra que los espesores de desplazamiento y de la cantidad de movimiento del espesor son

$$\delta_d = 1.72\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \qquad \theta = 0.644\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \tag{8.6.59}$$

Ejemplo 8.17

Aire atmosférico a 30 ºC fluye sobre una placa plana de 8 m de largo y 2 m de ancho a 2 m/s. Suponga que existe un flujo laminar en la capa límite a lo largo de toda la longitud. En $x = 8$ m, calcule (a) el valor máximo de v, (b) el cortante en la pared y (c) el caudal a través de la capa. (d) También, calcule la fuerza de arrastre sobre la placa.

(*continúa*)

Solución

(a) Se ha supuesto que la componente y de la velocidad es pequeña en la teoría de la capa límite. Su máximo valor en $x = 8$ m se encuentra, usando la ecuación 8.6.51, que es

$$v = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \times \frac{1}{2}(\eta F' - F)$$
$$= \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \times 2}{8}} \times 0.86 = 0.00172 \text{ m/s}$$

donde 0.86 viene de la tabla 8.5. Compare v con $U_\infty = 2$ m/s..

(b) Se encuentra que el cortante en la pared en $x = 8$ usando la ecuación 8.6.56 es

$$\tau_0 = 0.332 \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}$$
$$= 0.332 \times 1.16 \text{ kg/m}^3 \times 2^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{2 \text{ m}^2/\text{s} \times 8 \text{ m}}}$$
$$= 0.00154 \text{ Pa}$$

(c) El caudal a través de la capa límite en $x = 8$ está dado por

$$Q = \int_0^\delta u \times w dy = w \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^5 U_\infty F' \, d\eta$$

donde hemos sustituido por u y y de las ecuaciones 8.6.51 y 8.6.48. Reconociendo que $\int F' \, d\eta = F$, el caudal es

$$Q = w U_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} [F(5) - \overset{0}{\cancel{F(0)}}]$$
$$= 2 \text{ m} \times 2 \text{ m/s} \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \times 8 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}} \times 3.28 = 0.105 \text{ m}^3/\text{s}$$

(d) La fuerza de arrastre se determina que es

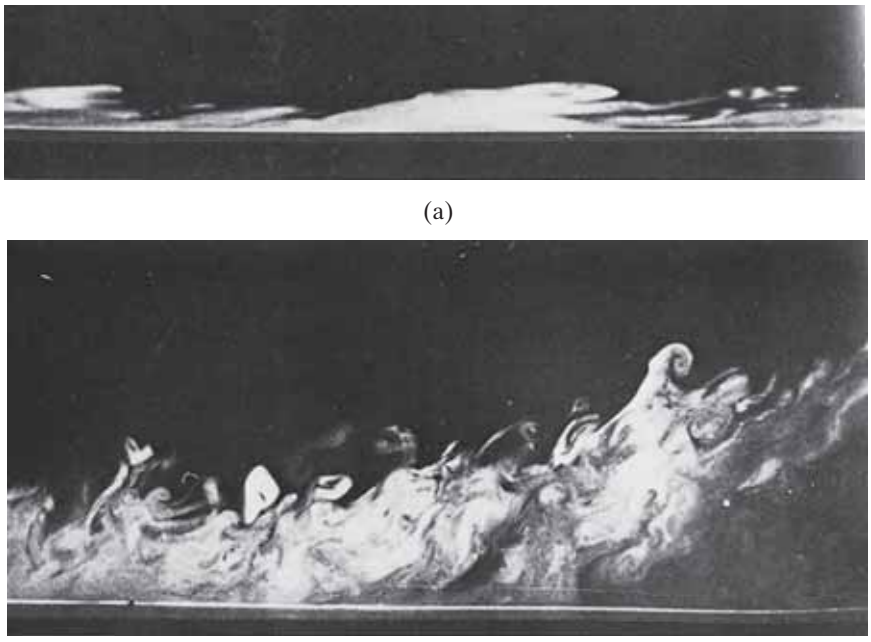
$$F_D = \tfrac{1}{2} \rho U_\infty^2 L w C_f$$
$$= \frac{1}{2} \times 1.16 \text{ kg/m}^3 \times 2^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \times 8 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times \frac{1.33}{\sqrt{2 \times 8/1.6 \times 10^{-5}}}$$
$$= 0.049 \text{ N}$$

Ejemplo 8.17a Crecimiento de la capa límite laminar, 625-627

8.6.7 Efectos del gradiente de presión

CONCEPTO CLAVE *Un fuerte gradiente de presión negativa puede volver a hacer laminar a una capa límite turbulenta.*

En las secciones anteriores hemos concentrado nuestro estudio de capas límite en una placa plana con gradiente de presión cero. Éste es el flujo de capa límite más simple y nos permite modelar muchos flujos de interés en ingeniería. La inclusión de un gradiente de presión, aun cuando sea relativamente bajo, altera en forma muy marcada el flujo de capa límite. De hecho, un fuerte gradiente de presión negativa (como el flujo en una contracción) puede volver a hacer laminar a una capa límite turbulenta; esto es, la producción de turbulencia en la capa viscosa en la pared que mantiene la turbulencia deja de existir y se restablece una capa límite laminar. Un gradiente de presión positiva rápidamente hace que la capa límite se engrose con el tiempo que se separe. Estos dos efectos se muestran en las fotografías de la figura 8.27.



(a)

(b)

Fig. 8.27 Influencia de un fuerte gradiente de presión en un flujo turbulento: (a) un fuerte gradiente de presión negativa puede volver a hacer laminar a un flujo; (b) un fuerte gradiente de presión positiva hace que una fuerte capa límite se engrose. (Fotografía de R. E. Falco)

El flujo alrededor de cualquier cuerpo plano con curvatura, por ejemplo una superficie aerodinámica, puede ser modelado como el flujo sobre una placa plana con gradiente de presión diferente de cero. El espesor de la capa límite es tan pequeño respecto al radio de curvatura que los términos adicionales de curvatura se cancelan de las ecuaciones diferenciales. La solución para flujo inviscido en la pared proporciona el gradiente de presión dp/dx y la velocidad $U(x)$ en el borde de la capa límite. Para flujos axisimétricos, como el flujo sobre la nariz de un avión, deben utilizarse las ecuaciones para la capa límite en coordenadas cilíndricas.

El gradiente de presión determina el valor de la segunda derivada $\partial^2 u/\partial y^2$ en la pared. De la ecuación para la capa límite (8.6.45) en la pared, $u = v = 0$, de modo que

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} \tag{8.6.60}$$

ya sea para flujo de capa límite laminar o un turbulento. Para un gradiente de presión cero, la segunda derivada es cero en la pared; entonces, como la primera derivada tiene un valor máximo en la pared y disminuye a medida que y aumenta, la segunda derivada debe ser negativa para y positiva. Los perfiles se trazan en la figura 8.28a.

CONCEPTO CLAVE *Para un gradiente de presión negativa, existe una reducida tendencia a que el flujo se separe.*

Para un gradiente de presión negativa (favorable), la pendiente del perfil de la velocidad cerca de la pared es relativamente grande con una segunda derivada negativa en la pared y en toda la capa. La cantidad de movimiento cerca de la pared es mayor que la del flujo con gradiente de presión cero, como se muestra en la figura 8.28b, y entonces hay una tendencia reducida para que el flujo se separe. La producción de turbulencia se desalienta, y el proceso de volverlo a hacer laminar puede ocurrir para un gradiente de presión negativa suficientemente grande a lo largo de una distancia suficiente.

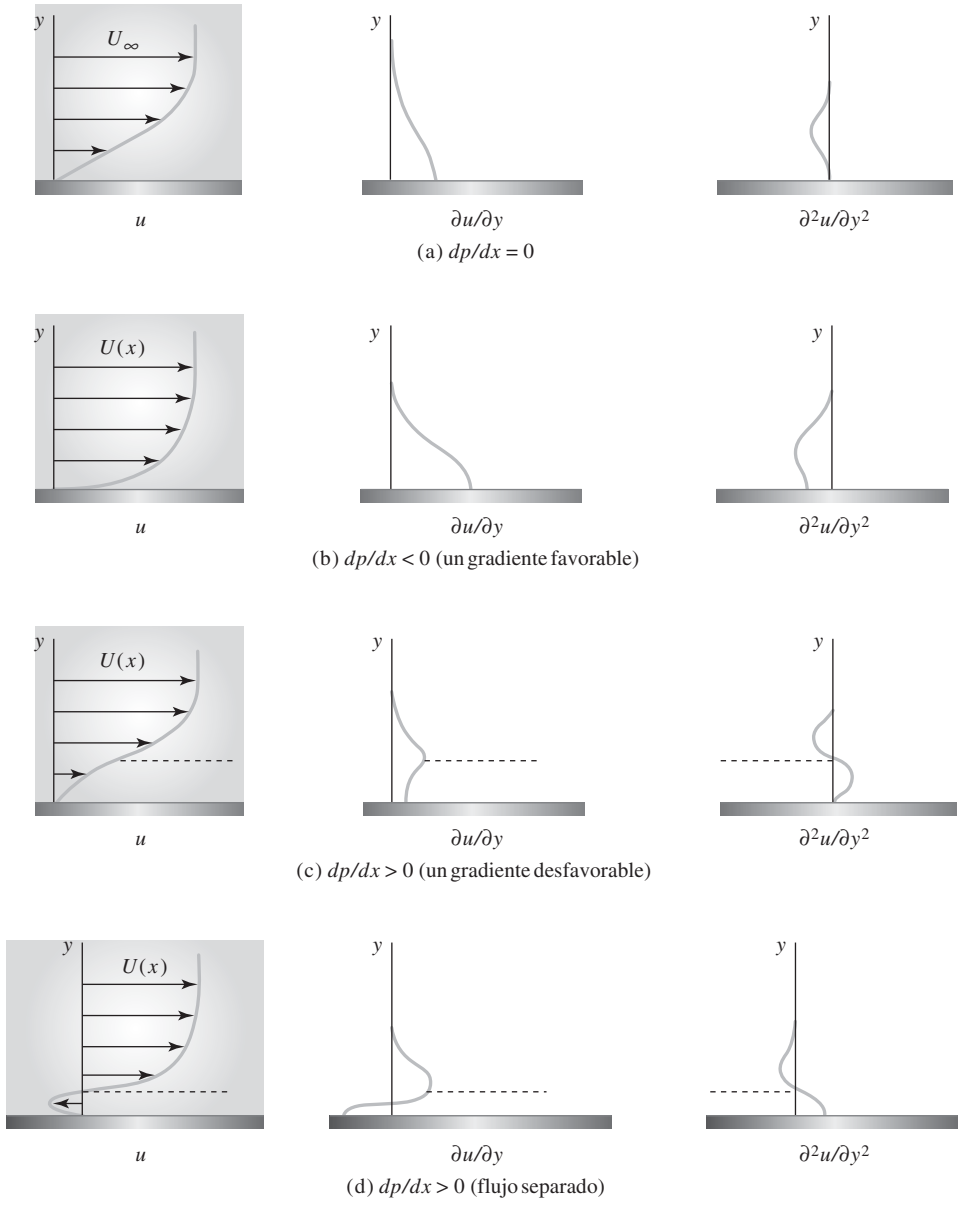


Fig. 8.28 Influencia del gradiente de presión.

Si se impone en el flujo un gradiente de presión positiva (desfavorable), la segunda derivada en la pared será positiva y el flujo será como se traza en los incisos (c) o (d). Si el gradiente de presión desfavorable actúa a lo largo de una distancia suficiente, es probable que en el inciso (d) se represente la situación de flujo con éste separado de la superficie. Cerca de la pared, la presión más alta corriente abajo impulsará el flujo bajo de la cantidad de movimiento cerca de la pared en la dirección corriente arriba, resultando en una inversión del flujo, como se muestra. El punto en el que $\partial u/\partial y = 0$ en la pared localiza el punto de separación.

El problema de una capa límite laminar con un gradiente de presión puede ser resuelto usando técnicas numéricas convencionales. El procedimiento es relativamente sencillo usando la ecuación para la capa límite simplificada (8.6.45) con un gradiente de presión conocido. Para un flujo turbulento, debe incluirse el término del esfuerzo de Reynolds; las actuales investigaciones continúan desarrollando modelos de cantidades turbulentas que resultarán en soluciones numéricas aceptables. Con frecuencia son necesarios resultados experimentales para problemas de flujo turbulento, como fue la situación para flujos internos.

8.7 RESUMEN

Los coeficientes de arrastre y de resistencia al avance y sustentación se definen como

$$C_D = \frac{\text{Arrastre}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad C_L = \frac{\text{Sustentación}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{8.7.1}$$

donde el área es el área proyectada para objetos despuntados, y la cuerda multiplicada por la longitud para una superficie aerodinámica.

Ocurre formación de vórtices desde un cilindro siempre que el número de Reynolds se encuentre entre $300 < \text{Re} < 10\,000$. La frecuencia de formación se encuentra a partir del número de Strouhal

$$\text{St} = \frac{fD}{V} \tag{8.7.2}$$

donde f es la frecuencia, en hertz.

Los flujos potenciales planos se construyen al superponer los siguientes flujos simples:

$$\begin{aligned} &\text{Flujo uniforme:} && \psi = U_\infty y \\ &\text{Fuente de líneas:} && \psi = \frac{q}{2\pi\theta} \\ &\text{Vórtice irrotacional:} && \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \\ &\text{Doblete:} && \psi = -\frac{\mu}{r}\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{8.7.3}$$

La función de corriente para el cilindro giratorio está dada por

$$\psi_{\text{cilindro}} = U_\infty y - \frac{\mu}{r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{8.7.4}$$

donde el radio del cilindro es

$$r_c = \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty}} \tag{8.7.5}$$

Las componentes de la velocidad son

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{8.7.6}$$

Para una capa límite laminar sobre una placa plana con gradiente de presión cero, la solución exacta dará

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu_x}{U_\infty}} \qquad c_f = 0.664\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} \qquad C_f = 1.33\sqrt{\frac{\nu}{LU_\infty}} \tag{8.7.7}$$

Para un flujo turbulento desde el borde de entrada, el perfil de la ley exponencial con $\eta = 7$ da

$$\delta = 0.38x\left(\frac{\nu}{xU_\infty}\right)^{1/5} \qquad c_f = 0.059\left(\frac{xU_\infty}{\nu}\right)^{1/5} \qquad C_f = 0.073\left(\frac{\nu}{LU_\infty}\right)^{1/5} \tag{8.7.8}$$

donde el cortante en la pared y la fuerza de arrastre por ancho unitario son, respectivamente,

$$\tau_0 = \frac{1}{2}c_f \rho U_\infty^2 \qquad F_D = \frac{1}{2}C_f \rho U_\infty^2 L \tag{8.7.9}$$

PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES PARA UN EXAMEN DE INGENIERÍA

8.1 La fuerza de arrastre sobre una forma perfilada se debe principalmente a :

(A) La estela
(B) La componente de la fuerza de presión que actúa en la dirección del flujo
(C) El esfuerzo cortante
(D) La región separada cerca del borde de salida

8.2 Una pelota de golf tiene hoyuelos para aumentar su distancia de vuelo. Seleccione la mejor razón que explique la distancia de vuelo más larga de una pelota con hoyuelos en comparación con la de una pelota lisa.

(A) El esfuerzo cortante es más pequeño en la pelota con hoyuelos
(B) La pelota con hoyuelos tiene un diámetro efectivo más pequeño
(C) La estela de la pelota con hoyuelos es más pequeña
(D) La presión sobre el frente de la pelota lisa es más grande

8.3 Una crecida de agua a 10 ºC corre sobre una cerca de alambre de 8 mm de diámetro, con una velocidad de 0.8 m/s. ¿Cuál de lo siguiente es verdadero?

(A) Es un flujo de Stokes sin separación
(B) La región separada cubre casi toda la parte posterior del alambre
(C) El arrastre se debe a la presión relativamente baja en la región separada
(D) La región separada cubre sólo una pequeña área en la parte posterior del alambre

8.4 El arrastre sobre un tanque esférico de 10 m de diámetro para almacenamiento de agua sometido a un viento de 80 km/h es aproximadamente:

(A) 6300 N **(C)** 3200 N
(B) 4700 N **(D)** 2300 N

8.5 Un cilindro liso de 4 m de largo experimenta un arrastre de 60 N cuando se somete a una velocidad de aire atmosférico de 40 m/s. Estime el diámetro del cilindro.

(A) 127 mm **(C)** 26 mm
(B) 63 mm **(D)** 4.1 mm

8.6 Se forman vórtices desde un cilindro de 2 cm de diámetro debido a una corriente de aire de 4 m/s. ¿A qué separación se esperaría que estuvieran corriente abajo los vórtices del cilindro?

(A) 44 cm **(C)** 9 cm
(B) 23 cm **(D)** 4 cm

8.7 El perfilado reduce el arrastre principalmente al:

(A) Reducir el cortante en la pared
(B) Reducir la presión en la región de estancamiento
(C) Reducir el área de flujo separado
(D) Eliminar la estela

8.8 Estime la velocidad de despegue necesaria para un avión de 1200 kg (incluyendo su carga útil) si el ángulo de ataque en el despegue ha de ser de 10º. El área efectiva del ala (cuerda multiplicada por longitud) es 16 m^2.

(A) 22 m/s **(B)** 33 m/s
(C) 44 m/s **(D)** 55 m/s

PROBLEMAS

Flujos separados

8.9 Trace el flujo sobre una superficie aerodinámica a un gran ángulo de ataque para flujo adherido y flujo separado. También, haga un bosquejo de las distribuciones de presión esperadas sobre las superficies superior e inferior para ambos flujos. Identifique regiones de gradientes de presión favorable y desfavorable.

8.10 Una partícula esférica se mueve en aire atmosférico a 20 ºC a una velocidad de 20 m/s. ¿Cuál debe ser su diámetro para Re = 5 y Re = 10^5? Haga un bosquejo del campo de flujo esperado para estos números de Reynolds. Identifique todas las regiones del flujo.

8.11 Haga un bosquejo del flujo que se espera sobre un camión (tractor y remolque) donde el remolque sea considerablemente más alto que el tractor con y sin deflector de aire unido al techo del tractor. Bosqueje una vista lateral que indique cualesquiera regiones separadas, y la estela.

8.12 Sopla aire junto a un edificio largo y rectangular, con el viento soplando en forma paralela a los lados largos. Haga un bosquejo de la vista superior que muestre las regiones de flujo separado, la región de flujo inviscido, las capas límite y la estela.

8.13 Una esfera de 0.8 pulgadas de diámetro debe moverse con Re = 5. ¿A qué velocidad viaja si está sumergida en:

(a) Agua a 60 ºF?
(b) Agua a 180 ºF?
(c) Aire normal a 60 ºF?

8.14 Aire a 20 ºC fluye alrededor de un cuerpo cilíndrico a una velocidad de 20 m/s. Calcule el número de Reynolds si el cuerpo es:

(a) Una chimenea de 6 m de diámetro
(b) Un asta de 6 cm de diámetro
(c) Un alambre de 6 mm de diámetro

Use Re = VD/ν. ¿Se esperaría un flujo separado?

8.15 La distribución de la presión sobre el frente de un disco de 2 m de diámetro (figura P8.15) es aproximada por $p(r) = p_0(1 - r^2)$. Si V = 20 m/s en este flujo de aire atmosférico a 20 ºC, estime la fuerza de arrastre y el coeficiente de arrastre para este disco. Suponga que la presión sobre el lado posterior es cero.

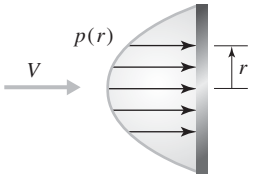


Fig. P8.15

8.16 Una placa plana de 30 cm × cm 30 cm actúa como superficie hidrodinámica. Si está orientada a un ángulo de ataque de 10º, estime la sustentación y el arrastre si la presión en el lado inferior es de 20 kPa y en el lado superior existe un vacío de 10 kPa; pase por alto el efecto del esfuerzo cortante. También, estime los coeficientes de sustentación y arrastre si la velocidad de la superficie hidrodinámica es 5 m/s. Use el área superficial de la placa en la definición de los coeficientes de sustentación y arrastre.

8.17 La superficie aerodinámica simétrica que se muestra en la figura. P8.17 vuela a una altitud de 12 000 m con un ángulo de ataque de 5º. Si p_l = 26 kPa y p_u = 8 kPa, estime los coeficientes de sustentación y arrastre pasando por alto los esfuerzos cortantes.

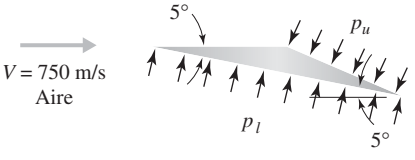


Fig. P8.17

8.18 Si el coeficiente de arrastre para una esfera de 10 cm de diámetro está dada por $C_D = 1.0$, calcule el arrastre si la esfera está cayendo en la atmósfera:
- **(a)** Al nivel del mar
- **(b)** A 30 000 metros
- **(c)** En agua a 10 ºC

8.19 Calcule el arrastre sobre una esfera lisa de 50 cm de diámetro cuando se somete a un flujo de aire atmosférico a 20 ºC de:
- **(a)** 6 m/s
- **(b)** 15 m/s
- **(c)** Flujo sobre una esfera, página 5

8.20 Una pelota de golf de 4.45 cm de diámetro se hace rugosa para reducir su resistencia al avance durante su vuelo. Si el número de Reynolds al que ocurre la repentina caída se reduce de 3×10^5 a 6×10^4 por las asperezas (hoyuelos), ¿se esperaría que esto alargue considerablemente el vuelo de una pelota de golf? Justifique su razonamiento con cálculos apropiados.

8.21 Una esfera lisa de 4 pulgadas de diámetro experimenta una resistencia al avance de 0.5 lb cuando se coloca en aire estándar a 60 ºF.
- **(a)** ¿Cuál es la velocidad de la corriente de aire?
- **(b)** ¿A qué velocidad aumentada experimentará la esfera la misma resistencia al avance?

8.22 Una esfera lisa de 20 cm de diámetro experimenta un arrastre de 4.2 N cuando se coloca en un canal de agua a 20 ºC. Calcule el coeficiente de arrastre y el número de Reynolds.

8.23 Una chimenea de 2 m de diámetro tiene una altura de 60 m. Está diseñada para resistir un viento de 40 m/s. A esta velocidad, ¿qué fuerza total se esperaría, y qué momento se requiere que resista la base? Suponga aire atmosférico a 20 ºC.

8.24 Un asta de bandera está compuesta de tres secciones: una sección superior de 5 cm de diámetro y 10 m de largo, una sección media de 7.5 cm de diámetro y 15 m de largo, y una sección inferior de 10 cm de diámetro y 20 m de largo. Calcule la fuerza total que actúa sobre el asta de bandera y el momento resistente proporcionado por la base cuando se someta a un viento a una velocidad de 25 m/s. Haga los cálculos para:
- **(a)** Un día de invierno a –30 ºC
- **(b)** Un día de verano a 35 ºC

8.25 Una fuerza de arrastre de 10 lb se desea a $\mathrm{Re} = 10^5$ en un cilindro de 6 ft de largo en un flujo de aire atmosférico a 60 ºF. ¿Qué velocidad debe seleccionarse, y cuál debe ser el diámetro del cilindro?

8.26 Una estructura de 20 m de alto mide 2 m de diámetro en la parte superior y 8 m de diámetro en la inferior, como se muestra en la figura P8.26. Si el diámetro varía linealmente con la altura, estime la fuerza total de arrastre debida a un viento de 30 m/s. Use aire atmosférico a 20 ºC.

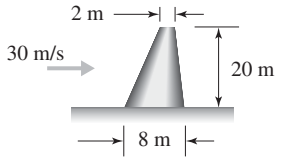


Fig. P8.26

8.27 Una esfera de acero ($S = 7.82$) se deja caer en agua a 20 ºC. Calcule su velocidad terminal si el diámetro de la esfera es:
- **(a)** 10 cm **(b)** 5 cm
- **(c)** 1 cm **(d)** 2 mm

8.28 Estime la velocidad terminal de una esfera de 20 pulgadas de diámetro cuando cae en una atmósfera a 60 ºF cerca de la Tierra, si tiene gravedad específica de:
(a) 0.005 **(b)** 0.02 **(c)** 1.0

8.29 Estime la velocidad terminal de un paracaidista al hacer aproximaciones razonables de los brazos, piernas, cabeza y cuerpo. Suponga aire a 20 ºC.

8.30 Suponiendo que la resistencia al avance sobre un automóvil moderno a alta velocidad se debe principalmente al arrastre por su forma, estime la potencia (caballos de potencia) que necesita un automóvil con 3.2 m^2 de área de sección transversal para viajar a:
- **(a)** 80 km/h **(b)** 90 km/h
- **(c)** 100 km/h

8.31 El anuncio de 2 m × 3 m que se muestra en la figura P8.31 pesa 400 N. ¿Qué velocidad del viento se requiere para derribar el anuncio?

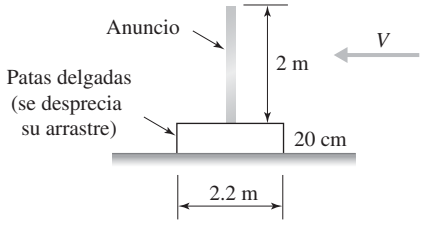


Fig. P8.31

8.32 Calcule la fuerza de arrastre sobre un cilindro de 60 cm de diámetro y 6 m de largo, si sopla aire a 20 ºC normal a su eje a 40 km/h, y el cilindro
- **(a)** Es una sección de cilindro muy largo
- **(b)** Tiene ambos extremos libres
- **(c)** Está fijo al suelo con la parte superior libre

8.33 Una paracaidista de 80 kg salta desde una elevación de 3000 m. Estime la velocidad de aterrizaje de la paracaidista si ella:
- **(a)** Se encorva tan fuertemente como le es posible
- **(b)** Usa un paracaídas ligero de 8 m de diámetro
- **(c)** Usa un paracaídas de seguridad de 2 m de diámetro

8.34 Un camión (tractor y remolque) recorre 200 000 km cada año a un promedio de velocidad de 90 km/h. Estime el ahorro en combustible si se agrega un deflector perfilado para reducir el coeficiente de resistencia al avance. El combustible cuesta $0.40 por litro y el camión sin el deflector promedia 1.2 km por litro de combustible.

8.35 Un remolque rectangular de carga tiene una sección transversal de 6 ft × 2 ft. Estime la potencia agregada mínima requerida para transitar a 60 mph debida al remolque.

8.36 Suponga que la velocidad en las esquinas de un automóvil, donde los espejos retrovisores están instalados, es de 1.6 veces la velocidad del automóvil. ¿Cuánta potencia requieren los dos espejos retrovisores de 10 cm de diámetro para una velocidad de 100 km/h del automóvil?

8.37 Aire atmosférico a 25 ºC sopla normal a una sección de 4 m de un cono, de 30 cm de diámetro en un extremo y 2 m de diámetro en el otro extremo, con una velocidad de 20 m/s. Calcule el arrastre sobre el objeto. Suponga que $C_D = 0.4$ para cada elemento cilíndrico del objeto.

8.38 Un globo de 80 cm de diámetro (figura P8.38) que pesa 0.5 N se llena con helio a 20 ºC a una presión de 20 kPa. Haciendo caso omiso del peso de la cuerda, calcule V si α es igual a:

(a) 80º **(b)** 70º
(c) 60º **(d)** 50º

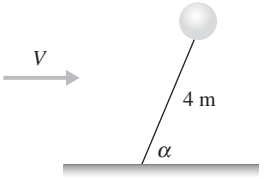


Fig. P8.38

8.39 Para el árbol recién plantado que se muestra en la figura P8.39, la interfaz se suelo-raíz es capaz de resistir un momento de 5000 N · m. Calcule la velocidad mínima del viento que posiblemente pudiera derribar el árbol. Suponga que $C_D = 0.4$ para un cilindro en este flujo de aire.

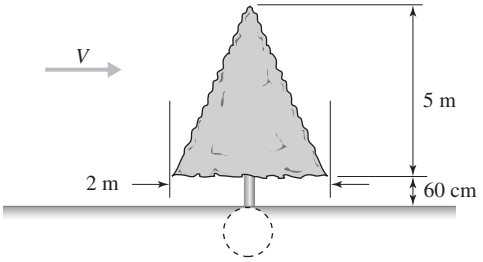


Fig. P8.39

8.40 Un anuncio de 1.2 m × 0.6 m se sujeta al techo de un automóvil de reparto de pizzas. El automóvil trabaja 10 horas al día, 6 días a la semana. Estime el costo en un año que el anuncio agrega al combustible que se consume en un año. La velocidad promedio del automóvil es 40 km/h, el combustible cuesta $0.60 por litro, el tren motor/transmisión es 30% eficiente, y el combustible contiene 12 000 kJ/kg.

8.41 Un ciclista puede circular a una velocidad promedio de 25 mph cuando va erguido. Se determina que el área proyectada del ciclista es 0.56 m^2. Si el ciclista adopta una posición de carrera de modo que su área proyectada sea 0.40 m^2, estime el incremento en su velocidad si su coeficiente de resistencia al avance se reduce 20%, suponiendo el mismo caudal de energía.

8.42 Un automóvil con un área de sección transversal de 3 m^2 es impulsado por un motor de 40 hp. Estime la velocidad máxima posible si el tren de transmisión es 90% eficiente. (El motor está clasificado por la potencia producida antes de la transmisión.)

Formación de vórtices

8.43 ¿En qué intervalo de velocidades se esperaría la formación de vórtices en un cable telefónico de 3 mm de diámetro? ¿Sería posible escuchar cualquiera de los vórtices formándose? (Los seres humanos podemos escuchar frecuencias entre 20 y 20 000 Hz.)

8.44 Un alambre está siendo remolcado por agua a 60 ºF normal a su eje a una velocidad de 6 ft/s. ¿Qué diámetro (grande y pequeño) podría tener el alambre para que no ocurriera la formación de vórtices?

8.45 Es muy difícil medir bajas velocidades. Para determinar la velocidad de un flujo de aire de baja velocidad, se observa que los vórtices que se forman desde un cilindro de 10 cm de diámetro ocurren a 0.2 Hz. Estime la velocidad del aire si la temperatura es 20 ºC.

8.46 Unas películas muestran que se forman vórtices de un cilindro de 2 m de diámetro a 0.002 Hz cuando está moviéndose en agua a 20 ºC. ¿Cuál es la velocidad del cilindro?

8.47 Los cables que sostienen un puente colgante (figura P8.47) tienen una frecuencia natural de $T/(\pi\rho L^2 d^2)$ hertz, donde T es la tensión, ρ la densidad del cable, d su diámetro, y L su longitud. Los vórtices que se forman de los cables pueden resultar en resonancia y a una posible falla. Cierto cable de acero de 1.6 cm de diámetro se somete a una fuerza de 30 000 N. ¿Qué longitud del cable resultaría en resonancia en un viento de 10 m/s? (*Nota*: Las armónicas tercera y quinta también pueden resultar en resonancia. Calcule las tres longitudes.)

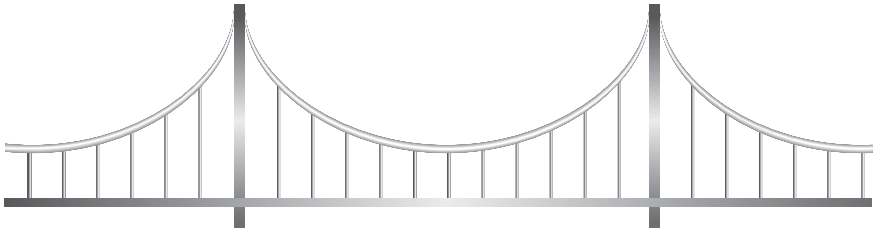


Fig. P8.47

Perfilado

8.48 Un tubo de escape de 6 pulgadas de diámetro instalado en un camión con remolque se extiende 6 ft hacia arriba en la corriente libre. Estime la potencia necesaria debida al tubo de escape para una velocidad de 60 mph. Si el tubo de escape estuviera perfilado, estime la potencia reducida.

8.49 Una velocidad del viento de 3 m/s sopla normal a un cilindro liso de 8 cm de diámetro que mide 2 m de largo. Calcule la fuerza de arrastre. El cilindro ahora está perfilado. ¿Cuál es la reducción porcentual en el arrastre? Suponga que $T = 20$ °C.

8.50 Fluye agua por un cilindro de 80 cm de diámetro que sobresale 2 m hacia arriba del fondo de un río. Para una velocidad promedio del agua de 2 m/s, estime el arrastre sobre el cilindro. Si el cilindro estuviera perfilado, ¿cuál sería la reducción porcentual en el arrastre?

8.51 Se usan tubos circulares de 2 cm de diámetro como soportes de un avión ultraligero, diseñado para volar a 50 km/h. Si hay 20 metros lineales de los tubos, estime la potencia que necesitan los tubos. Si los tubos estuvieran perfilados, estime la potencia reducida requerida por los tubos.

8.52 Un ciclista puede correr a 50 km/h a su máxima velocidad. Estime la fuerza de resistencia al avance debida sólo a su cabeza. Si llevara puesto un casco perfilado, con ajuste estrecho, estime la fuerza de resistencia al avance reducida.

Cavitación

8.53 El número de cavitación crítico para un tirante perfilado es 0.7. Encuentre la velocidad máxima del cuerpo al que está unido el tirante si ha de evitarse cavitación. El cuerpo está desplazándose a 5 m bajo una superficie de agua.

8.54 Se desea obtener una fuerza de sustentación de 200 kN a una velocidad de 12 m/s en la superficie hidrodinámica de la figura P8.54, diseñada para operar a una profundidad de 40 cm. La superficie tiene una cuerda de 40 cm y mide 10 m de largo. Calcule el ángulo de ataque y la fuerza de arrastre. ¿Hay cavitación en estas condiciones?

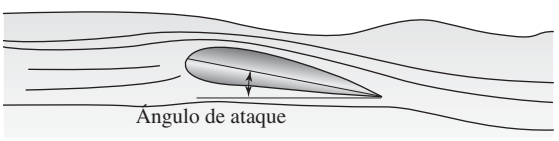


Fig. P8.54

8.55 Una superficie hidrodinámica, diseñada para operar a una profundidad de 16 pulgadas, tiene una cuerda de 16 pulgadas y mide 30 ft de largo. Se desea obtener una fuerza de sustentación de 50 000 lb a una velocidad de 35 ft/s. Calcule el ángulo de ataque y la fuerza de arrastre. ¿Hay cavitación en estas condiciones?

8.56 Un cuerpo que se asemeja a una esfera tiene un diámetro de aproximadamente 0.8 m. Es remolcado a una velocidad de 20 m/s, a 5 m bajo la superficie del agua. Estime el arrastre que actúa sobre el cuerpo.

8.57 Un dragaminas de 2 200 kg está diseñado para navegar sobre el agua con superficies hidrodinámicas en las cuatro esquinas que le dan sustentación. Si las superficies hidrodinámicas tienen una longitud de cuerda de 40 cm, ¿qué longitud total de superficie hidrodinámica se requiere si han de operar a 60 cm bajo la superficie a un ángulo de ataque de 6º? El vehículo debe desplazarse a 50 m/s.

Masa agregada

8.58 Una esfera de 40 cm de diámetro, que pesa 400 N, se suelta desde el reposo cuando está sumergida en agua. Calcule su aceleración inicial:

(a) Pasando por alto la masa agregada

(b) Incluyendo la masa agregada

8.59 Un sumergible, cuya longitud es el doble de su diámetro máximo, se asemeja a un elipsoide. Si se ignora su masa agregada, ¿cuál es el porcentaje de error en un cálculo de su aceleración inicial si su gravedad específica es 1.2?

Sustentación y resistencia al avance en superficies aerodinámicas

8.60 El ala rectangular de un avión pequeño tiene una cuerda de 1.3 m y una envergadura de 10 metros. Cuando vuela a 220 km/h, el ala experimenta una fuerza aerodinámica total de 18 kN. Si la proporción entre la sustentación y la resistencia al avance es 3, determine el coeficiente de sustentación del ala.

8.61 En un experimento de sustentación y resistencia al avance realizado en un túnel de viento, se utilizó una superficie aerodinámica NACA0012. La superficie aerodinámica tiene una cuerda de 15 cm y una longitud de envergadura de 45 cm. Usando un dispositivo de medición, se midió una fuerza de sustentación de 60 N en la superficie aerodinámica para un número de Reynolds de 4.586×10^5. El coeficiente de sustentación para esta superficie aerodinámica está dado por $C_L = 2\varpi$ sen α, donde α es el ángulo de ataque. Con las condiciones dadas, ¿cuál es el ángulo de ataque en grados?

8.62 Un avión con una masa de 1000 kg, incluyendo su carga útil, está diseñado para vuelos de crucero a una velocidad de 80 m/s a una altura de 10 km. El área efectiva de su ala es aproximadamente 15 m^2. Determine el coeficiente de sustentación y el ángulo de ataque. ¿Qué potencia requiere la superficie aerodinámica durante un vuelo de crucero? Suponga una superficie aerodinámica convencional.

8.63 Un avión de 1500 kg está diseñado para llevar una carga útil de 3000 N cuando haga vuelos de crucero a 80 m/s a una altura de 10 km. El área efectiva de su ala es 20 m^2. Suponiendo una superficie aerodinámica convencional, calcule:

(a) La velocidad de despegue si se desea un ángulo de ataque de 10º

(b) La velocidad de pérdida de sustentación al aterrizar

(c) La potencia requerida a velocidad de crucero si se requiere un 45% de la potencia para mover la superficie aerodinámica

8.64 En el problema 8.63 fue necesario suponer que el despegue era al nivel del mar. ¿Cuál sería la velocidad de despegue en Wyoming, donde la elevación es 2000 m?

8.65 El avión del problema 8.63 vuela a 2 km de altura en lugar de a 10 km. Estime el porcentaje de aumento o disminución en la potencia requerida a velocidad de crucero.

8.66 Una carga adicional de 6000 N se agrega al avión del problema 8.63. Estime la velocidad de despegue si el ángulo de ataque permanece en 10º.

8.67 Estime la velocidad mínima de aterrizaje para un avión de 250 000 kg en una situación de emergencia, si el ángulo de ataque se selecciona para que sea cercano a la velocidad de pérdida de sustentación y:

(a) No se usan alerones con ranuras (espacios abiertos)

(b) Se usa un alerón con ranura

(c) Se usan dos alerones con ranura

Su envergadura es de 60 m y la cuerda de la superficie aerodinámica promedia 8 m.

8.68 En el problema 8.67 se supuso que el avión aterriza en condiciones estándar al nivel del mar puesto que no se da ni la elevación ni la temperatura. Calcule el porcentaje de aumento o disminución en la velocidad de aterrizaje de emergencia si el avión debe aterrizar:

(a) En Denver, donde la elevación es 1600 m

(b) Al nivel del mar cuando la temperatura es muy fría a –40 ºC

(c) Al nivel del mar cuando la temperatura es calurosa a 50 ºC

8.69 Un avión propuesto ha de asemejarse a una enorme superficie aerodinámica, un ala voladora (figura P8.69). Su envergadura será de 200 m y su cuerda tendrá un promedio de 30 m. Estime, suponiendo una superficie aerodinámica convencional, la masa total del avión, incluyendo su carga útil, para una velocidad de diseño de 800 km/h a una elevación de 8 km. También, calcule la potencia requerida.

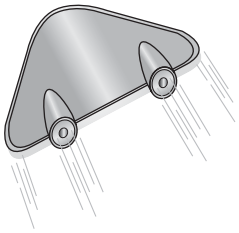


Fig. P8.69

Vorticidad, potencial de velocidad y función de corriente

8.70 Tome el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes y demuestre que resulta la ecuación de vorticidad (8.5.3). (Vea la ecuación 5.3.20.)

8.71 Escriba las ecuaciones de vorticidad para las tres componentes contenidas en la ecuación 8.5.3 usando coordenadas rectangulares. Use $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}}$.

8.72 Simplifique la ecuación de vorticidad 8.5.3 para un flujo plano ($w = 0$ y $\partial/\partial z = 0$). Use $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. ¿Qué conclusión puede hacer acerca de la magnitud de ω_z en un flujo plano, inviscido (por ejemplo un flujo a través de una contracción corta) que contiene vorticidad?

8.73 Considere el flujo en el canal con contracción mostrado a continuación. Se supone que existe un tubo de vórtice (vorticidad y) en la capa límite en las placas superior e inferior. Usando la ecuación de transporte de vorticidad, explique la existencia de la vorticidad x corriente abajo de la obstrucción.

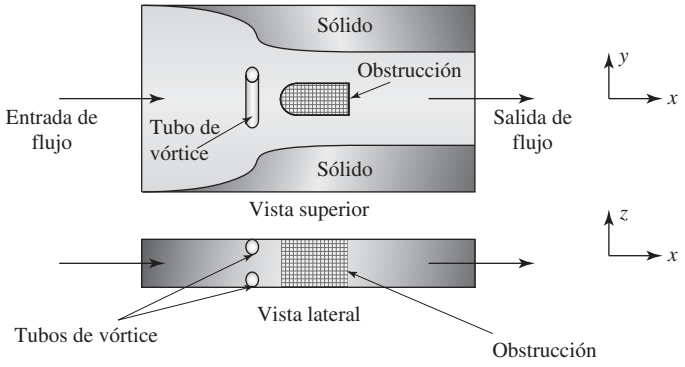


Fig. P8.73

8.74 Determine cuáles de los siguientes flujos son irrotacionales e incompresibles y encuentre la función de potencial de velocidad, en caso que exista una para cada flujo incompresible.

(a) $\mathbf{V} = 10x\hat{\mathbf{i}} + 20y\hat{\mathbf{j}}$

(b) $\mathbf{V} = 8y\hat{\mathbf{i}} + 8x\hat{\mathbf{j}} - 6z\hat{\mathbf{k}}$

(c) $\mathbf{V} = (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{x^2 + y^2}$

(d) $\mathbf{V} = (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})/(x^2 + y^2)$

8.75 Ha de realizarse un intento por resolver la ecuación de Laplace para un flujo alrededor de un cilindro circular de radio r_c orientado en el centro de un canal de altura $2h$. El perfil de la velocidad alejado del cilindro es uniforme. Exprese las condiciones límite necesarias. Suponga que $\psi = 0$ en $y = -h$. El origen del sistema de coordenadas está localizado en el centro del cilindro.

8.76 Exprese la función de corriente y el potencial de velocidad, correspondientes a una velocidad uniforme de $100\,\hat{\mathbf{i}} + 50\hat{\mathbf{j}}$ usando coordenadas rectangulares.

8.77 Un flujo está representado por la función de corriente $\psi = 40 \tan^{-1}(y/x)$.

(a) Exprese la función de corriente en forma polar

(b) ¿Es éste un flujo incompresible? Demuestre por qué

(c) Determine el potencial de velocidad

(d) Encuentre el radio donde la aceleración es –10 m/s^2

8.78 La función de corriente para un flujo es $\psi = 20 \ln (x^2 + y^2)$ m^2/s.

Determine el potencial de velocidad complejo para este flujo incompresible. Si la presión a una gran distancia del origen es 20 kPa, ¿cuál es la presión en el punto (0, 20 cm) si fluye agua?

8.79 Una función de corriente está dada por

$$\psi = 10y - \frac{10y}{x^2 + y^2}$$

(a) Demuestre que esto satisface $\nabla^2\psi = 0$

(b) Encuentre el potencial de velocidad $\phi\,(x, y)$

(c) Suponiendo que fluye agua, encuentre la presión a lo largo del eje x si $p = 50$ kPa en $x = -\infty$

(d) Localice cualesquiera puntos de estancamiento

8.80 El potencial de velocidad para un flujo es

$$\phi = 10x + 5 \ln (x^2 + y^2)$$

(a) Demuestre que esta función satisface la ecuación de Laplace
(b) Encuentre la función de corriente $\psi (x, y)$
(c) Suponga que fluye agua y encuentre la presión a lo largo del eje x si $p = 100$ kPa en $x = -\infty$
(d) Localice cualesquiera puntos de estancamiento
(e) Encuentre la aceleración en $x = -2$ m, $y = 0$

8.81 El perfil de velocidad en un canal ancho de 0.2 m de alto está dado por $u(y) = y - y^2/0.2$. Determine la función de corriente para este flujo. Calcule el caudal al integrar el perfil de velocidad y usar $\Delta\psi$. Explique por qué un potencial de velocidad no existe con referencia a la ecuación 8.5.2.

Superposición de flujos simples

8.82 El cuerpo formado al superponer una fuente en el origen de intensidad 5π ft^2/s y un flujo uniforme de 30 ft/s se muestra en la figura P8.82.
(a) Localice cualesquiera puntos de estancamiento
(b) Encuentre el punto de intersección y, y_B del cuerpo
(c) Encuentre el espesor del cuerpo en $x = \infty$
(d) Encuentre u en $x = -12$ pulgadas, $y = 0$

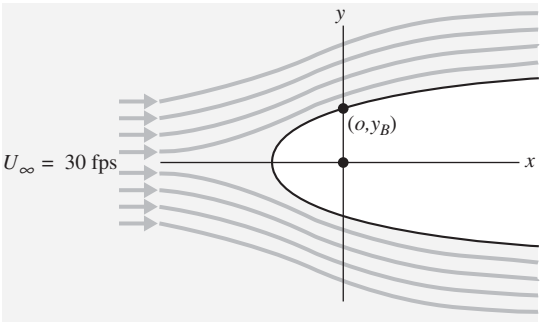


Fig. P8.82

8.83 Una fuente con intensidad π m^2/s y un sumidero de igual intensidad están ubicados en (–1 m, 0) y (1 m, 0), respectivamente. Se combinan con un flujo uniforme $U_\infty = 10$ m/s para formar un *óvalo de Rankine.* Calcule la longitud y espesor máximo del óvalo. Si $p = 10$ kPa en $x = -\infty$, encuentre la presión mínima si fluye agua.

8.84 Se forma un óvalo a partir de una fuente y sumidero con intensidades de 2π m^2/s localizados en (–1, 0) y (1, 0), respectivamente, combinados con un flujo uniforme de 2 m/s. Localice cualesquiera puntos de estancamiento y encuentre la velocidad en (–4, 0) y (0, 4). Las distancias están en metros.

8.85 Dos fuentes con intensidad de 2π m^2/s están localizadas en (0, 1) y (0, –1), respectivamente. Trace el flujo resultante y localice cualesquiera puntos de estancamiento. Encuentre la velocidad en (1, 1). Las distancias están en metros.

8.86 Las dos fuentes del problema 8.85 se superponen con un flujo uniforme. Trace el flujo, localice cualesquiera puntos de estancamiento y encuentre el punto de intersección y del cuerpo formado si:
(a) $U_\infty = 10$ m/s
(b) $U_\infty = 1$ m/s
(c) $U_\infty = 0.2$ m/s

8.87 Un doblete con intensidad de 60 m^3/s se superpone con un flujo uniforme de 8 m/s de agua. Calcule:
(a) El radio del cilindro resultante
(b) El aumento de presión de $x = -\infty$ al punto de estancamiento
(c) La velocidad $v_\theta (\theta)$ en el cilindro
(d) El decremento de presión desde el punto de estancamiento hasta el punto de presión mínima en el cilindro

8.88 Un sumidero con intensidad de 4π m^2/s se superpone con un vórtice de intensidad de 20π m^2/s.
(a) Trace una trayectoria de una partícula que inicialmente ocupa el punto ($x = 0$, $y = 1$ m). Use tangentes a cada 45º con extensiones rectas
(b) Calcule la aceleración en (0, 1)
(c) Si $p(10, 10) = 20$ kPa, ¿cuál es $p(0, 0.1$ m) si fluye aire atmosférico?

8.89 El cilindro que se muestra en la figura P8.89 se forma al combinar un doblete con intensidad de 40 m^3/s con un flujo uniforme de 10 m/s.
(a) Trace la velocidad a lo largo del eje y desde el cilindro hasta $y = \infty$
(b) Calcule la velocidad en ($x = -4$ m, $y = 3$ m)
(c) Calcule el coeficiente de arrastre para el cilindro, suponiendo flujo potencial sobre la mitad delantera y presión constante sobre la mitad posterior

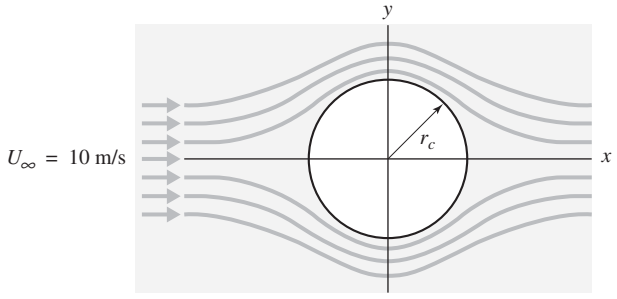


Fig. P8.89

8.90 Un cilindro de 2 m de diámetro se coloca en un flujo uniforme de agua de 4 m/s.

- **(a)** Trace la velocidad a lo largo del eje x desde el cilindro hasta $x = -\infty$
- **(b)** Encuentre v_θ en la mitad delantera del cilindro
- **(c)** Encuentre $p(\theta)$ en la mitad delantera del cilindro si $p = 50$ kPa en $x = -\infty$
- **(d)** Estime la fuerza de arrastre en una longitud de 1 m del cilindro si la presión sobre la mitad posterior es constante e igual al valor a $\theta = 90°$

8.91 Superponga una corriente libre $U_\infty = 30$ ft/s, un $\mu = 400$ ft^2/s, y un vórtice $\Gamma = 1000$ ft^2/s. Localice cualesquiera puntos de estancamiento y calcule la presión mínima y máxima en la superficie del cilindro si $p = 0$ en $x = -\infty$ y fluye aire atmosférico.

8.92 Un cilindro de 0.8 m de diámetro se coloca en un flujo de aire atmosférico a 20 m/s. ¿A qué velocidad rotacional debe girar el cilindro de modo que sólo exista un punto de estancamiento sobre su superficie? Calcule la presión mínima que actúe sobre el cilindro si $p = 0$ en $x = -\infty$.

8.93 Un cilindro de 1.2 m de diámetro gira a 120 rpm en una corriente de aire atmosférico a 3 m/s. Localice cualesquiera puntos de estancamiento y calcule las presiones mínima y máxima sobre el cilindro si $p = 0$ en $x = -\infty$.

8.94 La circulación alrededor de una superficie aerodinámica de 60 ft (medida de punta a punta) se calcula que tiene un valor de 15 000 ft^2/s. Estime la sustentación generada por la superficie aerodinámica si el avión está volando a una altura de 30 000 ft con una velocidad de 350 ft/s. Suponga que el flujo es incompresible.

8.95 Se busca el campo de velocidad debido a una fuente con intensidad de 2π m^2/s por metro, localizado en (2 m, 2 m), en una esquina a 90º. Use el *método de imágenes*, es decir, agregue una o más fuentes en los lugares apropiados, y determine el campo de velocidad al hallar $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

8.96 El flujo a través de un medio poroso se modela con la ecuación de Laplace y una función de potencial de velocidad asociada. Puede almacenarse gas natural en ciertas estructuras subterráneas rocosas para usarse posteriormente. Un pozo se construye junto a una formación rocosa impermeable, como se muestra en la figura. P8.96. Si el pozo es para extraer 0.2 m^3/s por metro, calcule la velocidad en el punto (4 m, 3 m). Vea en el problema 8.95 el método de imágenes.

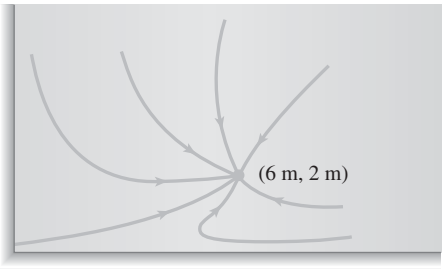


Fig. P8.96

Capas límite

8.97 ¿A qué distancia del borde de ataque puede esperarse turbulencia en una superficie aerodinámica que se desplaza a 300 ft/s si la elevación es:

(a) 0 ft? **(b)** 12,000 ft? **(c)** 30,000 ft?

Use $\mathrm{Re}_{crít} = 6 \times 10^5$ y suponga que se trata de una placa plana con gradiente de presión cero.

8.98 Una superficie aerodinámica de un avión comercial de reacción puede aproximarse, de un modo muy general, mediante una placa plana. Determine la distancia desde el borde de ataque a la que puede esperarse la transición a turbulencia. El avión vuela a 800 km/h a una altitud de 9000 m, donde la presión y temperatura son 31 kPa y –43 ºC, respectivamente.

8.99 La capa límite sobre una placa plana con gradiente de presión cero se ha de estudiar en un túnel que transporta aire a 20 ºC. ¿A qué distancia del borde de ataque se esperaría tener flujo turbulento si $U_\infty = 10$ m/s y:

- **(a)** La placa se mantiene rígida con un nivel alto de perturbación de corriente libre?
- **(b)** La placa se mantiene rígida con un nivel bajo de perturbación de corriente libre?

(c) ¿La placa se hace vibrar con un nivel bajo de perturbación de corriente libre?

(d) ¿La placa se hace vibrar con un nivel alto de perturbación de corriente libre?

(e) ¿A qué distancia se esperaría que creciera una pequeña perturbación para el flujo del inciso (b)?

8.100 Repita el problema 8.99 pero coloque la placa plana en un canal que transporta agua a 20 ºC.

8.101 Se desea que una región laminar mida al menos 2 m de largo sobre una placa plana rígida y lisa. Se dispone de un túnel de viento y de un canal de agua. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede seleccionarse para cada uno? Suponga baja intensidad de fluctuación de corriente libre y una temperatura de 20 ºC para cada uno.

8.102 Determine la presión $p(x)$ en la capa límite y la velocidad $U(x)$ en el borde de la capa límite que estarían presentes en el frente del cilindro del problema 8.89. Sea de 20 kPa la presión en el punto de estancamiento con flujo de agua. Mida x desde el punto de estancamiento; vea la figura 8.19.

8.103 Una capa límite se formaría como se muestra en la figura P8.103 desde el punto de estancamiento delantero del problema 8.90. Determine $U(x)$ y $p(x)$ que serían necesarias para calcular el crecimiento de la capa límite en el frente del cilindro. Mida x desde el punto de estancamiento.

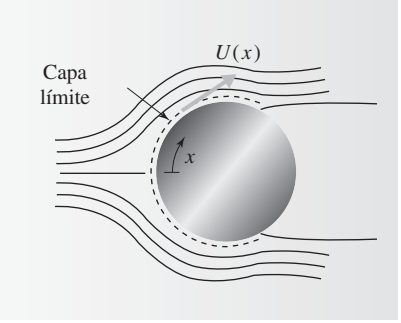


Fig. P8.103

8.104 Suponiendo un flujo uniforme inviscido a través de la contracción mostrada en la figura P8.104, estime $U(x)$ y dp/dx, que son necesarios para calcular el crecimiento de la capa límite sobre la placa plana. Suponga que se trata de un flujo unidimensional con $\rho = 1.0$ kg/m^3.

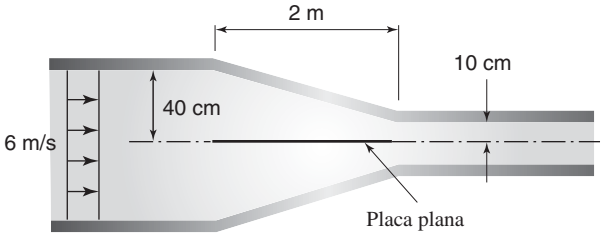


Fig. P8.104

Ecuación integral de Von Kármán

8.105 Proporcione los pasos detallados para la forma final de la ecuación 8.6.1 y la ecuación 8.6.3. Consulte la figura 8.23.

8.106 Demuestre que la ecuación integral de Von Kármán 8.6.4 puede ponerse en la forma

$$\tau_0 = -\delta \frac{dp}{dx} + \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U - u)\, dy - \rho \frac{dU}{dx} \int_0^\delta u\, dy$$

Observe que la cantidad $\displaystyle\int_0^\delta u\, dy$ es sólo una función de x.

8.107 Demuestre que la ecuación integral de Von Kármán del problema 8.106 puede escribirse como

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx}(\theta U^2) + \rho \delta_d U \frac{dU}{dx}$$

Para lograr esto, debemos demostrar que la ecuación de Bernoulli $p + \rho U^2/2 =$ constante puede derivarse para obtener

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{\rho}{\delta} \frac{dU}{dx} \int_0^\delta U\, dy$$

8.108 Suponga que $u = U_\infty \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$ es una capa límite de gradiente de presión cero. Calcule:

(a) $\delta(x)$

(b) $\tau_0(x)$

(c) v en $y = \delta$ y $x = 3$ m

8.109 Suponga un perfil de velocidad lineal y encuentre $\delta(x)$ y $\tau_0(x)$. Calcule el porcentaje de error cuando compare con las expresiones exactas para un flujo laminar. Use $dp/dx = 0$.

8.110 El perfil de una capa límite se aproxima con:

$$u = 3\, U_\infty \frac{y}{\delta} \qquad 0 < y \le \delta/6$$

$$u = U_\infty\left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3}\right) \qquad \delta/6 < y \le \delta/2$$

$$u = U_\infty\left(\frac{y}{3\delta} + \frac{2}{3}\right) \qquad \delta/2 < y \le \delta$$

Determine $\delta(x)$ y $\tau_0(x)$; calcule el porcentaje de error cuando compare con las expresiones exactas para un flujo laminar.

8.111 Si las paredes en una sección de prueba de un túnel de viento son paralelas, la velocidad en la parte central del túnel acelerará como se muestra en la figura P8.111. Para mantener una velocidad constante en el túnel, de modo que $dp/dx = 0$, demuestre que las paredes deben desplazarse hacia fuera una distancia $\delta_d(x)$. Si el túnel de viento fuera cuadrado, ¿qué distancia se desplazaría una pared hacia fuera para $dp/dx = 0$?

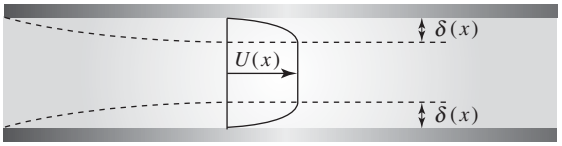


Fig. P8.111

8.112 Se supone que el perfil de la velocidad en un lugar x determinado en la capa límite (figura P8.112) es

$$u(y) = 10\left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)$$

Una línea de corriente está a 2 cm de la placa plana en el borde de ataque. ¿A qué distancia de la placa se encuentra cuando $x = 3$ m (es decir, cuál es el valor de h)? También, calcule el espesor de desplazamiento en $x = 3$ m. Compare el espesor de desplazamiento con $(h - 2)$ cm.

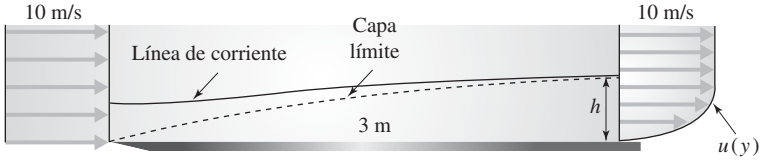


Fig. P8.112

8.113 Se desea que la sección de prueba en un túnel de viento experimente un gradiente de presión cero. Si la sección de prueba tiene una sección transversal cuadrada, ¿cuál debería ser la ecuación del desplazamiento de una de las paredes (tres paredes serán rectas y paralelas o perpendiculares) si el aire a 30 ºC está presurizado a 160 kPa absoluta? Suponga un perfil de la capa límite de $u/U_\infty = 2y/\delta - y^2/\delta^2$. Suponga también que $y = 0$ en $x = 0$ de la ecuación de desplazamiento $y(x)$.

8.114 Encuentre δ_d y θ para una capa límite laminar suponiendo:

(a) Un perfil cúbico

(b) Un perfil parabólico

(c) Que $u = U_\infty \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$

Calcule los porcentajes de error cuando compare con los valores exactos de $\delta_d = 1.72\sqrt{\nu x/U_\infty}$ y $\theta = 0.644\sqrt{\nu x/U_\infty}$.

8.115 Un flujo laminar se mantiene en una capa límite sobre una placa plana de 20 ft de largo y 15 ft de ancho, con aire atmosférico a 60 ºF fluyendo a 12 ft/s. Suponiendo un perfil parabólico, calcule:

(a) δ en $x = 20$ ft

(b) τ_0 en $x = 20$ ft

(c) La fuerza de resistencia al avance en un lado

(d) v en $y = \delta$ y $x = 10$ f

8.116 Resuelva el problema 8.115, pero suponga un perfil cúbico.

Capas límite laminar y turbulenta

8.117 Aire atmosférico a 20 ºC fluye a 10 m/s sobre una placa plana de 2 m de largo y 4 m de ancho. Calcule el espesor máximo de la capa límite y la fuerza de resistencia al avance en un lado suponiendo:

(a) Flujo laminar sobre toda la longitud

(b) Flujo turbulento sobre toda la longitud

8.118 Un fluido fluye sobre una placa plana a 20 m/s. Determine δ y τ_0 en $x = 6$ m si el fluido es:

(a) Aire atmosférico a 20 ºC

(b) Agua a 20 ºC

Desprecie la porción laminar.

8.119 Suponga un perfil de velocidad turbulento $\overline{u} = U_\infty(y/\delta)^{1/7}$. ¿Satisface el perfil las condiciones en $y = \delta$? ¿Puede dar el esfuerzo cortante en la pared? Trace un perfil laminar cúbico y el perfil de la ley exponencial a un séptimo, en la misma gráfica, suponiendo el mismo espesor de la capa límite.

8.120 Estime la resistencia al avance en un lado de una placa plana de 12 ft de largo y 51 ft de ancho si aire atmosférico a 60 ºF fluye con una velocidad de 20 ft/s. Suponga que:

(a) $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 3 \times 10^5$
(b) $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 5 \times 10^5$
(c) $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 6 \times 10^5$

8.121 Una placa plana de 1 m de largo con un borde de ataque agudo, que mide 2 m de ancho, es remolcada paralela a sí misma en agua a 20 ºC a 1.2 m/s. Estime la resistencia al avance total si:

(a) $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 3 \times 10^5$
(b) $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 6 \times 10^5$
(c) $\mathrm{Re}_{\mathrm{crít}} = 9 \times 10^5$

8.122 Se considera que el aire que se mueve a 60 km/h tiene un espesor de la capa límite igual a cero a una distancia de 100 km de la orilla. En la playa, estime el espesor de la capa límite y el cortante en la pared usando:

(a) La ley exponencial a un séptimo
(b) Datos empíricos

Use $T = 20$ ºC

8.123 Para las condiciones del problema 8.122, calcule:

(a) El espesor de la capa viscosa en la pared
(b) El espesor de desplazamiento en la playa

8.124 Aire atmosférico a 60 ºF fluye sobre una placa plana a 300 ft/s. En $x = 20$ ft, estime:

(a) El coeficiente de fricción superficial local
(b) El cortante en la pared
(c) El espesor de la capa viscosa en la pared
(d) El espesor de la capa límite

8.125 Agua a 20 ºC fluye sobre una placa plana a 10 m/s. En $x = 3$ m, estime:

(a) El espesor de la capa viscosa en la pared
(b) La velocidad en el borde de la capa viscosa en la pared
(c) El valor de y en el borde externo de la zona turbulenta
(d) El espesor de la capa límite

8.126 Estime el arrastre por esfuerzo cortante total en un barco que navega a 10 m/s si los costados son placas planas de 10 m × 100 m con gradientes de presión cero. ¿Cuál es el espesor máximo de la capa límite?

8.127 El gran dirigible de 600 m de largo, 100 m de diámetro y en forma de puro de la figura P8.127 está planeado para vuelos de crucero para ingenieros jubilados. Como primera estimación, la resistencia al avance se calcula suponiendo que es una placa plana con gradiente de presión cero, haciendo caso omiso de las áreas de resistencia al avance en la nariz y en la parte posterior.

(a) Estime la potencia requerida en cada uno de los cuatro motores si su velocidad de crucero es de 15 m/s
(b) Estime la carga útil si la mitad de su volumen se llena con helio, y sus motores, equipo y estructura tienen una masa de 1.2×10^6 kg

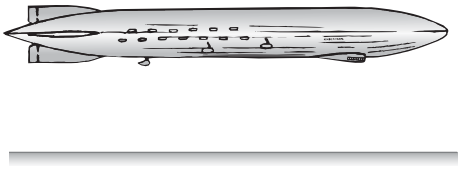


Fig. P8.127

Ecuaciones para la capa límite laminar

8.128 Suponiendo que $dp/dx = 0$, demuestre que la ecuación 8.6.47 se deduce de la ecuación 8.6.45.

8.129 Recordando de cálculo diferencial que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial(\partial\psi/\partial y)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(\partial\psi/\partial y)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

demuestre que la ecuación 8.6.49 se deduce de la ecuación 8.6.47.

8.130 Demuestre que las ecuaciones 8.6.51 se deducen de las ecuaciones anteriores.

8.131 Resuelva la ecuación 8.6.52 con las condiciones límite apropiadas, usando un esquema de Runge-Kutta de tercer orden (o cualquier otro algoritmo numérico apropiado) y verifique los resultados de la tabla 8.5. (¡Ésta fue la tesis de doctorado proyectada por Blasius antes del advenimiento de la computadora!)

8.132 Existe una capa límite laminar sobre una placa plana con aire atmosférico a 20 ºC que se mueve a 5 m/s. En $x = 2$, encuentre:

(a) El cortante en la pared
(b) El espesor de la capa límite
(c) El valor máximo de v
(d) El caudal a través de la capa límite

8.133 Existe una capa límite laminar sobre una placa plana con aire atmosférico a 60 ºF que se mueve a 15 ft/s. En $x = 6$ ft, encuentre:
- **(a)** El cortante en la pared
- **(b)** El espesor de la capa límite
- **(c)** El valor máximo de v
- **(d)** El caudal a través de la capa límite

8.134 Agua a 20 ºC fluye sobre una placa plana con gradiente de presión cero a 5 m/s. En $x = 2$ m, encuentre:
- **(a)** El cortante en la pared
- **(b)** El espesor de la capa límite
- **(c)** El caudal a través de la capa límite

8.135 Si, cuando definimos el espesor de la capa límite, definimos que δ es la ubicación y donde $u = 0.999U_\infty$, estime el espesor de la capa límite del:
- **(a)** Problema 8.132
- **(b)** Problema 8.133

8.136 Encuentre la ubicación y donde $u = 0.5U_\infty$ para la capa límite del problema 8.132. ¿Cuál es el valor de v en la ubicación y? ¿Cuál es el esfuerzo cortante allí?

8.137 Suponga que v permanece sin cambio entre $y = \delta$ y $y = 10\delta$. Haga un bosquejo de $u(y)$ para $0 \leq y < 10\delta$ para una placa plana con gradiente de presión cero. Ahora, suponga que $v = 0$ en $y = 10\delta$. De nuevo haga un bosquejo de $u(y)$. Explique con referencia a ecuaciones apropiadas.

8.138 Haga un bosquejo del perfil de la velocidad de la capa límite cerca del extremo de la placa plana del problema 8.115 y muestre un perfil de Blasius del mismo espesor sobre el mismo bosquejo.

Efectos del gradiente de presión

8.139 Haga un bosquejo de los perfiles de velocidad cerca y normales a la superficie del cilindro en cada uno de los puntos indicados en la figura P8.139. El flujo se separa en C.

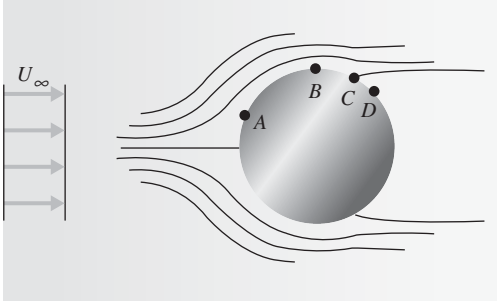


Fig. P8.139

8.140 Haga un bosquejo de los perfiles de la capa límite esperada en cada uno de los puntos indicados en la figura P8.140, mostrando los espesores relativos. El flujo experimenta una transición a turbulencia justo después del punto A. Se separa en D. Muestre todos los perfiles en la misma gráfica. Indique el signo del gradiente de presión en cada uno de los puntos.

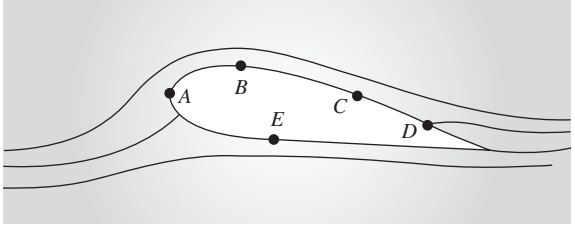


Fig. P8.140

Ilustración de un artista de un vehículo espacial de nueva generación cuando reingresa a la atmósfera de la Tierra. Se muestra una onda de choque que se genera en el borde de ataque de la nave, lo cual significa que está viajando más rápido que la velocidad del sonido. (U.S. National Aeronautics and Space Administration)

9

Flujo compresible

Esquema

9.1 Introducción
9.2 Velocidad del sonido y el número de Mach
9.3 Flujo isentrópico a través de una tobera
9.4 Onda de choque normal
9.5 Ondas de choque en toberas convergentes-divergentes
9.6 Flujo de vapor a través de una tobera
9.7 Onda de choque oblicua
9.8 Ondas isentrópicas de expansión
9.9 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar las diversas ecuaciones necesarias para resolver problemas de flujo uniforme de un flujo de gas compresible.
- Aplicar las ecuaciones básicas al flujo isentrópico a través de una tobera.
- Introducir la onda normal de choque.
- Determinar las velocidades y presiones cuando exista una onda de choque en una tobera convergente-divergente.
- Analizar el flujo supersónico de vapor a través de una tobera.
- Estudiar la onda de choque oblicua necesaria para desviar un flujo supersónico en un ángulo.
- Calcular el ángulo a través del cual las ondas de expansión pueden girar un flujo alrededor de una esquina convexa.
- Dar numerosos ejemplos y problemas que ilustren un flujo isentrópico, flujo a través de ondas de choque normales y oblicuas, y el giro de un flujo supersónico alrededor de una esquina convexa.

9.1 INTRODUCCIÓN

Flujo compresible: *Flujo de gas en el que la densidad cambia considerablemente entre puntos en una línea de corriente.*

En este capítulo consideramos flujos de gases en los que la densidad cambia considerablemente entre puntos en una línea de corriente; estos flujos se denominan **flujos compresibles**. Consideraremos los problemas que pueden resolverse usando ecuaciones integrales: la ecuación de continuidad, la ecuación de energía y, para algunos problemas, la ecuación de la cantidad de movimiento.

CONCEPTO CLAVE *No todos los flujos de gas son compresibles.*

No todos los flujos de gas son compresibles, ni todos los flujos compresibles son flujos de gas. A velocidades bajas, menores que un número de Mach ($M = V/\sqrt{kRT}$) de alrededor de 0.3, los flujos de gas pueden ser tratados como flujos incompresibles. Esto se justifica porque las variaciones de densidad causadas por el flujo son insignificantes (menos de 3%). Los flujos de gas incompresibles se presentan en gran número de situaciones de interés en ingeniería; muchos ya se han considerado en capítulos anteriores. No obstante, existen muchos flujos en los que las variaciones de densidad deben ser consideradas, por ejemplo los flujos de aire alrededor de aviones comerciales y militares, los flujos de aire a través de motores de reacción y el flujo de un gas en compresores y turbinas.

Existen ejemplos de efectos compresibles importantes en flujos de líquidos; el ariete hidráulico y las ondas de compresión debidas a explosiones subacuáticas son ejemplos de flujos de líquidos compresibles. La compresibilidad de rocas explica la propagación, a través de la superficie terrestre, de las ondas longitudinales debidas a un terremoto. En este capítulo estamos interesados en los efectos de la compresibilidad en flujos de gas.

Introduzcamos los efectos de compresibilidad en las situaciones de flujo más simples. Se supone que la velocidad en un cierto lugar de una corriente a través de un conducto es uniforme y por tanto no varía normal a la dirección de flujo. Para este flujo simple uniforme recordemos que la ecuación de continuidad toma la forma (vea la ecuación 4.4.5)

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \tag{9.1.1}$$

La ecuación de cantidad la de movimiento para el flujo compresible uniforme toma la forma (vea la ecuación 4.6.5)

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \tag{9.1.2}$$

La ecuación de energía, despreciando los cambios de energía potencial, se escribe (vea las ecuaciones 4.5.17 y 4.5.18)

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_S}{\dot{m}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + h_2 - h_1 \tag{9.1.3}$$

donde hemos utilizado $h = \tilde{u} + p/\rho$. Suponiendo un gas ideal con calores específicos constantes, la ecuación de energía toma la forma

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_S}{\dot{m}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + c_p(T_2 - T_1) \tag{9.1.4}$$

o bien,

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_S}{\dot{m}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) \tag{9.1.5}$$

donde hemos utilizado las relaciones termodinámicas

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \tag{9.1.6a}$$

$$c_p = R + c_v \tag{9.1.6b}$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{9.1.6c}$$

y la ley de un gas ideal

$$p = \rho RT \tag{9.1.7}$$

Si tenemos interés en calcular el cambio de entropía entre dos secciones, usaremos la definición de entropía como

$$\Delta S = \int \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{\text{reversible}} \tag{9.1.8}$$

donde δQ representa la transferencia de calor diferencial. Usando la primera ley, esto se convierte, para un gas ideal con calor específico constante,

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{9.1.9}$$

Si un proceso es adiabático ($Q = 0$) y reversible (sin pérdidas), la ecuación 9.1.8 muestra que el cambio de entropía es cero (es decir, el flujo es *isentrópico*). Si el flujo es isentrópico, puede usarse la relación previa, junto con la ley de un gas ideal y las ecuaciones 9.1.6b y c, para demostrar que

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} \qquad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k \tag{9.1.10}$$

Nota: Las temperaturas y presiones deben ser medidas en escalas absolutas.

Introduzcamos ahora un parámetro, el número de Mach, que será de especial interés en todo nuestro estudio de flujos compresibles.

9.2 VELOCIDAD DEL SONIDO Y EL NÚMERO DE MACH

La velocidad del sonido es la velocidad a la que una perturbación de presión de pequeña amplitud se desplaza a través de un fluido. Es análoga a una onda pequeña, una onda de gravedad, que se mueve radialmente hacia fuera cuando un guijarro se deja caer en un estanque. Para determinar la velocidad del sonido considere una

Onda sonora: *Se desplaza con una velocidad c respecto a un observador estacionario.*

pequeña perturbación de presión, llamada **onda sonora**, que pasa a través de un tubo, como se muestra en la figura 9.1. Se desplaza con una velocidad c respecto a un observador estacionario como se muestra en el inciso (a); la presión, densidad y temperatura cambiarán en las pequeñas cantidades Δp, $\Delta\rho$ y ΔT, respectivamente. También habrá una velocidad inducida ΔV en el fluido inmediatamente detrás de la onda sonora. Para simplificar el problema crearemos un flujo permanente, haciendo que el observador se desplace a la velocidad de la onda de modo que ésta parezca estacionaria. El flujo entonces se aproximará a la onda desde la derecha, con la velocidad del sonido c, como se muestra en la figura 9.1.b. Todas las propiedades del flujo cambiarán a través de la onda y la velocidad del flujo corriente abajo se expresará como $c + \Delta V$, donde ΔV es el pequeño cambio de velocidad. Si se reduce la velocidad del flujo, la onda se moverá hacia la derecha, y si se aumenta la velocidad del flujo, se moverá hacia la izquierda. Para una velocidad del flujo igual a la velocidad del sonido, $V = c$, la onda sonora estaría estacionaria, como se muestra.

Velocidad del sonido, 57

Apliquemos la ecuación de continuidad y la ecuación de energía a un pequeño volumen de control que envuelve a la onda sonora, como se muestra en la figura 9.1c. La ecuación de continuidad (9.1.1) toma la forma

$$\rho A c = (\rho + \Delta\rho)A(c + \Delta V) \tag{9.2.1}$$

Ésta puede reescribirse como

$$\rho \Delta V = -c\Delta\rho \tag{9.2.2}$$

donde hemos hecho caso omiso del término de orden superior $\Delta\rho\ \Delta V$; esto es, $\Delta\rho$ representa un pequeño cambio porcentual en ρ de modo que $\Delta\rho \ll \rho$; además $\Delta V \ll c$.

La ecuación de la cantidad de movimiento para la componente en el sentido de la corriente nos da

$$pA - (p + \Delta p)A = \rho A c(c + \Delta V - c) \tag{9.2.3}$$

que se simplifica a

$$-\Delta p = \rho c\ \Delta V \tag{9.2.4}$$

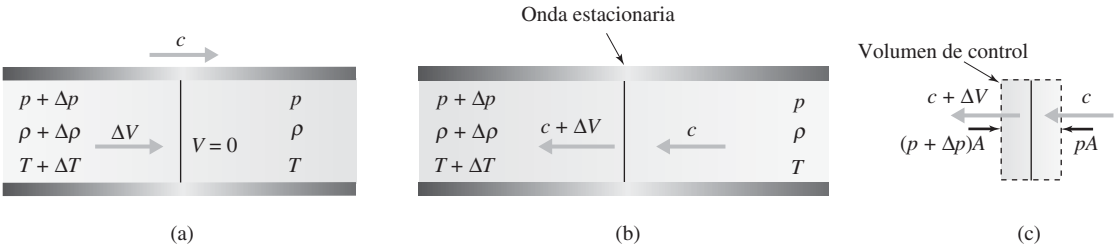


Fig. 9.1 Onda sonora; (a) observador estacionario; (b) observador en movimiento con la onda; (c) volumen de control que envuelve la onda.

Si se combina con la ecuación 9.2.2 resulta

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \tag{9.2.5}$$

Como los cambios Δp y $\Delta \rho$ son muy pequeños, podemos escribir

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \simeq \frac{dp}{d\rho} \tag{9.2.6}$$

Las ondas de amplitud pequeña y frecuencia moderada (hasta unos 18 000 Hz) se desplazan sin cambio de entropía (en forma isentrópica), de modo que

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.} \tag{9.2.7}$$

Esto puede derivarse para dar

$$\frac{dp}{d\rho} = k\frac{p}{\rho} \tag{9.2.8}$$

Usando la ecuación anterior en la ecuación 9.2.5, la velocidad del sonido c está dada por

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \tag{9.2.9}$$

o bien, usando la ley de un gas ideal,

$$c = \sqrt{kRT} \tag{9.2.10}$$

A alta frecuencia, las ondas sonoras generan fricción y el proceso deja de ser isentrópico; se aproxima mejor mediante un proceso isotérmico. Para un gas ideal, una aproximación isotérmica llevaría a

$$c = \sqrt{RT} \tag{9.2.11}$$

Para ondas pequeñas que viajan a través de líquidos o sólidos se usa el *módulo de volumen*; tiene dimensiones de presión y es igual a $\rho\, dp/d\rho$. Para agua tiene un valor nominal de 2110 MPa. Varía ligeramente con la temperatura y presión. Usando la ecuación 9.2.5, esto conduce a una velocidad de propagación de 1450 m/s para una onda de presión de pequeña amplitud en agua.

CONCEPTO CLAVE *Una onda de presión de pequeña amplitud en agua viaja a 1450 m/s.*

Una cantidad importante que se usa en el estudio de flujos compresibles es la velocidad adimensional llamada *número de Mach*, introducida en la ecuación 3.3.3 como

$$\mathrm{M} = \frac{V}{c} \tag{9.2.12}$$

Si M < 1, el flujo es *subsónico*, y si M > 1, es *supersónico*. Si M > 5 puede referirse como flujo *hipersónico*; estos flujos no se consideran en este libro.

Si una fuente de ondas sonoras está en un lugar fijo, las ondas viajan radialmente alejándose de la fuente con la velocidad del sonido c. La figura 9.2a muestra la posición de las ondas sonoras después de un incremento de tiempo Δt y después de múltiplos de Δt. El inciso (b) muestra una fuente que se mueve con una velocidad V que es menor que la velocidad del sonido. Observe que las ondas sonoras siempre se propagan delante de la fuente, de modo que un avión que se desplaza a una velocidad menor a la del sonido siempre "anuncia" su aproximación. Esto no es cierto, sin embargo, para un cuerpo que se desplaza a una velocidad mayor que la del sonido, como se muestra en la figura 9.2c. La región fuera del cono es una *zona de silencio*, de manera que un objeto que se aproxima moviéndose a una velocidad supersónica no puede ser escuchado sino hasta que pasa por encima y el *cono de Mach*, es decir el que se muestra, interseca al observador. De la figura, el ángulo α del cono de Mach está dado por

CONCEPTO CLAVE *La aproximación de un cuerpo que se mueve a* M > 1 *no puede ser detectada sino hasta que haya pasado.*

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{c}{V} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{\text{M}} \tag{9.2.13}$$

La explicación anterior está limitada a ondas sonoras de pequeña amplitud, a veces conocidas como *ondas de Mach*. Se forman en la nariz de aguja de una aeronave, o en el borde de ataque de una superficie aerodinámica si dicho borde tiene una forma lo suficientemente aguda. Si la nariz está despuntada o si el borde de ataque no está afilado lo suficiente, un avión supersónico producirá una onda de gran amplitud llamada **onda de choque**. La onda de choque también formará una zona de silencio, pero el ángulo inicial en la fuente creado por la onda de choque será mayor que el de una onda de Mach. Las ondas de choque se consideran en secciones subsiguientes.

Onda de choque: *Onda de gran amplitud que puede ser creada por un objeto despuntado.*

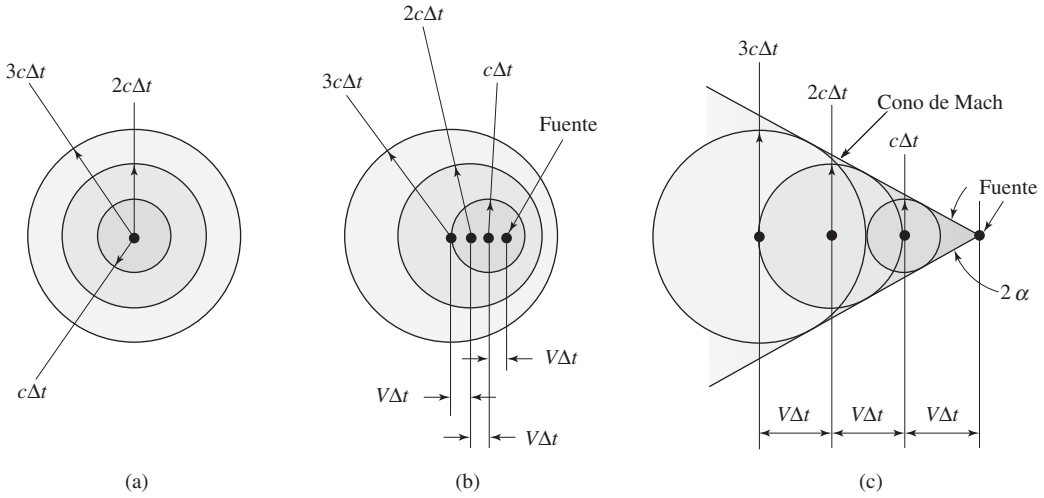


Fig. 9.2 Propagación de ondas sonoras desde una fuente de ruido: (a) fuente estacionaria; (b) fuente en movimiento, $V < c$; (c) fuente en movimiento, $V > c$.

Ejemplo 9.1

Un proyectil con nariz de aguja que se mueve a una velocidad con M = 3 pasa 200 m arriba del observador de la figura E9.1. Calcule la velocidad del proyectil y determine la distancia más allá del observador en que se escuchará por primera vez el proyectil.

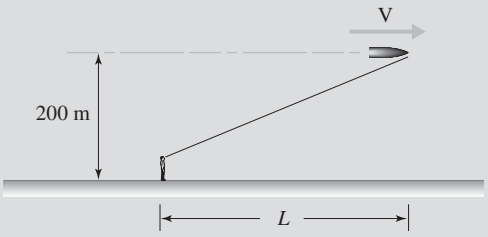


Fig. E9.1

Solución

A un número de Mach de 3 la velocidad es

$$V = \mathrm{M}c = \mathrm{M}\sqrt{kRT}$$

$$= 3\sqrt{1.4 \times 287\ \mathrm{J/kg \cdot K} \times 288\ \mathrm{K}} = 1021\ \mathrm{m/s}$$

donde se supuso una temperatura estándar de 15 ºC puesto que no se ha indicado la temperatura. (Recuerde, $\mathrm{kg} = \mathrm{N \cdot s^2/m}$ y $\mathrm{J} = \mathrm{N \cdot m}$.) Usando h como la altura y L como la distancia más allá del observador (consulte la figura 9.2c), tenemos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{\sqrt{L^2 + h^2}} = \frac{1}{\mathrm{M}}$$

Con la información dada,

$$\frac{200}{\sqrt{L^2 + 200^2}} = \frac{1}{3}$$

lo cual nos da

$$L = 566\ \mathrm{m}$$

Nota: Las unidades en kRT son $\dfrac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg \cdot K}} \times \mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{N \cdot s^2/m}} = \dfrac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}$. La cantidad k es adimensional.

9.3 FLUJO ISENTRÓPICO A TRAVÉS DE UNA TOBERA

Existen muchas aplicaciones en donde fluye un gas a través de una sección de un tubo o conducto que tiene un área que cambia y en la que un flujo permanente, uniforme e isentrópico, es una buena aproximación para la situación real de flujo. El difusor cerca del frente de un motor de reacción, los gases de la combustión que pasan por los álabes de una turbina, las toberas en un motor de cohete, un gasoducto de gas natural roto y dispositivos medidores de flujo de gas son ejemplos de situaciones que pueden modelarse con un flujo permanente, uniforme e isentrópico.

CONCEPTO CLAVE *Un flujo permanente, uniforme e isentrópico es una buena aproximación para muchas situaciones de flujo.*

Considere el flujo a través del volumen de control infinitesimal que se muestra en la figura 9.3. Con un área cambiante, la ecuación de continuidad

$$\rho AV = \text{const.} \tag{9.3.1}$$

aplicada entre dos secciones separadas una distancia dx toma la forma

$$\rho AV = (\rho + d\rho)(A + dA)(V + dV) \tag{9.3.2}$$

CONCEPTO CLAVE *Retenga sólo términos de primer orden en las cantidades diferenciales.*

Al mantener sólo los términos de primer orden en las cantidades diferenciales, la ecuación 9.3.2 se puede poner en la forma

$$\frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{9.3.3}$$

La ecuación de energía se puede escribir (vea ecuación 9.1.5) como

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const.} \tag{9.3.4}$$

Para la presente aplicación tenemos

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{(V + dV)^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p + dp}{\rho + d\rho} \tag{9.3.5}$$

o bien, de nuevo, reteniendo sólo los términos de primer orden,

$$V\,dV + \frac{k}{k-1}\frac{\rho\,dp - p\,d\rho}{\rho^2} = 0 \tag{9.3.6}$$

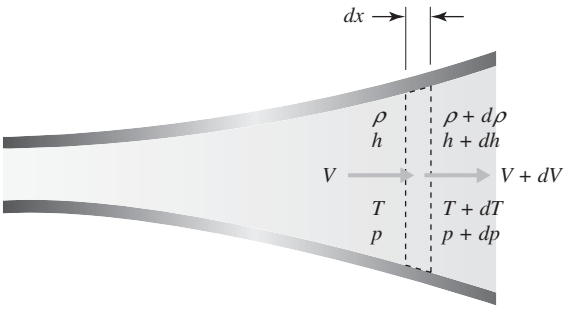


Fig. 9.3 Flujo uniforme isentrópico.

Para un proceso isentrópico usamos la ecuación 9.2.8 y resulta

$$V\,dV + k\frac{p}{\rho^2}d\rho = 0 \tag{9.3.7}$$

Sustituyendo para $d\rho/\rho$ de la ecuación 9.3.3, lo anterior se convierte en

$$\frac{dV}{V}\left(\frac{\rho V^2}{kp} - 1\right) = \frac{dA}{A} \tag{9.3.8}$$

En términos de la velocidad del sonido esto se escribe como

$$\frac{dV}{V}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right) = \frac{dA}{A} \tag{9.3.9}$$

Introduciendo el número de Mach se obtiene la muy importante relación

$$\frac{dV}{V}(\mathrm{M}^2 - 1) = \frac{dA}{A} \tag{9.3.10}$$

para un flujo uniforme isentrópico en un área cambiante.

De la ecuación 9.3.10 podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Si el área es creciente, $dA > 0$, y $\mathrm{M} < 1$, vemos que dV debe ser negativa, es decir, $dV < 0$. El flujo está desacelerando para este flujo subsónico.
2. Si el área es creciente y $\mathrm{M} > 1$, vemos que $dV > 0$; por lo tanto el flujo está acelerando en la sección divergente para este flujo supersónico.
3. Si el área es decreciente y $\mathrm{M} < 1$, entonces $dV > 0$, resultando en un flujo que acelera.
4. Si el área es decreciente y $\mathrm{M} > 1$, entonces $dV < 0$, lo cual indica un flujo que desacelera.
5. En una garganta donde $dA = 0$, $dV = 0$ o $\mathrm{M} = 1$, o posiblemente ambos.

Si definimos una **tobera** como un dispositivo que acelera el flujo, vemos que las observaciones 2 y 3 describen una tobera y las observaciones 1 y 4 describen un **difusor**, un dispositivo que desacelera el flujo. El flujo supersónico conduce a resultados un tanto sorprendentes: un flujo que acelera en un área que se agranda y un flujo que desacelera en un área decreciente. Ésta es, de hecho, la situación que se encuentra en un flujo de tráfico vehicular en una autopista; por tanto, un flujo supersónico podría usarse para modelar un flujo de tráfico vehicular.

Tobera: *Dispositivo que acelera el flujo.*

Difusor: *Dispositivo que desacelera el flujo.*

Note que las observaciones anteriores prohíben un flujo supersónico en una sección convergente conectada a un depósito. Si se genera un flujo supersónico por la liberación de un gas desde un depósito, debe haber una sección convergente en la que un flujo subsónico acelere hasta la garganta donde $\mathrm{M} = 1$ seguida por una sección divergente en la que el flujo continúe acelerando con $\mathrm{M} > 1$, como se muestra en la figura 9.4. Éste es el tipo de tobera observado en los cohetes que se usan para colocar satélites en órbita.

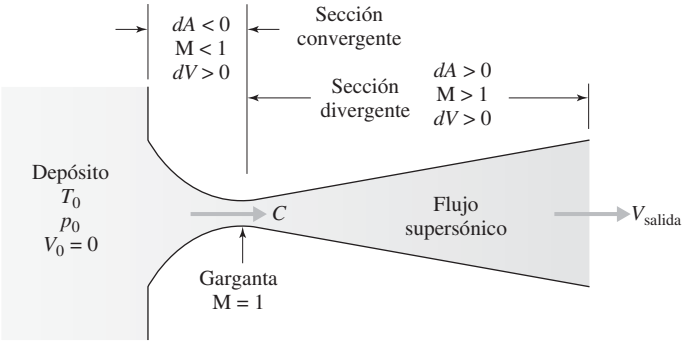


Fig. 9.4 Tobera supersónica.

Ahora consideremos con más detalle el flujo isentrópico en la tobera. La ecuación de energía entre el depósito donde $V_0 = 0$ y cualquier sección se puede escribir en la forma

$$c_p T_0 = \frac{V^2}{2} + c_p T \tag{9.3.11}$$

Cantidades de estancamiento: *Cantidades con subíndice cero en un lugar donde V = 0.*

Es frecuente que las cantidades con un subíndice cero reciban el nombre de **cantidades de estancamiento** porque se presentan en un lugar donde $V = 0$. Reconociendo que $V = \mathrm{M}c$, $c_p/c_v = k$, $c_p = c_v + R$ y $c = \sqrt{kRT}$, podemos escribir la ecuación de energía como

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2 \tag{9.3.12}$$

Para nuestro flujo isentrópico, las relaciones de presión y densidad se expresan como

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{k/(k-1)} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{1/(k-1)} \end{aligned} \tag{9.3.13}$$

Si hay un flujo supersónico corriente abajo de la garganta, entonces M = 1 en la garganta y, al denotar esta *área crítica* con un asterisco (*), tenemos las siguientes relaciones críticas:

$$\begin{aligned} \frac{T^*}{T_0} &= \frac{2}{k+1} \\ \frac{p^*}{p_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \end{aligned} \tag{9.3.14}$$

Es frecuente que hagamos referencia al área crítica aun cuando no exista una garganta real; podemos imaginar que existe una garganta y que la llamamos área crítica. De hecho, la tabla para flujo isentrópico, tabla D.1 en el apéndice D, incluye sólo esa área. Para aire con $k = 1.4$ los valores críticos son

CONCEPTO CLAVE
Mencionamos el área crítica aun cuando no exista una garganta real.

$$p^* = 0.5283\, p_0 \qquad T^* = 0.8333\, T_0 \qquad \rho^* = 0.6340\, \rho_0 \tag{9.3.15}$$

Podemos determinar una expresión para el flujo másico a través de la tobera a partir de la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho A V \\ &= \frac{p}{RT} AM\sqrt{kRT} = \frac{p}{\sqrt{T}}\sqrt{\frac{k}{R}}A\mathrm{M} \end{aligned} \tag{9.3.16}$$

Usando las ecuaciones 9.3.12 y 9.3.13, esto se puede expresar como

$$\dot{m} = \frac{p_0\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{k/(1-k)}}{\sqrt{T_0}\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-1/2}}\sqrt{\frac{k}{R}}A\mathrm{M}$$

$$= p_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\,\mathrm{M}A\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{(k+1)/2(1-k)} \tag{9.3.17}$$

Si elegimos el área crítica donde $\mathrm{M}^* = 1$, vemos que

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/2(1-k)} \tag{9.3.18}$$

Esto demuestra que el flujo másico en la tobera depende sólo de las condiciones del depósito y del área crítica A^*. Combinando las ecuaciones 9.3.17 y 9.3.18, la relación entre áreas A/A^* puede escribirse en términos del número de Mach como

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{M}}\left[\frac{2 + (k-1)\mathrm{M}^2}{k+1}\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{9.3.19}$$

Esta relación está incluida en la tabla D.1 para flujo de aire.

Como consideración final en nuestro estudio del flujo isentrópico en toberas, presentaremos la influencia de la presión en el depósito y de la presión en el receptor en el flujo másico. Primero, presentaremos la tobera convergente y, a continuación, la tobera convergente-divergente. Se supone que la tobera convergente está conectada a un depósito, como se muestra en la figura 9.5a, con condiciones fijas; la presión en el receptor puede bajarse para obtener un flujo másico creciente a través de la tobera, como lo muestra la curva izquierda de la figura 9.5b. Cuando la pre-

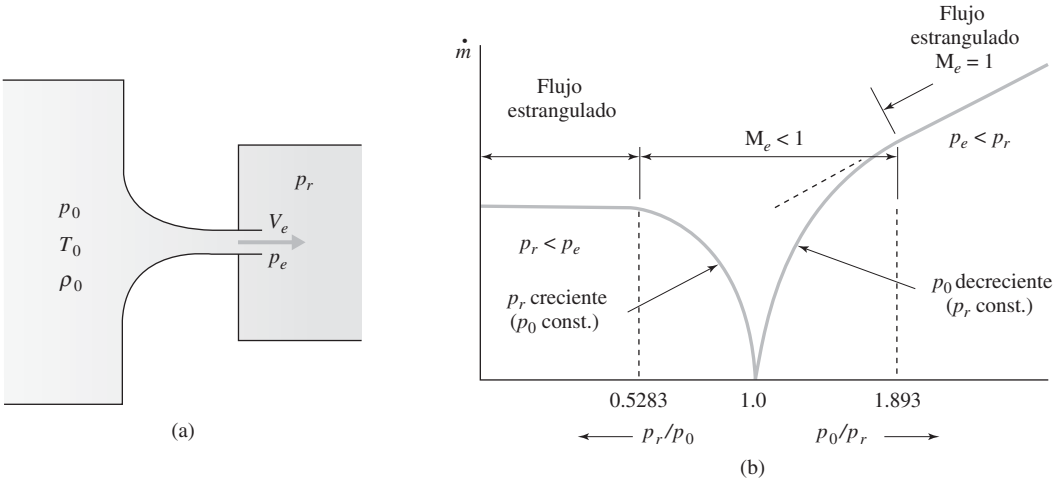


Fig. 9.5 Tobera convergente.

sión p_r del receptor alcanza la presión crítica (para aire $p_r = 0.5283\, p_0$), el número de Mach M_e en la garganta (la salida) es la unidad. Cuando p_r se reduce debajo de este valor crítico no aumentará el flujo másico, y se presenta la condición de *flujo estrangulado*, como lo muestra la curva izquierda de la figura 9.5b. Si la garganta es un área crítica, es decir, M = 1 en la garganta, entonces $\dot{m}$ depende sólo del área A^* de garganta y de las condiciones en el depósito, como lo indica la ecuación 9.3.18. Por tanto, reducir p_r debajo de la presión crítica no tiene efecto en el flujo corriente arriba. Esto es razonable dado que las perturbaciones se desplazan a la velocidad del sonido; si p_r se reduce, las perturbaciones que se desplazarían corriente arriba, cambiando así las condiciones, no pueden hacerlo porque la velocidad de la corriente a la salida es igual a la velocidad del sonido, evitando de esta manera que cualesquiera perturbaciones se propaguen corriente arriba.

CONCEPTO CLAVE *Reducir p_r debajo de la presión crítica no tiene efecto en el flujo corriente arriba.*

Si, en la tobera convergente, mantenemos p_r constante y aumentamos la presión en el depósito (y también mantenemos T_0 constante), se presenta de nuevo un flujo estrangulado cuando $M_e = 1$; no obstante, cuando p_0 se aumenta aún más, vemos de la ecuación 9.3.18 que el flujo másico aumentará, como lo muestra la curva derecha de la figura 9.5b. La presión p_e es igual a p_r hasta que el número de Mach M_e es exactamente igual a la unidad. Esto inicia la condición de flujo estrangulado. La presión de salida p_e para la condición de flujo estrangulado será mayor que la presión en el receptor p_r, condición que se presenta cuando se rompe una línea de gas.

CONCEPTO CLAVE *Si $p_e > p_r$ el flujo que sale por la tobera puede virar en forma abrupta.*

Una nota puede ser oportuna para explicar cómo es posible que la presión de salida p_e del flujo exceda la presión en el receptor p_r. Si $p_e > p_r$, el flujo que sale de la tobera puede virar en forma abrupta causando el patrón de flujo que se muestra en la figura 9.6. Esta posible situación de flujo se estudiará en la sección 9.8.

Ahora, considere la tobera convergente-divergente, mostrada en la figura 9.7, con depósito y receptor como se indican. Sólo presentaremos la condición de presión constante en el depósito y presión reducida en el receptor. Para esta tobera trazamos la relación entre presiones p/p_0 como una función de la ubicación en la tobera para varias relaciones de presiones en el receptor p_r/p_0. Si $p_r/p_0 = 1$, no hay flujo, lo que corresponde a la curva A. Si p_r se reduce una pequeña cantidad, resulta la curva B y se tendrá un flujo subsónico en toda la tobera con un mínimo de presión en la garganta. A medida que la presión se reduce aún más, se alcanza una

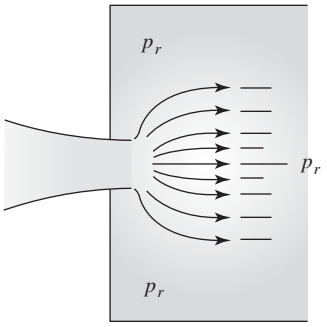


Fig. 9.6 Flujo de salida de una tobera para $p_e > p_r$.

presión que resultará en el número de Mach en la garganta igual a la unidad, como indica la curva *C*; no obstante, el flujo permanece subsónico desde el principio hasta el fin. Existe otra presión particular en el receptor, considerablemente abajo de la de la curva *C*, que también producirá un flujo isentrópico del principio hasta el fin; resulta en la curva *D*. Cualquier presión en el receptor entre estas dos presiones particulares resultará en un flujo no isentrópico en la tobera; se presenta una onda de choque, que estudiaremos más adelante, misma que hace inválida nuestra suposición de flujo isentrópico. Si la presión en el receptor está por debajo de la asociada con la curva *D*, de nuevo encontramos que la presión de salida p_e de la tobera es mayor que la presión en el receptor p_r. El flujo másico en la tobera aumenta de la curva *A* a la curva *C*; pero como la presión en el receptor está reducida por debajo de la de la curva *C*, no hay aumento en el flujo másico dado que la condición en la garganta permanecerá sin cambio. El flujo másico está dado por la ecuación 9.3.17.

CONCEPTO CLAVE *El propósito de una tobera es convertir energía almacenada en energía cinética.*

Las siguientes son unas notas finales respecto a la efectividad de un difusor. El objetivo de una tobera es convertir la entalpía (la cual se puede considerar como

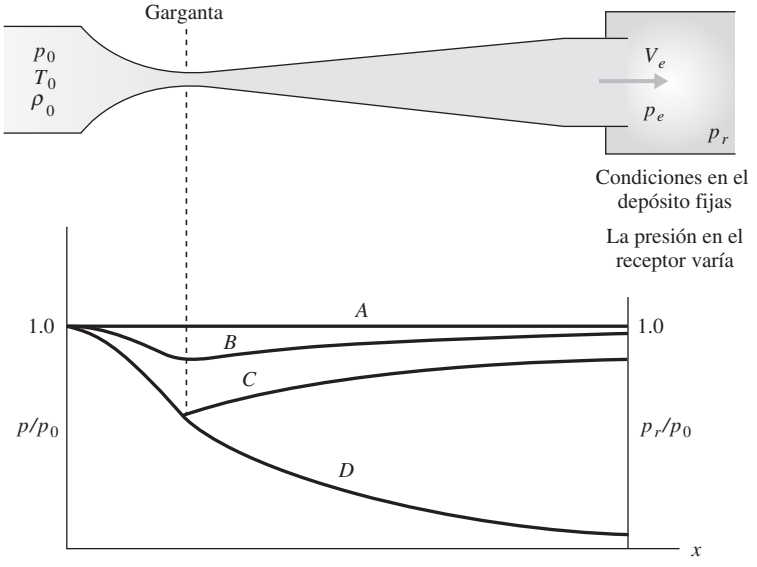


Fig. 9.7 Tobera convergente-divergente.

energía almacenada) en energía cinética como lo describe la ecuación 9.1.3 con $\dot{Q} = \dot{W}_S = 0$. La eficiencia η_N de una tobera está definida como

$$\eta_N = \frac{(\Delta \text{KE})_{\text{real}}}{(\Delta \text{KE})_{\text{isentrópica}}} = \frac{h_0 - h_e}{h_0 - h_{es}} \tag{9.3.20}$$

donde h_e es la entalpía real de salida y h_{es} es la entalpía isentrópica de salida.

Las eficiencias están entre 90 y 99% y las toberas más grandes tienen los porcentajes más altos porque los efectos viscosos en la pared, que ocasionan la mayor parte de las pérdidas, son relativamente pequeños en ellas.

CONCEPTO CLAVE *El objetivo de un difusor es recuperar la presión.*

El objetivo de un difusor es desacelerar el fluido y recuperar la presión. Para un difusor, definimos que el *factor de recuperación de presión* C_p es

$$C_p = \frac{\Delta p_{\text{real}}}{\Delta p_{\text{isontrópico}}} \tag{9.3.21}$$

Tales factores varían entre 40% cuando el flujo en realidad se separa de la pared (el ángulo incluido debe ser menor que unos 10º para una sección subsónica, para evitar esta separación) hasta 85%. Pueden instalarse paletas en los difusores subsónicos con ángulos grandes de modo que cada pasaje entre paletas se expanda a un ángulo de 10º o menor. Los efectos viscosos son considerablemente mayores en un difusor que en una tobera debido a que son más gruesas las capas viscosas en la pared.

El lector puede pensar que el flujo en una tobera divergente supersónica puede tender también a separarse de la pared; éste no es el caso. Los abanicos de expansión, fenómeno producido por la naturaleza y que estudiaremos en la sección 9.8, permiten que el flujo supersónico gire ángulos muy agudos, de modo que las toberas supersónicas se construyen con grandes ángulos incluidos, por ejemplo los de cohetes que impulsan satélites hasta su órbita.

CONCEPTO CLAVE *Las toberas supersónicas se construyen con grandes ángulos incluidos.*

Ejemplo 9.2

Sale aire de un depósito que se mantiene a 20 ºC y 500 kPa absoluta hacia un receptor mantenido a (a) 300 kPa absoluta y (b) 200 kPa absoluta. Estime el flujo másico si el área de salida es 10 cm^2. Use las ecuaciones primero y, a continuación, la tabla para flujo isentrópico, tabla D.1. Consulte la figura 9.5.

Solución

Para estimar el flujo másico supondremos flujo isentrópico. Para aire, la presión en el receptor que resultaría en $M_e = 1$ es

$$p_r = 0.5283\, p_0 = 0.5283 \times 500 = 264.2 \text{ kPa}$$

Para el inciso (a) $M_e < 1$ ya que $p_r > 264.2$ kPa, y para el inciso (b) existe un flujo estrangulado y $M_e = 1$ ya que $p_r < 264.2$ kPa.

(a) Para hallar el número de Mach de salida, la ecuación 9.3.13 da

$$1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2 = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k}$$

o bien,

$$\mathrm{M}_e^2 = \frac{2}{k-1}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - \frac{2}{k-1}$$

$$= \frac{2}{0.4}\left(\frac{500}{300}\right)^{0.2857} - \frac{2}{0.4} = 0.7857 \qquad \therefore \mathrm{M}_e = 0.8864$$

El flujo másico está dado por la ecuación 9.3.17 y se encuentra que es

$$\dot{m} = p_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\,\mathrm{M}A\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2\right)^{(k+1)/2(1-k)}$$

$$= 500\,000\sqrt{\frac{1.4}{287 \times 293}} \times 0.8864 \times 0.001\left(1 + \frac{0.4}{2} \times 0.8864^2\right)^{-2.4/0.8}$$

$$= 1.167 \text{ kg/s}$$

(b) Ocurre flujo estrangulado y por tanto $\mathrm{M}_e = 1$; la ecuación 9.3.18 da

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/2(1-k)}$$

$$= 500\,000 \times 0.001\sqrt{\frac{1.4}{287 \times 293}}\left(\frac{2.4}{2}\right)^{-2.4/0.8} = 1.181 \text{ kg/s}$$

Ahora usemos la tabla para flujo isentrópico (tabla D.1) y resolvamos los incisos (a) y (b).
(a) Para una relación entre presiones de $p/p_0 = 300/500 = 0.6$, interpolamos y encontramos

$$\mathrm{M}_e = \frac{0.6041 - 0.6}{0.6041 - 0.5913} \times 0.02 + 0.88 = 0.886$$

$$\frac{T_e}{T_0} = \frac{0.6041 - 0.6}{0.6041 - 0.5913}(0.8606 - 0.8659) + 0.8659 = 0.864$$

$$T_e = 0.864 \times 293 = 253 \text{ K}$$

La velocidad y la densidad son, respectivamente,

$$V = \mathrm{M}c = 0.886\sqrt{1.4 \times 287 \times 253} = 282 \text{ m/s}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{300}{0.287 \times 253} = 4.13 \text{ kg/m}^3$$

El flujo másico es entonces

$$\dot{m} = \rho AV$$

$$= 4.13 \times 0.001 \times 282 = 1.165 \text{ kg/s}$$

(b) Para flujo estrangulado sabemos que $\mathrm{M}_e = 1$. La tabla da

(continúa)

$$\frac{T_e}{T_0} = 0.8333 \qquad \text{y} \qquad \frac{p_e}{p_0} = 0.5283$$

Entonces la temperatura, velocidad y densidad son, respectivamente,

$$T = 0.8333 \times 293 = 244.2 \text{ K}$$

$$V = \text{M}c = 1 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 244.2} = 313.2 \text{ m/s}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{0.5283 \times 500}{0.287 \times 244.2} = 3.769 \text{ kg/m}^3$$

Se calcula que el flujo másico es

$$\dot{m} = \rho AV$$
$$= 3.769 \times 0.001 \times 313.2 = 1.180 \text{ kg/s}$$

Los resultados con el uso de las ecuaciones son esencialmente los mismos que los que se obtienen usando las tablas.

Ejemplo 9.3

Una tobera convergente-divergente, con un área de salida de 40 cm^2 y un área de garganta de 10 cm^2, está conectada a un depósito con $T = 20$ °C y $p = 500$ kPa absoluta. Determine las dos presiones de salida que resultan en M = 1 en la garganta para un flujo isentrópico. Además, determine las temperaturas y velocidades de salida asociadas. Vea la figura 9.7.

Solución

Las presiones de salida que buscamos están asociadas con las curvas *C* y *D* de la figura 9.7. La relación entre áreas es

$$\frac{A}{A^*} = \frac{40}{10} = 4$$

De la ecuación 9.3.19 podríamos despejar M usando una técnica de prueba y error; no obstante, usemos la tabla para flujo isentrópico, tabla D.1. Hay dos entradas para $A/A^* = 4$. Una interpolación nos da

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_C = \frac{4.182 - 4.0}{4.182 - 3.673}(0.9823 - 0.9864) + 0.9864 = 0.9849$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_D = \frac{4.0 - 3.999}{4.076 - 3.999}(0.02891 - 0.02980) + 0.02980 = 0.02979$$

En consecuencia, las dos presiones de salida que resultarán en un flujo isentrópico son

$$p_C = 492.4 \text{ kPa} \qquad \text{y} \qquad p_D = 14.9 \text{ kPa}$$

Observe la muy pequeña diferencia de presión (7.6 kPa) entre el receptor y el depósito necesaria para crear la condición de flujo de la curva *C* de la figura 9.7.

Las relaciones entre las temperaturas de salida y los números de Mach se interpolan y son

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)_C = 0.3576(0.9949 - 0.9961) + 0.9961 = 0.9957$$

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)_D = 0.01299(0.3633 - 0.3665) + 0.3665 = 0.3665$$

$$\mathrm{M}_C = 0.3576 \times 0.02 + 0.14 = 0.147$$

$$\mathrm{M}_D = 0.01299 \times 0.02 + 2.94 = 2.94$$

Las temperaturas de salida asociadas con las curvas C y D son entonces

$$T_C = 0.9957 \times 293 = 291.7 \text{ K}$$

$$T_D = 0.3665 \times 293 = 107.4 \text{ K}$$

Las velocidades de salida se encuentran con $V = \mathrm{M}c$ y son

$$V_C = 0.147\sqrt{1.4 \times 287 \times 291.7} = 50.3 \text{ m/s}$$

$$V_D = 2.94\sqrt{1.4 \times 287 \times 107.4} = 611 \text{ m/s}$$

Ejemplo 9.4

Se supone que los flujos de gas son incompresibles a números de Mach menores que aproximadamente 0.3. Determine el error involucrado al calcular la presión de estancamiento para un flujo de aire con M = 0.3.

Solución

Para un flujo de aire incompresible la ecuación de energía (4.5.20) sin pérdidas nos daría

$$p_0 = p_1 + \rho\frac{V_1^2}{2}$$

donde $V_0 = 0$ en el punto de estancamiento.

La ecuación para flujo isentrópico (9.3.13), con $k = 1.4$, da

$$p_0 = p_1(1 + 0.2\mathrm{M}_1^2)^{3.5}$$

Use el teorema binomial $(1 + x)^n = 1 + nx + n(n - 1)x^2/2! + \cdots$ y exprese esto como, haciendo $x = 0.2\mathrm{M}_1^2$,

$$p_0 = p_1(1 + 0.7\mathrm{M}_1^2 + 0.175\mathrm{M}_1^4 + \cdots)$$

Esto se puede escribir como (vea las ecuaciones 9.2.9 y 9.2.12)

$$p_0 - p_1 = p_1\mathrm{M}_1^2(0.7 + 0.175\mathrm{M}_1^2 + \cdots)$$

$$= \frac{\rho_1 V_1^2}{1.4}(0.7 + 0.175\mathrm{M}_1^2 + \cdots)$$

$$= \rho_1 \frac{V_1^2}{2}(1 + 0.25\mathrm{M}_1^2 + \cdots)$$

Sustituyendo $\mathrm{M}_1 = 0.3$, vemos que

$$p_0 - p_1 = \rho_1 \frac{V_1^2}{2}(1 + 0.0225 + \cdots)$$

Comparando esto con la ecuación de flujo incompresible, vemos que el error es sólo ligeramente mayor que 2%. En consecuencia, es razonable aproximar un flujo de gas para M menor que 0.3 ($V \cong 100$ m/s para aire en condiciones estándard) con un flujo incompresible para muchas aplicaciones de ingeniería.

9.4 ONDA DE CHOQUE NORMAL

Las perturbaciones de amplitud pequeña se desplazan a la velocidad del sonido, como se estableció en la sección 9.2. En esta sección estudiaremos una perturbación de gran amplitud. Consideraremos su velocidad de propagación y su efecto en otras propiedades de flujo, como en la presión y la temperatura. Las perturbaciones de gran amplitud ocurren en diversas situaciones, como en el flujo de un cañón de escopeta adelante del proyectil, el flujo de salida de una tobera de un cohete o de un motor de reacción, el flujo de aire alrededor de un avión supersónico, así como el frente de expansión debido a una explosión. Estas grandes perturbaciones que se propagan a través de un gas se denominan **ondas de choque**. Pueden estar orientadas normales al flujo o en ángulos oblicuos. En esta sección consideramos sólo la onda de choque normal que ocurre en un tubo o directamente frente a un objeto despuntado; la fotografía de la figura 9.8 muestra la onda de choque frente a una esfera.

Onda de choque: *Perturbación grande que se propaga a través de un gas.*

CONCEPTO CLAVE *Los cambios que ocurren a través de una onda de choque tienen lugar en una distancia extremadamente corta.*

Los cambios en las propiedades que ocurren a través de una onda de choque tienen lugar en una distancia extremadamente corta. Para condiciones usuales la distancia es de sólo varias trayectorias libres medias de las moléculas, del orden de 10^{-4} mm. Los fenómenos como la disipación viscosa y la conducción de calor que ocurren dentro de la onda de choque no se estudiarán aquí. Trataremos la onda de choque como una discontinuidad de grosor cero en el flujo y permitiremos que nuestras ecuaciones para volumen de control integral relacionen las cantidades de interés global.

Considere una onda de choque normal que se mueve con velocidad V_1. Podemos hacerla estacionaria si movemos el flujo en un tubo a la velocidad V_1, como se muestra en la figura 9.9. La ecuación de continuidad, reconociendo que $A_1 = A_2$, es

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{9.4.1}$$

La ecuación de energía (9.1.5), con $\dot{Q} = \dot{W}_S = 0$, es

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = 0 \tag{9.4.2}$$

Fig. 9.8 Una onda de choque es observada frente a una esfera a M = 1.53. (Fotografía de A.C. Charters. De Album of Fluid Motion, 1982, The Parabolic Press, Stanford, California.)

La ecuación de la cantidad de movimiento (9.1.2), con sólo fuerzas de presión, se convierte en

$$p_1 - p_2 = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1) \tag{9.4.3}$$

donde las áreas se dividieron. Estas tres ecuaciones nos permiten determinar tres cantidades desconocidas; si se conocen ρ_1, V_1 y p_1, podemos hallar ρ_2, V_2, p_2 y, posteriormente, T_2 y M_2, usando las ecuaciones apropiadas.

CONCEPTO CLAVE *Las tres ecuaciones nos permiten determinar tres incógnitas.*

Es conveniente, sin embargo, expresar las ecuaciones en términos de los números de Mach M_1 y M_2. Esto resulta en un conjunto de ecuaciones que son más fáciles de resolver que encontrar la solución de las tres ecuaciones simultáneas citadas antes. Para hacer esto escribimos la ecuación 9.4.3, usando $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, en la forma

$$p_1\left(1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{p_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\rho_2 V_2^2}{p_2}\right) \tag{9.4.4}$$

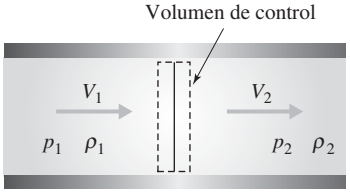


Fig. 9.9 Onda de choque estacionaria en un tubo.

Introduciendo $\mathrm{M}^2 = V^2\rho/pk$ (combine las ecuaciones 9.2.9 y 9.2.12), la ecuación de la cantidad de movimiento se convierte en

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k\mathrm{M}_1^2}{1 + k\mathrm{M}_2^2} \tag{9.4.5}$$

Del mismo modo, la ecuación de energía (9.4.2) con $p = \rho RT$, se escribe como

$$T_1\left(1 + \frac{k-1}{kRT_1}\frac{V_1^2}{2}\right) = T_2\left(1 + \frac{k-1}{kRT_2}\frac{V_2^2}{2}\right) \tag{9.4.6}$$

o bien, sustituyendo $\mathrm{M}^2 = V^2/kRT$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}_2^2} \tag{9.4.7}$$

Si sustituimos $\rho = p/RT$ en la ecuación de continuidad (9.4.1), tenemos

$$\frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2} \tag{9.4.8}$$

que se convierte, usando $V = \mathrm{M}\sqrt{kRT}$, en

$$\frac{p_2}{p_1}\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 1 \tag{9.4.9}$$

Sustituyendo para las relaciones entre presiones y temperaturas de las ecuaciones 9.4.5 y 9.4.7, la ecuación de continuidad toma la forma

$$\frac{\mathrm{M}_1\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\right)^{1/2}}{1 + k\mathrm{M}_1^2} = \frac{\mathrm{M}_2\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}_2^2\right)^{1/2}}{1 + k\mathrm{M}_2^2} \tag{9.4.10}$$

De aquí que el número de Mach corriente abajo está relacionado con el número de Mach corriente arriba por

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{\mathrm{M}_1^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}\mathrm{M}_1^2 - 1} \tag{9.4.11}$$

Esto nos permite expresar las relaciones entre presiones y temperaturas en términos de M_1 solamente. La ecuación de la cantidad de movimiento (9.4.5) toma la forma

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{9.4.12}$$

y la ecuación de energía se convierte en

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)\left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1\right)}{\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} M_1^2} \tag{9.4.13}$$

Para el aire, con $k = 1.4$, las tres ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \frac{M_1^2 + 5}{7M_1^2 - 1} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{7M_1^2 - 1}{6} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{(M_1^2 + 5)(7M_1^2 - 1)}{36M_1^2} \end{aligned} \tag{9.4.14}$$

De la primera de estas tres ecuaciones, observamos:

- Si $M_1 = 1$, entonces $M_2 = 1$ y no existe onda de choque.
- Si $M_1 > 1$, entonces $M_2 < 1$ y la onda de choque normal convierte un flujo supersónico en un flujo subsónico.
- Si $M_1 < 1$, entonces $M_2 > 1$ y un flujo subsónico parece haber sido convertido en un flujo supersónico por la presencia de una onda de choque normal. Esta posibilidad es eliminada por la segunda ley puesto que demandaría una disminución en entropía por un proceso en un sistema aislado, una imposibilidad.

CONCEPTO CLAVE *Una onda finita que convierte un flujo subsónico en un flujo supersónico es una imposibilidad.*

La imposibilidad expresada aquí se observa al considerar el aumento de entropía, dado por

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \\ &= c_p \ln \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} - R \ln \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \end{aligned} \tag{9.4.15}$$

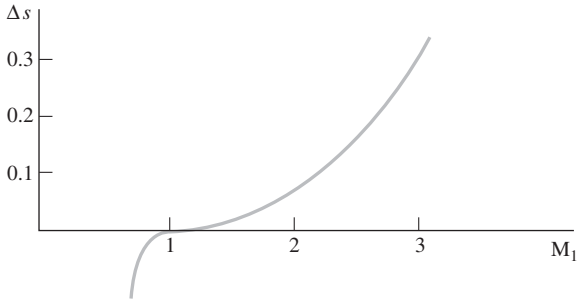


Fig. 9.10 Cambio de entropía para un choque normal en aire.

Para aire, con $k = 1.4$, esto está graficado en la figura 9.10, que relaciona M_2 con M_1, con la ecuación 9.4.11. Observe el cambio negativo de entropía imposible cuando $M_1 < 1$.

La relación entre las propiedades termodinámicas, incluidas en las ecuaciones anteriores, se puede demostrar gráficamente con referencia al diagrama *T-s* en la figura 9.11. Las condiciones corriente arriba del choque normal se designan por el estado 1, y corriente abajo por el estado 2. Observe la línea discontinua del estado 1 al estado 2 para el proceso irreversible que ocurre dentro de la onda de choque. La ecuación de energía, con $\dot{Q} = \dot{W}_S = 0$, puede escribirse como

$$\frac{V_1^2}{2c_p} + T_1 = \frac{V_2^2}{2c_p} + T_2 \tag{9.4.16}$$

La temperatura de estancamiento se define como la temperatura que existiría si el flujo se llevara al reposo en forma isentrópica. Entonces la ecuación de energía nos da

$$T_{01} = T_{02} \tag{9.4.17}$$

como se muestra en la figura. La considerable disminución en presión de estancamiento, $p_{02} < p_{01}$, también se observa en la figura 9.11. Si aumenta la entropía del estado 1 al estado 2, como debe, la presión de estancamiento p_{02} debe disminuir, como se ilustra, si hemos de mantener $T_{01} = T_{02}$.

Se dispone de tablas para gases que dan la relación entre las presiones, la relación entre la temperaturas, el número de Mach corriente abajo, y la relación de la presión de estancamiento como una función del número de Mach corriente arriba. La tabla D.2 es la tabla para $k = 1.4$ e incluye las relaciones dadas por la ecuación 9.4.14. Observe que M_2 siempre es menor que la unidad, p_2 siempre es mayor que p_1, T_2 siempre es mayor que T_1, y p_{02} siempre es menor que p_{01}.

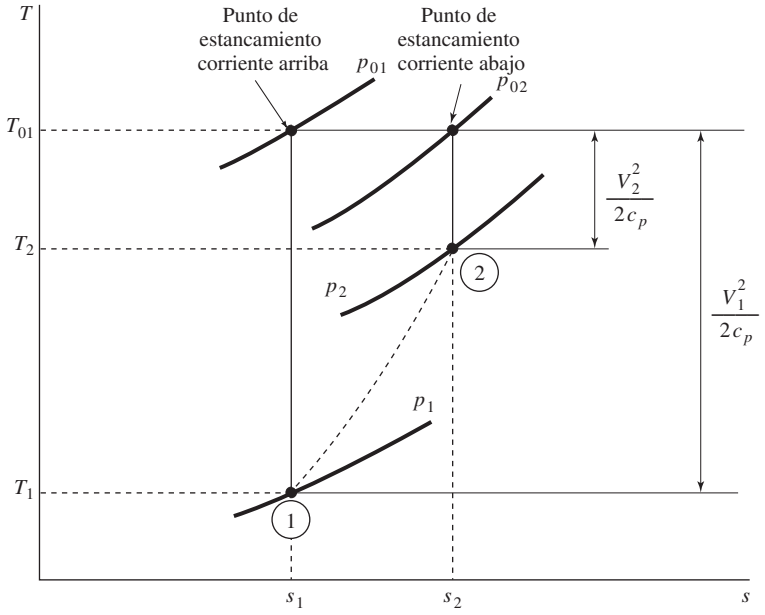


Fig. 9.11 Diagrama *T-s* para una onda de choque normal.

Ejemplo 9.5

Una onda de choque normal pasa a través de aire estancado a 60 °F y a una presión atmosférica de 12 psi con una velocidad de 1500 ft/s. Calcule la presión y la temperatura de la onda de choque corriente abajo. Use (a) las ecuaciones y (b) las tablas para gases.

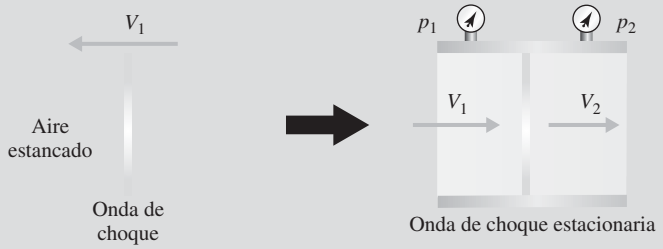


Fig. E9.5

Solución

Consideremos que la onda de choque está estacionaria con $V_1 = 1500$ ft/s y $p_1 = 12$ psia. (a) Para usar las ecuaciones simplificadas (9.4.14) debemos conocer el número de Mach corriente arriba. El cual es

$$\mathrm{M}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$= \frac{1500 \text{ ft/s}}{\sqrt{1.4 \times 1716 \text{ ft-lb/slug-°R} \times 520 \text{ °R}}} = 1.342$$

(*continúa*)

Se encuentra entonces que la presión y la temperatura son

$$p_2 = \frac{p_1(7\mathrm{M}_1^2 - 1)}{6}$$

$$= \frac{12(7 \times 1.342^2 - 1)}{6} = 23.21 \text{ psia}$$

$$T_2 = \frac{T_1(\mathrm{M}_1^2 + 5)(7\mathrm{M}_1^2 - 1)}{36\mathrm{M}_1^2}$$

$$= \frac{520(1.342^2 + 5)(7 \times 1.342^2 - 1)}{36 \times 1.342^2} = 633.1°\mathrm{R}$$

(b) Del inciso (a), usamos $\mathrm{M}_1 = 1.342$. Una interpolación en la tabla D.2 da

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1.342 - 1.34}{1.36 - 1.34}(1.991 - 1.928) + 1.928 = 1.934$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1.342 - 1.34}{1.36 - 1.34}(1.229 - 1.216) + 1.216 = 1.217$$

Usando la información dada, tenemos

$$p_2 = 12 \times 1.934 = 23.21 \text{ psia}$$

$$T_2 = 520 \times 1.217 = 632.8 \text{ °R}$$

Ejemplo 9.6

Una onda de choque normal se propaga a una velocidad de 700 m/s, a través de aire que de otro modo estaría estancado en condiciones estándar. Determine la velocidad inducida en el aire que está inmediatamente detrás de la onda de choque como se muestra en la figura E9.6. Use las ecuaciones.

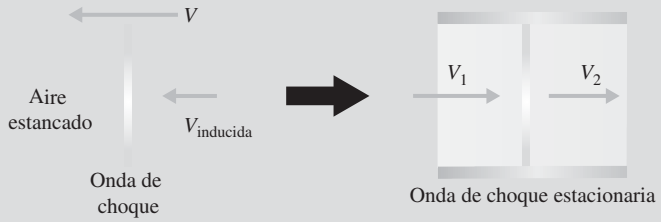


Fig. E9.6

Solución

Para condiciones estándar la temperatura es 15 ºC. El número de Mach corriente arriba es entonces

$$\mathrm{M}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{700}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 288}} = 2.06$$

Usando la ecuación 9.4.14, encontramos que

$$M_2 = \left(\frac{M_1^2 + 5}{7M_1^2 - 1}\right)^{1/2} = \left(\frac{2.06^2 + 5}{7 \times 2.06^2 - 1}\right)^{1/2} = 0.567$$

$$T_2 = \frac{T_1(M_1^2 + 5)(7M_1^2 - 1)}{36M_1^2}$$

$$= \frac{288(2.06^2 + 5)(7 \times 2.06^2 - 1)}{36 \times 2.06^2} = 500.2 \text{ K}$$

Esto nos permite calcular

$$V_2 = M_2 c_2 = 0.567 \sqrt{1.4 \times 287 \times 500.2} = 254.4 \text{ m/s}$$

Esta velocidad supone un flujo con la onda de choque estacionaria y el aire aproximándose a la onda de choque a 700 m/s. Si superponemos una velocidad de 700 m/s que se mueve en oposición a V_1, encontramos que la velocidad inducida es

$$V_{\text{inducida}} = V_2 - V_1$$
$$= 254.4 - 700 = -446 \text{ m/s}$$

donde el signo negativo significa que la velocidad inducida estaría moviéndose hacia la izquierda si V_1 es hacia la derecha. La velocidad inducida sería en la misma dirección que la propagación de la onda de choque. Estas velocidades inducidas tan grandes son causa de gran parte del daño lejos del centro de una bomba causado por explosiones de bombas de alto poder.

9.5 ONDAS DE CHOQUE EN TOBERAS CONVERGENTES-DIVERGENTES

La tobera convergente-divergente ya ha sido presentada para un flujo isentrópico; para relaciones de presiones de receptor a depósito entre las de las curvas *C* y *D* de las figuras 9.7 y 9.12 (en la siguiente página), existen ondas de choque en el flujo ya sea dentro o fuera de la tobera. Si $p_r/p_0 = a$ (localice *a* en el eje vertical a la derecha de la figura 9.12), existiría una onda de choque normal en un lugar interno en la parte divergente de la tobera. Comúnmente, la ubicación de la onda de choque se prescribe en problemas para el estudiante ya que una solución de prueba y error es necesaria para localizar el choque. Cuando $p_r/p_0 = b$ la onda de choque normal está ubicada en el plano de salida de la tobera. Para una relación entre presiones menor que *b* pero mayor que *e*, se observan dos tipos de patrones de onda de choque oblicua, una con una onda de choque normal central, como se traza para $p_r/p_0 = c$, y una con sólo ondas oblicuas, como se traza para $p_r/p_0 = d$. Las relaciones entre presiones que resultan en ondas de choque oblicuas no se consideran aquí. A medida que nos movemos de *d* a *e*, las ondas de choque oblicuas se hacen cada vez más débiles hasta que el flujo isentrópico se materializa de nuevo en $p_r/p_0 = e$ con todas las ondas de choque ausentes. Para relaciones de presión debajo de *e* existe un flujo muy complicado. El flujo da vuelta en la esquina en la salida de la tobera de forma muy abrupta debido a las ondas de expansión (en la sección 9.8 vamos a considerar las ondas isentrópicas), luego regresa debido a las mismas ondas de expansión, resultando en un hinchamiento del flujo de escape, como es visible en motores de cohetes de gran altitud para satélites. Resolvamos algunos ejemplos para la tobera convergente-divergente; no se requieren nuevas ecuaciones.

CONCEPTO CLAVE *La ubicación de la onda de choque se prescribe en problemas para estudiantes.*

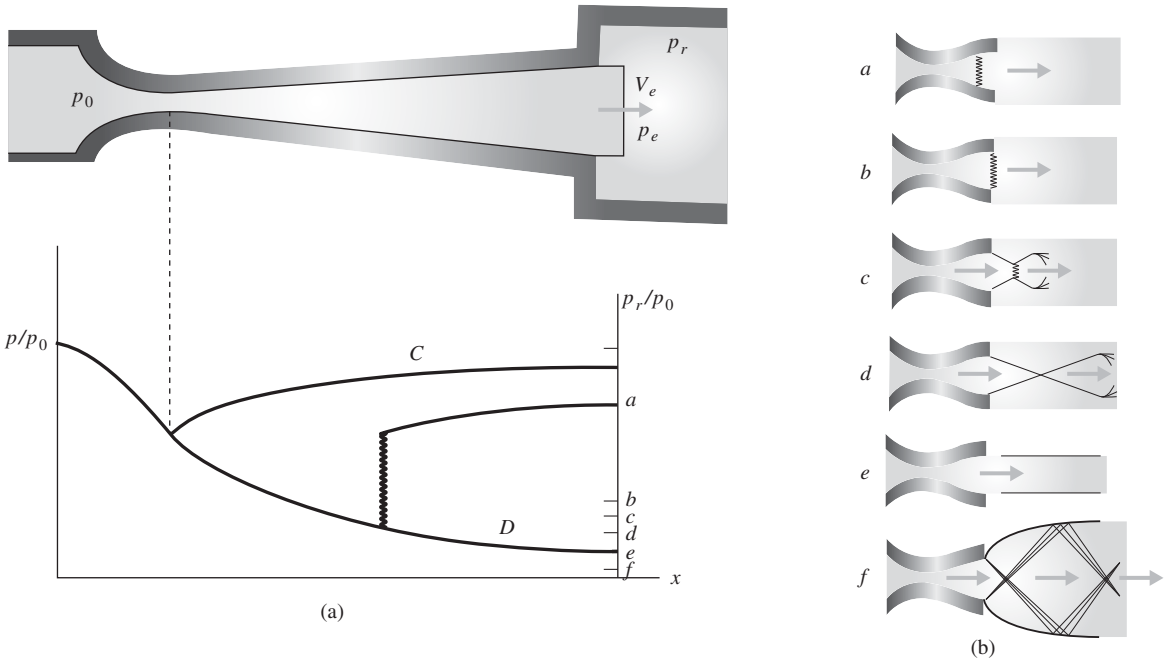


Fig. 9.12 Tobera convergente-divergente.

Ejemplo 9.7

Una tobera convergente-divergente tiene un diámetro de garganta de 5 cm y un diámetro de salida de 10 cm. El depósito es el laboratorio, mantenido en condiciones atmosféricas de 20 °C y a 90 kPa absoluta. Constantemente se bombea aire de un receptor de modo que existe una onda de choque normal a través del plano de salida de la tobera. Determine la presión en el receptor y el flujo másico.

Solución

Existe un flujo isentrópico del depósito, a la garganta, al plano de salida enfrente de la onda de choque normal en el estado 1. Ocurre un flujo supersónico corriente abajo de la garganta, haciendo que ésta sea el área crítica. Por tanto

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{10^2}{5^2} = 4$$

Una interpolación en la tabla para flujo isentrópico (tabla D.1) da

$$\mathrm{M}_1 = 2.94 \qquad \frac{p_1}{p_0} = 0.0298$$

De aquí que la presión enfrente del choque normal es

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \times 0.0298 \\ &= 90 \times 0.0298 = 2.68 \text{ kPa} \end{aligned}$$

De la tabla para choque normal (tabla D.2), usando $M_1 = 2.94$, encontramos que

$$\frac{p_2}{p_1} = 9.918$$
$$\therefore p_2 = 9.918 \times 2.68 = 26.6 \text{ kPa}$$

Ésta es la presión en el receptor necesaria para orientar el choque a través del plano de salida, como se muestra para $p_r/p_0 = b$ en la figura 9.12.

Para hallar el flujo másico a través de la tobera, sólo necesitamos considerar la garganta. Reconociendo que $M_t = 1$, de modo que $V_t = c_t$, podemos escribir

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t = \frac{p_t}{RT_t} A_t \sqrt{kRT_t} = p_t A_t \sqrt{\frac{k}{RT_t}}$$

La tabla para flujo isentrópico da

$$\frac{p_t}{p_0} = 0.5283 \qquad \frac{T_t}{T_0} = 0.8333$$

De aquí que el flujo másico es

$$\dot{m} = (0.5283 \times 90\,000) \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \sqrt{\frac{1.4}{287 \times (0.8333 \times 293)}}$$
$$= 0.417 \text{ kg/s}$$

Recuerde, la presión debe medirse en pascales en la ecuación anterior. Verifique las unidades para asegurarse que las unidades en $\dot{m}$ sean kg/s.

Ejemplo 9.8

Fluye aire desde un depósito a 20 ºC y 200 kPa absoluta a través de una garganta de 5 cm de diámetro y sale por una tobera de 10 cm de diámetro. Calcule la presión de salida p_e necesaria para ubicar una onda de choque normal en una posición donde el diámetro es de 7.5 cm.

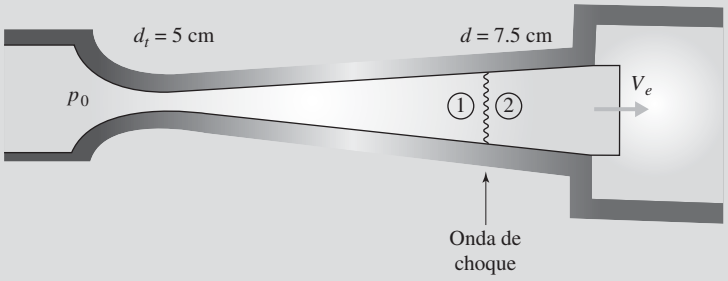


Fig. E9.8

Solución

Usaremos las tablas para gases para este flujo representado por la curva establecida por $p_r/p_0 = a$ en la figura 9.12. La garganta es un área crítica dado que para un flujo supersónico $M_t = 1$. La relación entre áreas es

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{7.5^2}{5^2} = 2.25$$

(*continúa*)

Para esta relación entre áreas encontramos, de la tabla D.1, que

$$M_1 = 2.33$$

Entonces de la tabla D.2, para este número de Mach, obtenemos

$$M_2 = 0.531 \qquad \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.570$$

La presión en el depósito es $p_0 = p_{01}$. Entonces

$$p_{02} = 0.570 \times 200 = 114 \text{ kPa}$$

El flujo isentrópico ocurre desde el estado 2 inmediatamente después de la onda de choque normal hasta la salida. Por tanto, para $M_2 = 0.531$, encontramos de la tabla D.1 que

$$\frac{A_2}{A^*} = 1.285$$

Si A_e es el área de salida, entonces

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{A_2}{A^*} \times \frac{A_e}{A_2} = 1.285 \times \frac{10^2}{7.5^2} = 2.284$$

El número de Mach y la relación entre presiones correspondientes para esta relación entre áreas son

$$M_e = 0.265 \qquad \frac{p_e}{p_{0e}} = 0.952$$

Para flujo isentrópico entre el choque y la salida, sabemos que $p_{02} = p_{0e}$; entonces

$$p_e = p_{02} \times 0.952 = 114 \times 0.952 = 109 \text{ kPa}$$

Observe la utilidad de la relación entre áreas críticas para obtener los resultados deseados.

Ejemplo 9.9

Una sonda Pitot, dispositivo empleado para medir la presión de estancamiento en un flujo, se inserta en una corriente de aire y mide 300 kPa absoluta, como se muestra en la figura E9.9. La presión en el flujo se mide que es de 75 kPa absoluta. Si la temperatura en el punto de estancamiento se mide igual a 150 ºC, determine la velocidad de corriente libre V.

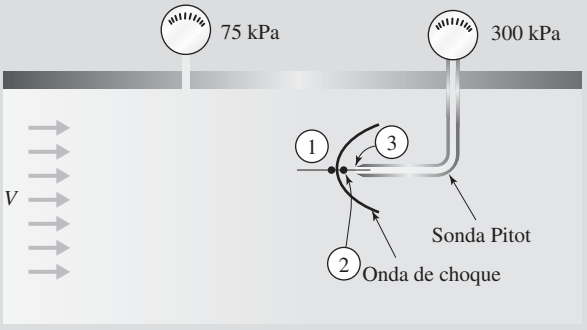


Fig. E9.9

Solución

Cuando un objeto despuntado se coloca en un flujo supersónico se forma una onda de choque desprendida alrededor del objeto, como lo hace alrededor del frente de la sonda Pitot mostrada. El flujo que converge en el frente de la sonda Pitot en el punto de estancamiento pasa a través de una onda de choque normal del estado 1 al estado 2; luego el flujo subsónico en el estado 2 desacelera en forma isentrópica al estado 3, el punto de estancamiento.

Para el flujo isentrópico del estado 2 al estado 3 podemos usar la ecuación 9.3.13,

$$\frac{p_3}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

A través del choque normal sabemos que (vea la ecuación 9.4.12)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}\,\mathrm{M}_1^2 - \frac{k-1}{k+1}$$

Además, los números de Mach están relacionados por la ecuación 9.4.11,

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{(k-1)\mathrm{M}_1^2 + 2}{2k\mathrm{M}_1^2 - k + 1}$$

Las tres ecuaciones anteriores pueden combinarse, con alguna manipulación algebraica, para obtener la *fórmula para tubo Pitot de Rayleigh* para flujos supersónicos, es decir,

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{\left(\dfrac{k+1}{2}\,\mathrm{M}_1^2\right)^{k/(k-1)}}{\left(\dfrac{2k\mathrm{M}_1^2}{k+1} - \dfrac{k-1}{k+1}\right)^{1/(k-1)}}$$

Sustituyendo $k = 1.4$, $p_3 = 300$ kPa, y $p_1 = 75$ kPa, tenemos

$$\frac{300}{75} = \frac{(1.2\mathrm{M}_1^2)^{3.5}}{(1.167\mathrm{M}_1^2 - 0.1667)^{2.5}}$$

La que puede resolverse mediante prueba y error para obtener

$$\mathrm{M}_1 = 1.65$$

(*continúa*)

El número de Mach, después del choque normal, se interpola en la tabla para choques y se obtiene

$$M_2 = 0.654$$

Usando la tabla para flujo isentrópico con este número de Mach, interpolamos la temperatura en el estado 2 y se tiene

$$T_2 = T_3 \times 0.921$$

$$= 423 \times 0.921 = 389.6 \text{ K}$$

La temperatura enfrente del choque normal se encuentra usando la tabla para choques normales como sigue:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1.423$$

$$\therefore T_1 = \frac{T_2}{1.423} = 274 \text{ K}$$

Por último, la velocidad antes del choque normal está dada por

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1}$$

$$= 1.65 \sqrt{1.4 \times 287 \times 274} = 547 \text{ m/s}$$

9.6 FLUJO DE VAPOR A TRAVÉS DE UNA TOBERA

El flujo de vapor a través de una tobera constituye un problema de ingeniería muy importante. En plantas generadoras de energía eléctrica fluye vapor a alta presión por las toberas de turbinas; en esta sección presentamos la técnica para analizar ese problema. Recordamos, sin embargo, que el vapor que no está sustancialmente sobrecalentado no se comporta muy bien como un gas ideal; las tablas de vapor deben consultarse puesto que c_p y c_v no pueden suponerse constantes. Considere el problema de un vapor sobrecalentado que entra en la tobera de la figura 9.12. El flujo sería isentrópico a menos que se encontrara una onda de choque y la expansión sería como se esboza en el diagrama *T-s* de la figura 9.13. Suponga que el flujo se inicia en un depósito con condiciones de estancamiento, fluye a través de una garganta indicada por el estado *t*, y sale por una sección divergente hacia la salida en el estado *e*.

Observe que muy probablemente el estado de salida podría estar en la región de calidad con la posibilidad de condensación de gotitas de líquido; no obstante, para velocidades de flujo lo suficientemente altas puede que haya un tiempo suficiente para la formación de las gotitas y del proceso asociado de transferencia de calor. Esto produce una situación llamada *supersaturación* y existe una condición de *equilibrio metaestable;* esto es, el estado de no equilibrio *e* se alcanza en lugar del estado de equilibrio *e′*. Para estimar la temperatura del estado metaestable *e*, suponemos

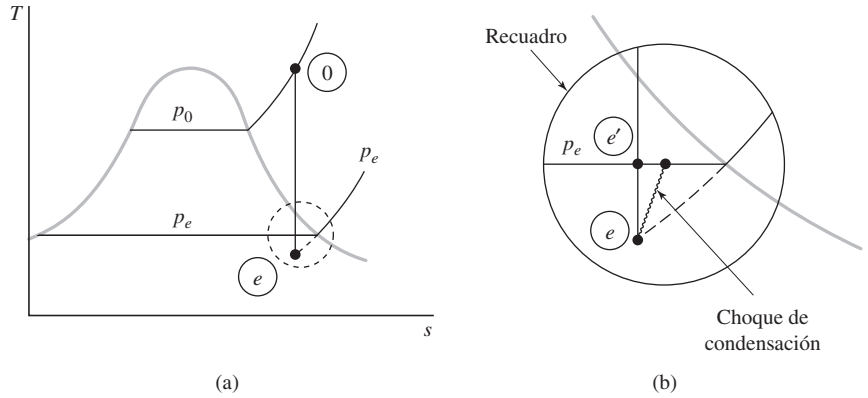


Fig. 9.13 Expansión isentrópica de un vapor.

que el vapor se comporta como un gas ideal, de manera que $Tp^{k/(k-1)} =$ constante. Si el estado de salida está lo suficientemente alejado en la región de calidad, se experimentará un *choque de condensación*, fenómeno no considerado en este libro.

Debido a la supersaturación es posible modelar el flujo isentrópico de un vapor a través de una tobera, con precisión aceptable, si se considera que la relación entre calores específicos es constante. Para vapor $k = 1.3$ da resultados aceptables en un intervalo considerable de temperaturas. La relación entre presiones críticas dada por la ecuación 9.3.14 para vapor se convierte en

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0.546 \tag{9.6.1}$$

Si vapor saturado entra en la tobera, se formarán algunas gotitas de líquido que serán arrastradas por el vapor; siempre que no exista una condensación de choque, una buena aproximación para la relación entre presiones críticas es 0.577 correspondiente a $k = 1.14$.

Ejemplo 9.10

Se ha de expande vapor en forma isentrópica a partir de condiciones en un depósito a 300 ºC y 800 kPa absoluta a una condición de salida de 100 kPa absoluta. Si se desea tener un flujo supersónico, calcule los diámetros necesarios de garganta y de salida si se requiere un flujo másico de 2 kg/s.

Solución

De las tablas de vapor (que se encuentran en cualquier libro de texto de termodinámica) encontramos que

$$s_0 = s_e = 7.2336 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$
$$h_0 = 3056.4 \text{ kJ/kg}$$

Para estimar la temperatura del estado metaestable de salida, usamos

$$T_e = T_0\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{(k-1)/k} = 593\left(\frac{100}{800}\right)^{0.3/1.3} = 367 \text{ K} \quad \text{o} \quad 94 \text{ °C}$$

(*continúa*)

Usando las tablas de vapor con esta temperatura, interpolamos, usando la calidad de salida x_e, para hallar que

$$7.2336 = 1.239 + 6.90x_e$$
$$\therefore x_e = 0.968$$

Entonces tenemos que la entalpía y el volumen específico a la salida son:

$$h_e = 394 + 0.968 \times 2273 = 2594 \text{ kJ/kg}$$
$$v_e = 0.001 + 0.968 \times (2.06 - 0.001) = 1.99 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Usando la ecuación de energía, la velocidad de salida se estima como sigue:

$$\frac{V_0^{2\,\nearrow^0}}{2} + h_0 = \frac{V_e^2}{2} + h_e$$
$$\therefore V_e = \sqrt{2(h_0 - h_e)} = \sqrt{2(3056 - 2594) \times 1000} = 961 \text{ m/s}$$

donde al multiplicar por 1000 convierte kJ en J. De la definición de flujo másico tenemos

$$m_e = \rho_e A_e V_e$$
$$2 = \frac{1}{1.99} \times \frac{\pi d_e^2}{4} \times 961$$
$$\therefore d_e = 0.0726 \text{ m} \quad \text{o} \quad 7.26 \text{ cm}$$

Para determinar el diámetro de la garganta, reconocemos que ésta es el área crítica; entonces la ecuación 9.6.1 da

$$p^* = 0.546\, p_0 = 437 \text{ kPa}$$

Usando esta presión y $s^* = s_0 = 7.2336$ kJ/kg·K podríamos usar las tablas de vapor para hallar h^* y v^*; la ecuación de energía nos permitiría entonces hallar V^* y por tanto d_t. No obstante, una técnica más simple, aproximada, que supone calores específicos constantes, es usar la ecuación 9.3.18 con $k = 1.3$ y obtenemos lo siguiente:

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{1.3}{RT_0}} \left(\frac{2.3}{2}\right)^{2.3/-0.6}$$
$$2 = 800\,000 \frac{\pi d_t^2}{4} \sqrt{\frac{1.3}{462 \times 573}} \times 0.585$$
$$\therefore d_t = 0.049 \text{ m} \quad \text{o} \quad 4.9 \text{ cm}$$

Esto es razonable porque ya hemos supuesto calores específicos constantes en la T_e precedente. Obviamente, lo anterior es aproximado; usando $k = 1.3$ da predicciones razonables.

9.7 ONDA DE CHOQUE OBLICUA

En esta sección investigamos la onda de choque oblicua, una onda de amplitud finita que no es normal al flujo de entrada. El flujo que se aproxima a una onda de choque oblicua se supondrá que está en la dirección x. Después de la onda oblicua

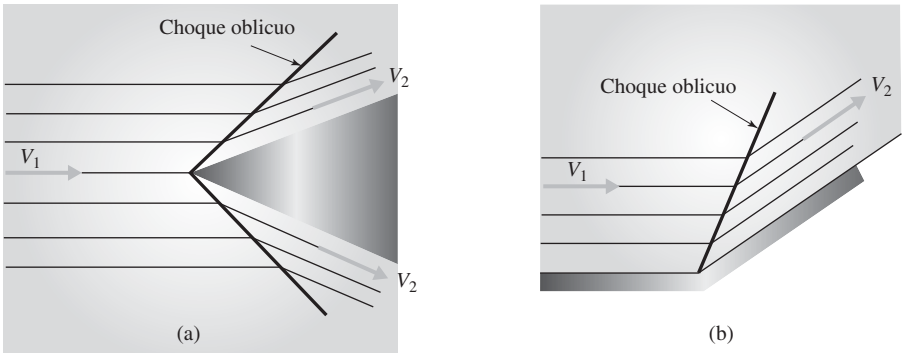


Fig. 9.14 Ondas de choque oblicuas en un flujo supersónico: (a) flujo sobre una cuña simétrica; (b) flujo en una esquina.

el vector velocidad tendrá una componente normal a la dirección del flujo. Continuaremos suponiendo que el flujo antes y después del choque oblicuo es uniforme y permanente.

Las ondas de choque oblicuas se forman en el borde de ataque de una superficie supersónica o en una esquina abrupta, como se muestra en la figura 9.14. Las ondas de choque oblicuas también se pueden hallar en cuerpos axisimétricos tales como un cono de nariz o en una bala que se desplaza a velocidades supersónicas. En este libro, consideramos sólo flujos planos.

La función de la onda de choque oblicua es virar el flujo de modo que el vector velocidad $\mathbf{V}_2$ es paralelo a la pared del plano. El ángulo entre los dos vectores velocidad introduce otra variable en nuestro análisis. El problema permanece teniendo solución, no obstante, con la ecuación adicional de la cantidad de movimiento tangencial.

CONCEPTO CLAVE *La onda de choque oblicua hace virar el flujo de modo que el vector velocidad es paralelo a la pared del plano.*

Para analizar la onda de choque oblicua, considere un volumen de control que envuelve una parte de la onda como se muestra en la figura 9.15. El vector velocidad corriente arriba se supone que es sólo en la dirección x; la onda de choque oblicua forma un ángulo β con el vector velocidad corriente arriba y hace virar el flujo a través del *ángulo de deflexión* o *ángulo de cuña* θ de modo que V_2 es paralela a la pared. Las componentes de los vectores velocidad se muestran normales y tangenciales a la onda de choque oblicua. Las componentes tangenciales no causan que el fluido fluya a través del choque; de aquí que la ecuación de continuidad, con $A_1 = A_2$, da

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \tag{9.7.1}$$

donde las componentes normales V_{1n} y V_{2n} se muestran en la figura 9.15. Las fuerzas de presión actúan normales al choque oblicuo y no producen componentes tangenciales. Entonces la ecuación de la cantidad de movimiento expresada en la dirección tangencial requiere que la cantidad de movimiento tangencial hacia el volumen de control sea igual a la cantidad de movimiento tangencial que sale del volumen de control; esto es,

$$\dot{m}_1 V_{1t} = \dot{m}_2 V_{2t} \tag{9.7.2}$$

o bien, usando $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$, se requiere que

$$V_{1t} = V_{2t} \tag{9.7.3}$$

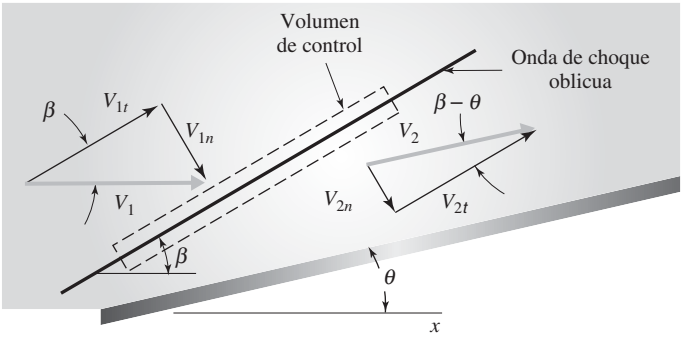


Fig. 9.15 Volumen de control que envuelve una pequeña parte de una onda de choque oblicua.

La ecuación de la cantidad de movimiento normal toma la forma

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{2n}^2 - \rho_1 V_{1n}^2 \tag{9.7.4}$$

La ecuación de energía, usando $V^2 = V_n^2 + V_t^2$, puede escribirse como

$$\frac{V_{1n}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{2n}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{9.7.5}$$

CONCEPTO CLAVE *Las componentes tangenciales de los dos vectores velocidad no entran en las ecuaciones.*

donde los términos de la componente tangencial se han cancelado en ambos lados. Observe que las componentes tangenciales de los dos vectores velocidad no entran en las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento normal o de la energía, las tres ecuaciones empleadas en la solución de la onda de choque normal. De aquí que podamos sustituir V_{1n} y V_{2n} por V_1 y V_2, respectivamente, en las ecuaciones de onda de choque normal y obtener una solución. Pueden usarse ya sea las ecuaciones de onda de choque normal o la tabla de onda para choques normales (tabla D.2). También sustituimos M_1 y M_2 por M_{1n} y M_{2n}, respectivamente.

Es útil relacionar el ángulo de choque oblicuo β con el ángulo de deflexión θ. Usando la ecuación de continuidad (9.7.1), con referencia a la figura 9.15, resulta

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{V_{1t}\tan\beta}{V_{2t}\tan(\beta-\theta)} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\theta)} \tag{9.7.6}$$

De las ecuaciones de onda de choque normal (9.4.12) y (9.4.13) podemos hallar que la relación entre densidades es

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{(k+1)\mathrm{M}_{1n}^2}{(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2 + 2} \tag{9.7.7}$$

Sustituyéndola en la ecuación 9.7.6 tendremos

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{\tan \beta}{k + 1}\left[k - 1 + \frac{2}{\mathrm{M}_1^2 \operatorname{sen}^2 \beta}\right] \tag{9.7.8}$$

Para un flujo con un número de Mach M_1 determinado, esta ecuación relaciona el ángulo de choque oblicuo β con el ángulo de cuña o esquina θ. Es frecuente que las tres variables β, θ y M_1 de esta última ecuación se grafiquen como en la figura 9.16. Podemos observar varios fenómenos al estudiar la figura.

- Para un número de Mach M_1 especificado corriente arriba y un determinado ángulo de cuña θ existen dos posibles ángulos de choque oblicuos β, el mayor de ellos corresponde a un choque "fuerte" y el menor corresponde a un choque "débil".
- Para un determinado ángulo de cuña θ existe un número de Mach mínimo para el que existe sólo un ángulo de choque oblicuo β.
- Para un determinado ángulo de cuña θ, si M_1 es menor que el mínimo para esa curva en particular, no existe una onda de choque oblicua y la onda de choque se separa, como se muestra en la figura 9.17. Además, para un M_1 determinado existe un ángulo θ lo suficientemente grande que resultará en una onda de choque separada.

El aumento de presión a través de la onda de choque oblicua determina si se presenta un choque débil o un choque fuerte. Para un aumento relativamente pequeño de presión se presentará un choque débil con $\mathrm{M}_2 > 1$. Si el aumento de presión es relativamente grande se presenta un choque fuerte con $\mathrm{M}_2 < 1$. Observe que para los choques separados alrededor de cuerpos existe un choque normal para la línea de corriente de estancamiento; éste es seguido lejos del punto de estancamiento por un choque oblicuo fuerte, luego por un choque oblicuo débil y, con el tiempo, por una onda de Mach. Para cuerpos despuntados que se mueven a velocidades supersónicas la onda de choque siempre está separada.

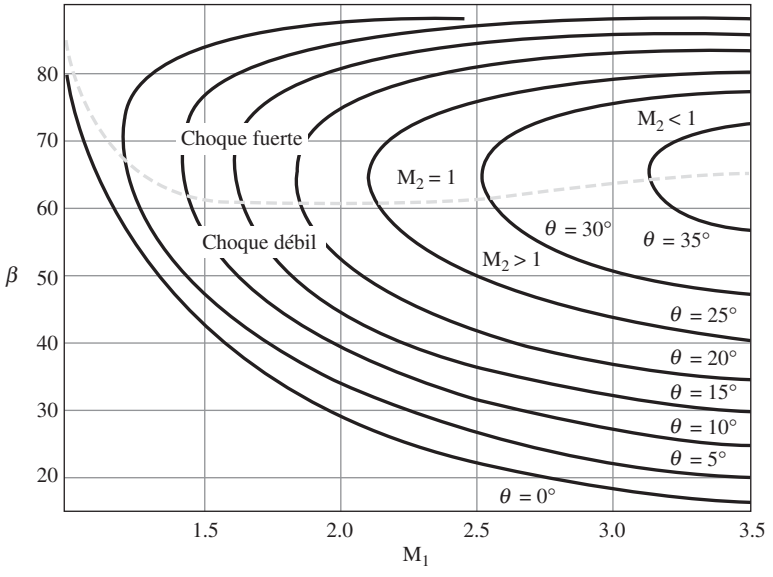


Fig. 9.16 Relaciones de onda de choque oblicua para $k = 1.4$.

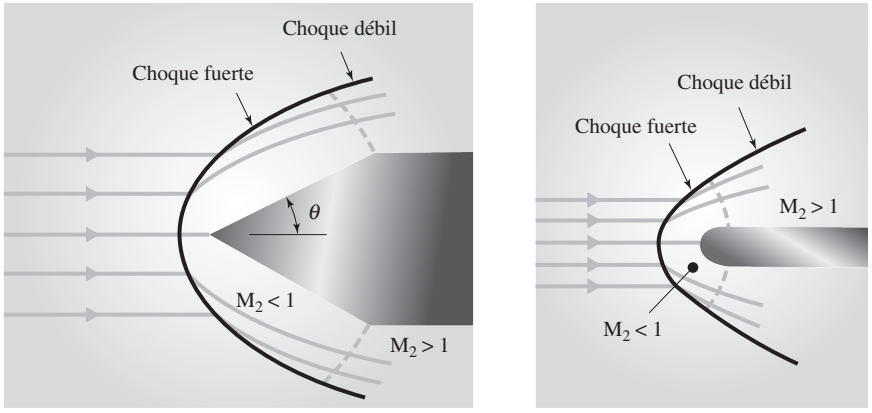


Fig. 9.17 Ondas de choque separadas: (a) flujo alrededor de una cuña; (b) flujo alrededor de un objeto despuntado.

Ejemplo 9.11

Fluye aire sobre una cuña con $M_1 = 3$, como se muestra en la figura E9.11. Un choque débil se refleja de la pared. Determine los valores de M_3 y β_3 para la onda reflejada.

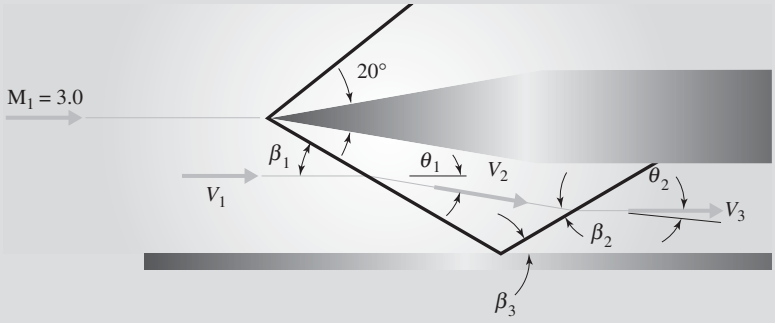


Fig. E9.11

Solución

De la figura 9.16 con $\theta_1 = 10°$ y $M_1 = 3.0$, encontramos para el choque débil que $\beta_1 = 27.5°$. Esto da

$$M_{1n} = 3 \text{ sen } 27.5° = 1.39$$

De la tabla para choques interpolamos para hallar

$$M_{2n} = 0.744 = M_2 \text{ sen}(27.5° - 10°)$$

$$\therefore M_2 = 2.48$$

El choque reflejado debe otra vez hacer virar el flujo un ángulo de 10º, es decir, $\theta_2 = 10°$. Para este ángulo de cuña y $M_2 = 2.48$ de la figura 9.16 para un choque débil, vemos que $\beta_2 = 33°$. Esto resulta en

$$M_{2n} = 2.48 \text{ sen } 33° = 1.35$$

De la tabla para choques

$$M_{3n} = 0.762 = M_3 \text{ sen } 23°$$
$$\therefore M_3 = 1.95$$

Se calcula que el ángulo deseado es

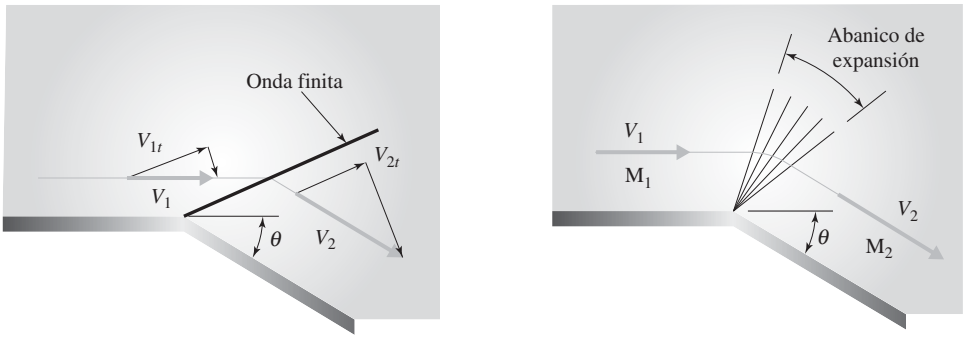
$$\beta_3 = \beta_2 - 10° = 23°$$

Observe que la figura 9.16 no permite realizar cálculos precisos. La ecuación 9.7.8 podría usarse, mediante prueba y error, para mejorar la precisión de los ángulos β y por tanto de las cantidades que siguen.

9.8 ONDAS ISENTRÓPICAS DE EXPANSIÓN

En esta sección consideramos el flujo supersónico alrededor de una esquina convexa, como se muestra en la figura 9.18. Tratemos primero de crear este flujo con la onda de amplitud finita de la figura 9.18a. El flujo debe girar el ángulo θ de modo que V_2 sea paralela a la pared. La componente tangencial debe conservarse debido a la conservación de la cantidad de movimiento. Esto resultaría en que $V_2 > V_1$, como es obvio a partir del diagrama. Ésta sería la situación si un flujo subsónico, $M_{1n} < 1$, pudiera experimentar un aumento finito hasta un flujo supersónico, $M_{2n} > 1$. Esto, por supuesto, es imposible debido a la segunda ley, como se observa en la explicación asociada con la figura 9.10. En consecuencia, consideramos como una imposibilidad el giro de un flujo alrededor de una esquina convexa usando una onda finita.

Considere un segundo mecanismo posible que permitiría que el flujo girara en la esquina, un abanico compuesto de un número infinito de ondas de Mach, que



(a) Onda finita única (b) Número infinito de ondas de Mach

Fig. 9.18 Flujo supersónico alrededor de una esquina convexa.

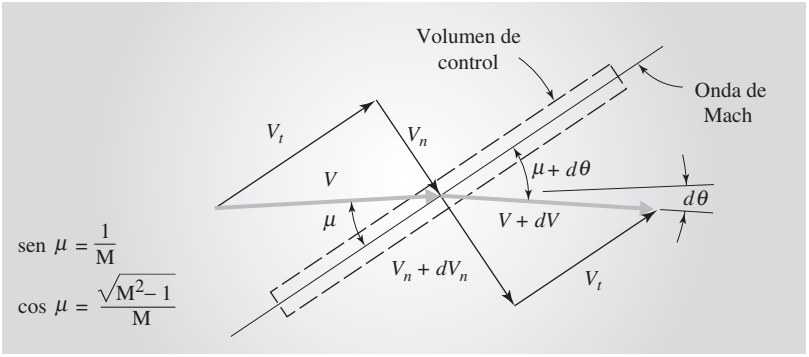


Fig. 9.19 Onda de Mach individual.

emanan de la esquina, como se muestra en la figura 9.18b. La segunda ley no sería violada con tal mecanismo puesto que cada onda de Mach es una onda isentrópica. Determinaremos el efecto de una onda de Mach individual sobre el flujo y luego integraremos para obtener el efecto total. La figura 9.19 muestra el cambio infinitesimal de velocidad debido a una onda de Mach individual. Para el volumen de control que envuelve a la onda de Mach, sabemos que se conserva la cantidad de movimiento tangencial; entonces la componente tangencial de la velocidad permanece sin cambio como se muestra, como en la onda de choque oblicua. De los triángulos de la figura podemos escribir

$$V_t = V \cos \mu = (V + dV) \cos(\mu + d\theta) \tag{9.8.1}$$

Como $d\theta$ es pequeña, esto se convierte[1] usando $\cos(\mu + d\theta) = \cos \mu - d\theta \operatorname{sen} \mu$, en

$$V \operatorname{sen} \mu \, d\theta = \cos \mu \, dV \tag{9.8.2}$$

Sustituyendo sen $\mu = 1/\mathrm{M}$ (vea la ecuación 9.2.13) y $\cos \mu = (\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1})/\mathrm{M}$, tenemos

$$d\theta = \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1} \, \frac{dV}{V} \tag{9.8.3}$$

La relación $V = \mathrm{M} \sqrt{kRT}$ puede derivarse y reacomodarse para obtener

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \tag{9.8.4}$$

La ecuación de energía, en la forma $\frac{1}{2} V^2 + kRT/(k - 1) = \text{constante}$, también puede derivarse para obtener

$$\frac{dV}{V} + \frac{1}{(k - 1)\mathrm{M}^2} \frac{dT}{T} = 0 \tag{9.8.5}$$

[1]Recordemos la identidad trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$. Entonces usando $d\theta = 1$ y sen $d\theta = d\theta$, tenemos $\cos(\mu + d\theta) = \cos \mu - d\theta \operatorname{sen} \mu$.

Eliminando dT/T al combinar las dos ecuaciones precedentes, resulta

$$\frac{dV}{V} = \frac{2}{2 + (k-1)\mathrm{M}^2}\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} \tag{9.8.6}$$

La cual puede sustituirse en la ecuación 9.8.3, permitiendo obtener una relación entre θ y M. Y tenemos

$$d\theta = \frac{2\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}}{2 + (k-1)\mathrm{M}^2}\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} \tag{9.8.7}$$

Esto puede integrarse, usando $\theta = 0$ y M = 1, para obtener una relación entre el número de Mach resultante (M_2 en la figura 9.18) y el ángulo, siempre que el número de Mach entrante sea la unidad; la relación es

$$\theta = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2} \tan^{-1}\left[\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{M}^2 - 1)\right]^{1/2} - \tan^{-1}(\mathrm{M}^2 - 1)^{1/2} \tag{9.8.8}$$

El ángulo θ, que es una función de M, es la **función de Prandtl-Meyer** y está tabulado para $k = 1.4$ en la tabla D.3 de modo que las soluciones mediante prueba y error para la ecuación 9.8.8 para M no son necesarias. Otros cambios que puedan desearse, por ejemplo cambios de presión o temperatura, pueden hallarse a partir de las ecuaciones de flujo isentrópico. El conjunto de ondas de Mach que hacen virar al flujo se conoce como *abanico de expansión.*

Función de Prandtl-Meyer: *Es el ángulo θ de giro del flujo supersónico.*

Veremos, al resolver ejemplos y problemas, que el número de Mach y la velocidad aumentan cuando un flujo supersónico da vuelta en una esquina convexa. El flujo permanece adherido a la pared cuando da vuelta en una esquina, incluso a ángulos grandes, fenómeno no observado en un flujo subsónico; un flujo subsónico se separaría de la esquina abrupta, incluso a ángulos pequeños.

CONCEPTO CLAVE *El flujo permanece adherido a la pared cuando da vuelta a la esquina, incluso para ángulos grandes.*

Si sustituimos M = ∞ en la ecuación 9.8.8, encontramos que el ángulo de viraje máximo es $\theta = 130.5°$. Esto significaría que la temperatura y presión serían de cero absoluto; obviamente, el gas se convertiría en líquido antes que esto fuera posible. El ángulo de 130.5° es, no obstante, un límite superior. El punto es que ángulos de viraje muy grandes son posibles en flujos supersónicos, ángulos que pueden exceder 90°, un resultado sorprendente. Esto introduce una restricción de diseño en la tobera de escape de motores de cohetes que descargan los gases de la combustión hacia el vacío del espacio; los gases de la combustión pueden virar un cierto ángulo de modo que ocurriría una incidencia sobre el cuerpo de la nave espacial si no está diseñada apropiadamente.

CONCEPTO CLAVE *En flujos supersónicos son posibles ángulos de giro muy grandes.*

Ejemplo 9.12

Aire a un número de Mach de 2.0 y a una temperatura y presión de 500 ºC y 200 kPa absoluta, respectivamente, fluye alrededor de una esquina con un ángulo convexo de 20º (figura E9.12). Encuentre M_2, p_2, T_2 y V_2.

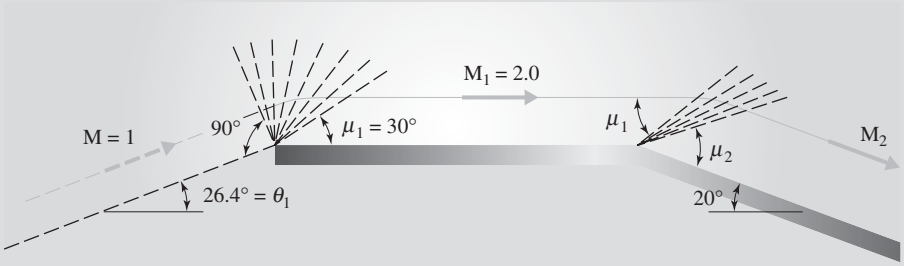


Fig. E9.12

Solución

La tabla D.3 usa M = 1 como condición de referencia; así, visualizamos el flujo como que se origina de un flujo con M = 1 y que vira un ángulo θ_1 hasta $M_1 = 2$, como se muestra en el diagrama. De la tabla, sumando un ángulo adicional de 20º al ángulo de deflexión, encontramos que $\theta_2 = 46.4º$. Esto sería equivalente al flujo en M = 1 dando vuelta a una esquina convexa con $\theta = 46.4º$. Como el flujo es isentrópico, podemos simplemente superponer de esta forma. Ahora, para un ángulo $\theta = 46.4º$ obtenido de la tabla, encontramos que

$$M_2 = 2.83$$

De la tabla para flujo isentrópico (tabla D.1) encontramos que

$$p_2 = p_1 \frac{p_0}{p_1}\frac{p_2}{p_0}$$

$$= 200 \times \frac{1}{0.1278} \times 0.0352 = 55.1 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_0}{T_1}\frac{T_2}{T_0}$$

$$= 773 \times \frac{1}{0.5556} \times 0.3844 = 534.8 \text{ K} \quad \text{o} \quad 261.8 \text{ °C}$$

Se encuentra que la velocidad V_2 es

$$V_2 = M_2 \sqrt{kRT_2}$$

$$= 2.83 \sqrt{1.4 \times 287 \times 534.8} = 1312 \text{ m/s}$$

9.9 RESUMEN

La zona de silencio de un objeto supersónico que produce sólo ondas de Mach existe fuera de un cono con ángulo α incluido que se encuentra con

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\mathrm{M}} \tag{9.9.1}$$

donde el número de Mach es $\mathrm{M} = V/c$ y $c = \sqrt{kRT}$.

La relación

$$\frac{dV}{V}(\mathrm{M}^2 - 1) = \frac{dA}{A} \tag{9.9.2}$$

nos permite predecir cómo se comportan los flujos subsónicos y supersónicos en toberas convergentes y divergentes. El flujo másico a través de una tobera con área de garganta A^* donde $\mathrm{M}^* = 1$ está dado por

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/2(1-k)} \tag{9.9.3}$$

donde p_0 y T_0 son las condiciones en el depósito. La temperatura, presión y velocidad en un flujo isentrópico se encuentran con

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{k/(k-1)}, \quad \frac{V^2}{2} = c_p(T_0 - T) \tag{9.9.4}$$

Las variables del flujo a través de un choque normal se encuentran de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2, \qquad p_1 - p_2 = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1),$$
$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = 0 \tag{9.9.5}$$

En lugar de resolver las ecuaciones previas, con frecuencia usamos la tabla D.2 para el flujo de choque normal.

A través de un choque oblicuo, la componente tangencial de la velocidad no cambia. La componente normal de la velocidad V_n simplemente sustituye a la velocidad V en las ecuaciones de onda de choque normal previas, y la tabla D.2 puede usarse con M_n sustituyendo a M. El ángulo de cuña θ a través del cual vira el flujo está relacionado con el ángulo de choque oblicuo β por

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{\tan\beta}{k+1}\left[k - 1 + \frac{2}{\mathrm{M}_1^2 \operatorname{sen}^2\beta}\right] \tag{9.9.6}$$

o puede consultarse la figura 9.16 para evitar una solución de prueba y error si se desea β.

En una onda de expansión, el ángulo θ a través del cual un flujo con M = 1 puede virar es la función de Prandtl-Meyer:

$$\theta = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2} \tan^{-1}\left[\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{M}^2-1)\right]^{1/2} - \tan^{-1}(\mathrm{M}^2-1)^{1/2} \qquad (9.9.7)$$

Si conocemos θ y buscamos M, se requiere de una solución de prueba y error. Esto se evita consultando la tabla D.3.

PROBLEMAS

9.1 En termodinámica c_p para aire se usa con frecuencia como 0.24 Btu/lbm-ºR. De la tabla B.4 c_p es 6012 ft-lb/slug-ºR. Demuestre que estos dos valores son iguales. Además, calcule c_v en ambos conjuntos de unidades. (*Nota:* El valor de c_p que se usa en termodinámica y en mecánica de fluidos es el mismo cuando se usa el SI).

9.2 Demuestre que $c_p = Rk/(k-1)$.

9.3 Demuestre que las ecuaciones 9.1.10 se derivan de las ecuaciones 9.1.9 y 9.1.7.

9.4 Verifique las diversas formas de la ecuación de energía en las ecuaciones 9.1.3, 9.1.4 y 9.1.5.

Velocidad del sonido

9.5 Demuestre que al ecuación 9.2.8 se deriva de la ecuación 9.2.7.

9.6 Demuestre que la velocidad del sonido en una onda de alta frecuencia (por ejemplo la producida con un silbato para perros) se desplaza con una velocidad $c = \sqrt{RT}$ si se supone que el proceso es isotérmico.

9.7 Demuestre que para una pequeña perturbación adiabática en un flujo permanente, la ecuación de energía toma la forma $\Delta h = -c\,\Delta V$.

9.8 Verifique que la velocidad de propagación de una pequeña onda a través de agua es de alrededor de 1450 m/s.

9.9 Se hacen chocar entre sí dos rocas en la orilla de un lago. Un observador en el otro lado con la cabeza bajo el agua "escucha" la perturbación 0.6 s después. ¿Cuál es la distancia de un lado al otro del lago?

9.10 Usted y su amigo están de pie a 10 m entre sí en agua que les llega a la cintura. Usted hace chocar entre sí dos rocas bajo el agua. Después de que las rocas se hacen chocar, ¿cuánto tiempo tardará su amigo en escuchar la interacción si él tiene la cabeza bajo el agua?

9.11 Calcule el número de Mach para un avión si está volando :

(a) Al nivel del mar a 200 m/s

(b) a 15 000 ft a 600 fps

(c) a 10 000 m a 200 m/s

(d) a 60 000 ft a 600 fps

(e) a 35 000 m a 200 m/s

9.12 Un leñador está cortando madera a una cierta distancia. Usted observa con cuidado, usando su cronómetro numérico de pulsera, que toma 1.21 s para que el sonido del hacha llegue a sus oídos. Calcule la distancia entre usted y el leñador si la temperatura es –10 ºC.

9.13 Usted ve un rayo y 2 s después escucha el sonido del trueno. ¿A qué distancia cayó el rayo? Use:

(a) Unidades SI

(b) Unidades inglesas

9.14 Un proyectil de nariz de aguja pasa sobre una persona en un campo militar de pruebas a una velocidad de 1000 m/s (figura P9.14). La persona sabe que el proyectil tiene una elevación de 1000 m donde T = –10 ºC. ¿Cuánto tiempo transcurre para que se escuche el sonido después de que el proyectil pasa por encima de la persona? ¿A qué distancia estará? Calcule su número de Mach.

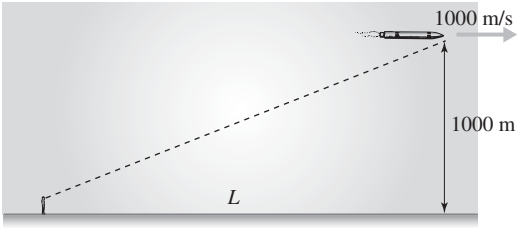


Fig. P9.14

9.15 Una cámara especial puede mostrar el ángulo de Mach de una bala puntiaguda que pasa por la sección de prueba de un túnel de viento. Si se mide que el ángulo de Mach es de 22º, calcule la velocidad de la bala en:

(a) m/s

(b) ft/s

Suponga condiciones estándar.

9.16 Una onda de pequeña amplitud pasa a través de la atmósfera estándar al nivel del mar con un aumento de presión de 0.3 psf. Estime la velocidad inducida asociada y el aumento de temperatura.

Flujo isentrópico

9.17 Proporcione todos los pasos necesarios para continuar de la:

(a) La ecuación 9.3.2 a la ecuación 9.3.3

(b) La ecuación 9.3.5 a la ecuación 9.3.10

(c) La ecuación 9.3.11 a la ecuación 9.3.12

(d) La ecuación 9.3.16 a la ecuación 9.3.18

(e) La ecuación 9.3.17 a la ecuación 9.3.19

9.18 Una sonda de Pitot, un instrumento que mide la presión de estancamiento, se utiliza para determinar la velocidad de un avión. La sonda, instalada en un avión, mide 10 kPa. Determine la velocidad del avión si está volando a una altitud de:

(a) 3000 m

(b) 10 000 m

Suponga un proceso isoentrópico desde la corriente libre hasta el punto de estancamiento.

9.19 Una sonda Pitot, utilizada para medir la presión de estancamiento, indica una presión de 4 kPa en la nariz de un vehículo de superficie que se desplaza en aire atmosférico a 15 ºC. Calcule su velocidad suponiendo:

(a) Flujo isentrópico

(b) Flujo incompresible

Calcule el porcentaje de error en el inciso (b).

9.20 Una tobera convergente con un diámetro de salida de 2 cm está conectada a un depósito que se conserva a 25 ºC y 200 kPa absoluta. Usando sólo ecuaciones, determine el flujo másico de aire si la presión en el depósito es:

(a) 100 kPa absoluta

(b) 130 kPa absoluta

9.21 La tobera convergente de la figura P9.21 está conectada a un depósito que se mantiene a 70 ºF y 30 psia. Usando sólo ecuaciones, determine el flujo másico de aire si la presión del depósito es:

(a) 15 psia

(b) 20 psia

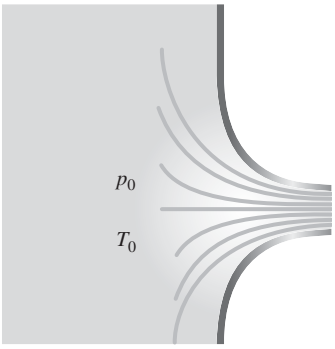


Fig. P9.21

9.22 Resuelva de nuevo el problema 9.20 usando la tabla para flujo isentrópico.

9.23 Resuelva de nuevo el problema 9.21 usando la tabla para flujo isentrópico.

9.24 De un depósito ($T_0 = 30$ ºC, $p_0 = 400$ kPa absolutos) fluye aire a través de una tobera convergente con diámetro de salida de 10 cm. ¿Qué presión de salida resultaría precisamente en $M_e = 1$? Determine el flujo másico para esta condición. Use la tabla para flujo isentrópico.

9.25 De una tobera convergente conectada a un depósito con $T_0 = 10$ ºC fluye aire. ¿Qué presión en el depósito es necesaria para hacer precisamente que $M_e = 1$ si la tobera de 6 cm de diámetro tiene salida hacia la presión atmosférica? Calcule el flujo másico para esta condición.

9.26 De una tobera convergente conectada a un depósito con $T_0 = 40$ ºF fluye aire. Si la tobera de 2.5 cm de diámetro tiene salida hacia la presión atmosférica, ¿qué presión en el depósito es necesaria para hacer precisamente que $M_e = 1$? Calcule el flujo másico para esta condición. Ahora duplique la presión en el depósito y determine el flujo másico aumentado.

9.27 Una línea de aire de 25 cm de diámetro está presurizada a 500 kPa absoluta y de pronto se revienta (figura

P9.27). El área de salida se mide después y se determina que es de 30 cm^2. Si transcurrieron 6 minutos antes de cerrar la válvula de aire a 10 ºC, estime los metros cúbicos de aire que se perdieron.

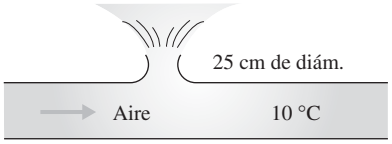


Fig. P9.27

9.28 Una tobera convergente está conectada a un depósito que contiene helio con $T_0 = 27$ ºC y $p_0 = 200$ kPa absoluta. Determine la presión en el receptor que dará precisamente $M_e = 1$. Ahora conecte una sección divergente con una salida de 15 cm de diámetro a la garganta de 6 cm de diámetro. ¿Cuál es la presión máxima en el depósito que dará $M_t = 1$?

9.29 Se utiliza un tubo Venturi para medir el flujo másico de aire en un tubo al reducir el diámetro de 10 cm a 5 cm y de nuevo se aumenta a 10 cm. La presión en la entrada es de 300 kPa y en la sección de diámetro mínimo es 240 kPa. Si la temperatura corriente arriba es de 20 ºC, determine el flujo másico.

9.30 Entra aire a una tobera convergente-divergente desde un depósito a 200 kPa (manométrica) y 22 ºC, el área en la garganta es 9.7 cm^2 y a la salida es de 13 cm^2. Considerando flujo isentrópico en todo el sistema con M = 1 en la garganta, determine la velocidad del aire a la salida de la tobera.

9.31 Considere el flujo a través de la tobera del problema 9.30, pero en este caso el número de Mach en la garganta es 0.72. Determine la velocidad a la salida de la tobera para la condición dada.

9.32 Se desea calcular el flujo másico de aire que fluye a través del tubo de la figura P9.32. El diámetro del tubo se reduce de 4 pulgadas a 2 pulgadas y de nuevo se aumenta a 4 pulgadas. La presión en la entrada es de 45 psi y en la sección de diámetro mínimo es de 36 psi. Si la temperatura corriente arriba es 60 ºF, determine el flujo másico.

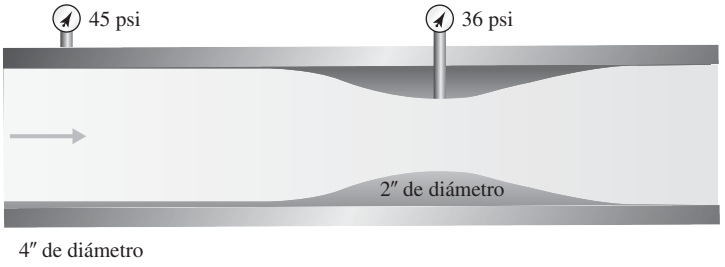


Fig. P9.32

9.33 De un depósito que se mantiene a 30 ºC y 200 kPa absoluta fluye aire a través de una tobera convergente-divergente que tiene una garganta de 10 cm de diámetro. Determine el diámetro donde M = 3. Use sólo ecuaciones.

9.34 De un depósito que se mantiene a 20 °C y 500 kPa absoluta fluye aire a través de una tobera convergente-divergente. Los diámetros de la garganta y a la salida son 5 cm y 15 cm, respectivamente. ¿Cuáles dos presiones en el depósito resultarán en M = 1 en la garganta si existe flujo isentrópico en todo el sistema? Use sólo ecuaciones.

9.35 Vuelva a resolver el problema 9.34 usando la tabla para flujo isentrópico.

9.36 De una tobera fluye aire con flujo másico de 1.0 slug/s. Si $T_0 = 607$ ºF, $p_0 = 120$ psia y $p_e = 15$ psia. Calcule los diámetros de la garganta y a la salida para un flujo isentrópico. Además, determine la velocidad de salida.

9.37 De un depósito que se mantiene a 20 ºC y 2 MPa absoluta, fluye aire que sale a través de una tobera con $M_e = 4$. La presión en el depósito se eleva hasta que el flujo es casi subsónico a todo lo largo de la tobera. Calcule esta presión en el receptor.

9.38 En un pequeño túnel de viento se usa aire comprimido de un depósito a 3.5 MPa y 320 K. El aire fluye en forma isentrópica desde el depósito a través de la tobera, como se muestra en la figura P9.38. Si el número de Mach en la sección de prueba es 2.8, calcule la presión y la velocidad en la sección de prueba.

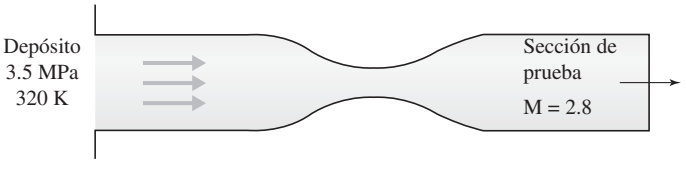


Fig. P9.38

9.39 Considere un flujo isentrópico de aire desde un depósito (donde $p_0 = 600$ kPa, $T_0 = 30$ ºC) a través de una tobera convergente-divergente. En una sección en la parte convergente de la tobera antes de la garganta, el número de Mach es 0.50 y el área de sección transversal es 12.4 cm^2.

(a) Si el área de la garganta es 10 cm^2, calcule la presión, temperatura y velocidad en la garganta.

(b) Si M = 1 en la garganta, ¿cuál debe ser la presión en el receptor para producir sólo un flujo supersónico a la salida?

(c) Si el número de Mach es 2.0 a la salida, ¿cuál debe ser el área de salida y el flujo másico?

9.40 Circula aire a 30 ºC a través de un tubo de 10 cm de diámetro a una velocidad de 150 m/s. Se utiliza un tubo Venturi para medir el gasto. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo del tubo de modo que no ocurra un flujo supersónico?

9.41 Para una eficiencia de 96% de una tobera, vuelva a resolver el problema 9.23.

9.42 Entra nitrógeno a un difusor a 100 kPa absoluta y 100 ºC con un número de Mach de 3.0. El flujo másico es 10 kg/s y la velocidad de salida es pequeña. Trace un bosquejo del difusor y, a continuación, determine el área de garganta y la presión y temperatura de salida, suponiendo flujo isentrópico.

9.43 Entra nitrógeno a un difusor a 15 psia absoluta y 200 ºF con un número de Mach de 3.0. El flujo másico es 0.2 slug/s y la velocidad de salida es pequeña. Trace un bosquejo del difusor y, a continuación, determine el área de la garganta y la presión y temperatura de salida, suponiendo flujo isentrópico.

9.44 Un cohete tiene una masa de 80 000 kg y debe despegar verticalmente desde una plataforma mediante seis toberas de las que salen gases de la combustión con T_e = 1000 ºC. ¿Cuál debe ser la velocidad de salida de cada tobera de 50 cm de diámetro si se supone que los gases de la combustión son de dióxido de carbono?

9.45 Un hombre de 100 kg se sujeta a la espalda un pequeño motor de reacción de aspiración de aire y apenas se levanta del suelo verticalmente (figura P9.45). El motor tiene un área de salida de 200 cm^2. ¿Con qué velocidad deben salir los gases de la combustión a 600 ºC del motor?

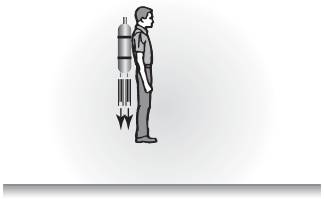


Fig. P9.45

9.46 Una tobera convergente-divergente está atornillada a un depósito con un diámetro de 40 cm. Los diámetros de garganta y salida son 5 cm y 10 cm, respectivamente. Si $T_0 = 27$ ºC y $p_e = 100$ kPa absoluta y existe un flujo isentrópico de aire a lo largo de la tobera supersónica, calcule la fuerza necesaria para mantener unida la tobera al depósito.

9.47 ¿Cuál es la velocidad máxima en **(a)** m/s y **(b)** mph que un avión puede tener durante su despegue y aterrizaje, si el flujo de aire alrededor de la nave tiene que modelarse como un flujo incompresible? Permita un error de 3% en la presión desde la corriente libre hasta el punto de estancamiento. Suponga condiciones estándar.

Choque normal

9.48 La presión, temperatura y velocidad antes de una onda de choque normal son 80 kPa absoluta, 10 ºC y 1000 m/s, respectivamente. Calcule M_1, M_2, p_2, T_2 y ρ_2 para aire. Use:

(a) Ecuaciones básicas

(b) La tabla para choque normal

9.49 La presión, temperatura y velocidad antes de una onda de choque normal son 12 psia, 40 ºF y 3000 ft/s, respectivamente. Calcule M_1, M_2, p_2, T_2 y ρ_2 para aire. Use:

(a) Ecuaciones básicas

(b) La tabla para choque normal

9.50 Deduzca la *relación de Rankine-Hugoniot*,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)\,p_2/p_1 + k - 1}{(k-1)\,p_2/p_1 + k + 1}$$

que refiere la relación entre densidades con la relación entre presiones a través de una onda de choque normal. Encuentre la relación entre densidades limitante para aire a través de un choque fuerte para el cual $p_2/p_1 \gg 1$.

9.51 Una explosión ocurre un poco arriba de la superficie terrestre, produciendo una onda de choque que se desplaza lateralmente hacia fuera. En un lugar determinado tiene un número de Mach de 2.0. Determine la presión un poco detrás del choque y la velocidad inducida.

9.52 Aire a 200 kPa absoluta y 20 ºC pasa a través de una onda de choque normal con una fuerza de modo que $M_2 = 0.5$. Calcule V_1, p_2 y ρ_2.

9.53 Aire a 30 psia y 60 ºF pasa a través de una onda de choque normal con una fuerza de modo que $M_2 = 0.5$. Calcule V_1, p_2 y ρ_2.

9.54 Un cuerpo despuntado se desplaza a 1000 m/s a una elevación de 10 000 m. El flujo que se aproxima al punto

de estancamiento pasa a través de una onda de choque normal y a continuación desacelera en forma isentrópica hasta el punto de estancamiento. Calcule p_0 y T_0 en el punto de estancamiento.

9.55 Se inserta una sonda Pitot en un flujo de aire en un tubo en el que p = 800 kPa absoluta, T = 40 ºC y M = 3.0 (figura P9.55). ¿Qué presión mide la sonda?

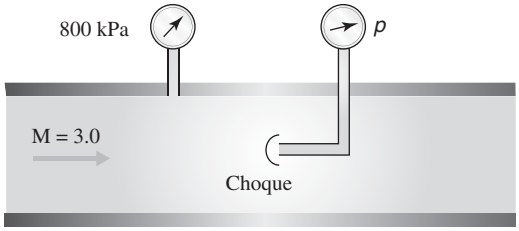


Fig. P9.55

9.56 De un depósito fluye aire a 25 ºC hacia la atmósfera a través de una tobera con garganta de 5 cm de diámetro y diámetro de salida de 10 cm. ¿Qué presión en el depósito resultará en no más de M = 1 en la garganta? Además, calcule el flujo másico. Manteniendo esta presión en el depósito, reduzca el diámetro de la garganta a 4 cm y determine el flujo másico resultante. Trace un bosquejo de la distribución de la presión como en la figura 9.12.

9.57 De un depósito fluye aire a 20 ºC hacia la atmósfera a través de una tobera con garganta de 5 cm de diámetro y diámetro de salida de 10 cm. ¿Qué presión en el depósito será necesaria para localizar una onda de choque normal a la salida? Además, calcule la velocidad y la presión en la garganta, antes y después del choque.

9.58 De un depósito fluye aire a 60 ºF hacia la atmósfera a través de una tobera con garganta de 2 pulgadas de diámetro y diámetro de salida de 4 pulgadas. ¿Qué presión en el depósito será necesaria para localizar una onda de choque normal a la salida? Además, calcule la velocidad y la presión en la garganta, antes y después del choque.

9.59 De un depósito que se mantiene a 25 ºC y 500 kPa absoluta fluye aire que sale por una tobera con diámetros de garganta y de salida de 5 cm y 10 cm, respectivamente. ¿Qué presión en el depósito será necesaria para localizar una onda de choque normal en un lugar donde el diámetro es 8 cm? Además, calcule la velocidad antes y después del choque.

Flujo de vapor

9.60 De un depósito fluye vapor hacia la atmósfera a razón de 4 kg/s con condiciones en el depósito de 400 ºC y 1.2 MPa absoluta, a través de una tobera convergente-divergente. Determine los diámetros de la garganta y de salida si existe flujo supersónico e isentrópico a lo largo de la sección divergente.

9.61 De un depósito fluye vapor hacia la atmósfera con condiciones en el depósito de 350 ºC y 1000 kPa absoluta, a razón de 15 kg/s. Estime el diámetro de salida de la tobera convergente.

9.62 De un depósito fluye vapor hacia la atmósfera con condiciones en el depósito de 700 ºF y 150 psia, a razón de 0.25 slug/s. Estime el diámetro de salida de la tobera convergente.

9.63 Un tubo colector suministra vapor a 400 ºC y 1.2 MPa absoluta a un conjunto de toberas con diámetros de garganta de 1.5 cm. Las toberas liberan el vapor a una presión de 120 kPa absolutas. Si el flujo es aproximadamente isentrópico, calcule el flujo másico y la temperatura de salida.

Onda de choque oblicua

9.64 Un flujo de aire con velocidad, temperatura y presión de 800 m/s, 30 ºC y 40 kPa absoluta, respectivamente, se hace virar con una onda de choque oblicua que emana de la pared, la cual tiene una esquina abrupta de 20º.

(a) Encuentre el número de Mach, la presión y la velocidad corriente abajo para un choque débil.

(b) Encuentre el número de Mach, la presión y la velocidad corriente abajo para un choque fuerte.

(c) Si el ángulo de la esquina cóncava fuera de 35º, haga un bosquejo de la situación del flujo en la esquina.

9.65 Dos choques oblicuos se intersecan como se muestra en la figura P9.65. Determine el ángulo de los choques reflejados si el flujo de aire debe salir paralelo a su dirección original. Además encuentre M_3.

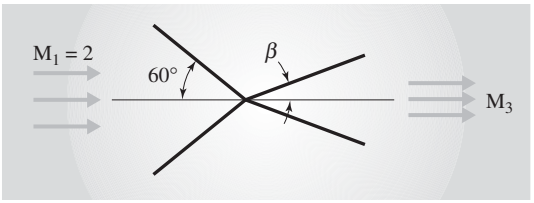


Fig. P9.65

9.66 Una onda de choque oblicua a un ángulo de 35º se refleja de una pared plana. El número de Mach M_1 corriente arriba es 3.5 y $T_1 = 0$ ºC. Encuentre V_3 después de la onda de choque oblicua reflejada para el flujo de aire.

9.67 Una onda de choque oblicua a un ángulo de 35º se refleja de una pared plana. El número de Mach M_1 corriente arriba es 3.5 y $T_1 = 30$ ºF. Encuentre V_3 después de la onda de choque oblicua reflejada para el flujo de aire.

9.68 Puede diseñarse una entrada supersónica para que tenga una onda de choque normal orientada a la entrada, o puede usarse una cuña para obtener una onda de choque oblicua débil, como se muestra en la figura P9.68. Compare la presión p_3 del flujo mostrado con la presión que existiría detrás de la onda de choque normal sin choque oblicuo.

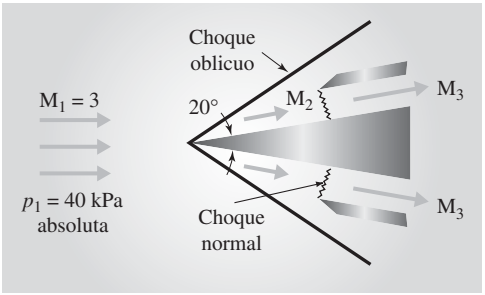


Fig. P9.68

Ondas de expansión

9.69 Un flujo de aire supersónico con $M_1 = 3$, $T_1 = -20$ ºC, y $p_1 = 20$ kPa absoluta da vuelta en una esquina convexa de 25º. Calcule M_2, p_2, T_2 y V_2 después del abanico de expansión. También calcule el ángulo incluido del abanico.

9.70 Un flujo de aire supersónico con $M_1 = 2$, $T_1 = 0$ ºC y $p_1 = 20$ kPa absoluta da vuelta en una esquina convexa. Si $M_2 = 4$, ¿qué ángulo θ debe tener la esquina. También calcule T_2 y V_2.

9.71 Un flujo de aire supersónico con $M_1 = 2$, $T_1 = 30$ ºF y $p_1 = 5$ psia da vuelta en una esquina convexa. Si $M_2 = 4$, ¿qué ángulo θ debe tener la esquina. También calcule T_2 y V_2.

9.72 La placa plana que se ilustra en la figura P9.72 se usa como superficie aerodinámica a un ángulo de ataque de 5º. Las ondas de choque oblicuas y los abanicos de expansión permiten que el aire permanezca adherido a la placa con el flujo detrás de la superficie aerodinámica paralelo a la dirección original.

Calcule

(a) Las presiones en los lados superior e inferior de la placa

(b) Los números de Mach M_{2u} y M_{2l} corriente abajo

(c) El coeficiente de sustentación definido por $C_L = \text{sustentación}/(\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 A)$. Observe que $\rho_1 V_1^2 = kM_1^2\rho_1$

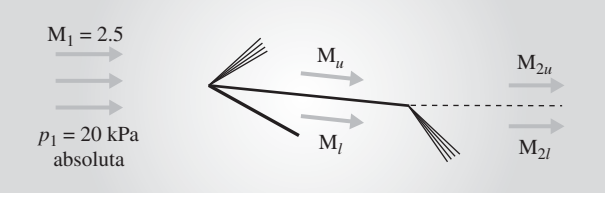


Fig. P9.72

9.73 La superficie aerodinámica supersónica que se ilustra en la figura P9.73 debe volar a un ángulo de ataque cero. Calcule el coeficiente de resistencia al avance $C_D = \text{resistencia al avance}/(\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 A)$. Observe que $\rho_1 V_1^2 = kM_1^2\rho_1$.

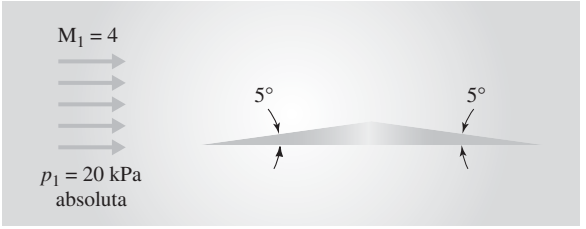


Fig. P9.73

9.74 La superficie aerodinámica del problema 9.73 vuela a un ángulo de ataque de 5º. Determine los coeficientes de sustentación y de resistencia al avance, C_L y C_D. Vea en los problemas 9.72 y 9.73 las definiciones de C_L y C_D.

El Canal Wahluke Branch, parte del Proyecto de la Cuenca del Río Columbia, es un ejemplo de un canal de ingeniería. El agua es transportada a una distancia de muchos kilómetros. (U.S. Bureau of Reclamation)

10

Flujo en canales abiertos

Esquema

10.1 Introducción
10.2 Flujos en canales abiertos
  10.2.1 Clasificación de flujos con superficie libre
  10.2.2 Importancia del número de Froude
  10.2.3 Distribución de la presión hidrostática
10.3 Flujo uniforme
  10.3.1 Geometría de canales
  10.3.2 Ecuación para flujo uniforme
  10.3.3 Sección más eficiente
10.4 Conceptos de energía
  10.4.1 Energía específica
  10.4.2 Uso de la ecuación de la energía en transiciones
  10.4.3 Medición de flujo
10.5 Conceptos de la cantidad de movimiento
  10.5.1 Ecuación de la cantidad de movimiento
  10.5.2 Salto hidráulico
  10.5.3 Solución numérica de la ecuación de la cantidad de movimiento
10.6 Flujo no uniforme gradualmente variado
  10.6.1 Ecuación diferencial para flujo gradualmente variado
  10.6.2 Perfiles de superficies de agua
  10.6.3 Controles y flujo crítico
  10.6.4 Síntesis de perfiles
10.7 Análisis numérico de perfiles de superficies de agua
  10.7.1 Método de pasos estándar
  10.7.2 Método de integración numérica
  10.7.3 Canales irregulares
  10.7.4 Métodos de integración directa
10.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Describir varios tipos de flujos con superficie libre en un canal abierto
- Aplicar la ecuación de Chezy-Manning con varias secciones transversales geométricas para aplicaciones en flujos uniformes
- Deducir los principios de la energía y de la cantidad de movimiento para situaciones de flujo rápidamente variado
- Deducir la ecuación diferencial para flujo no uniforme gradualmente variado
- Presentar el método de síntesis del perfil; la descripción cualitativa de flujo en un canal abierto, incluyendo el establecimiento de controles y la clasificación de perfiles de superficies de agua
- Desarrollar y presentar métodos para calcular numéricamente flujos gradualmente variados
- Presentar numerosos ejemplos de flujo uniforme, rápidamente variado y gradualmente variado
- Detallar varios ejemplos de síntesis de perfiles y de análisis numérico de un flujo complejo en un canal abierto, con énfasis en la aplicación de diseño

10.1 INTRODUCCIÓN

Superficie libre: *Interfase entre el aire y la capa superior de agua.*

Es probable que el flujo con superficie libre sea el fenómeno de flujo más común que encontramos en la superficie de la Tierra. Las olas de los océanos, las corrientes de ríos y los flujos de lluvia son ejemplos que se presentan en la naturaleza. Las situaciones inducidas por el hombre incluyen los flujos en canales y alcantarillas, el escurrimiento sobre materiales impermeables como en techos y lotes de estacionamiento, y el movimiento de olas en puertos.

En todas estas situaciones, el flujo está caracterizado por una interfase entre el aire y la capa superior del agua, que se conoce como **superficie libre**. En la superficie libre, la presión es constante, y para casi todas las situaciones, es atmosférica. En tal caso, la línea de referencia hidráulica y la superficie libre del líquido coinciden. En la práctica de ingeniería, el fluido que la mayoría de los canales abiertos transportan es agua. No obstante, los principios desarrollados y puestos en práctica en este capítulo también son aplicables para otros líquidos que se fluyen con una superficie libre.

Generalmente, la elevación de la superficie libre no permanece constante; puede variar de acuerdo con las velocidades del fluido. Otra complejidad es que el flujo con frecuencia es tridimensional. Por fortuna, existen muchos casos en los que pueden hacerse simplificaciones bidimensionales y hasta en una sola dimensión. Los patrones de flujo en estuarios[1] y lagos ante ciertas circunstancias pueden tratarse como bidimensionales en el plano horizontal, promediarse verticalmente en cuanto a la profundidad. Los flujos en ríos y canales por lo general son tratados como unidimensionales respecto a la coordenada de posición a lo largo del lecho de la corriente. En este capítulo restringimos nuestra consideración a flujos en una dimensión.

La figura 10.1a muestra una distribución de la velocidad representativa en la línea centro en un canal. El perfil de la velocidad es tridimensional en una sección transversal determinada (figura 10.1b). El esfuerzo cortante en el límite no es

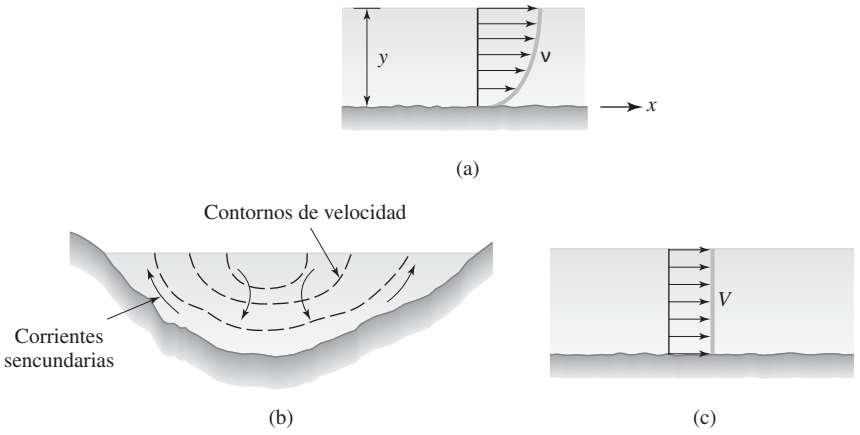


Fig. 10.1 Flujo con superficie libre: (a) distribución de velocidad en la línea centro; (b) sección transversal; (c) modelo en una dimensión.

[1]Un estuario es el curso inferior de un río que es influenciado por las mareas oceánicas.

uniforme; en la superficie libre el esfuerzo cortante es insignificante, aunque varía alrededor del perímetro mojado. En algunas circunstancias, la presencia de corrientes secundarias forzará a que ocurra la velocidad máxima ligeramente abajo de la superficie. Por convención, y se define como la profundidad desde el lugar más profundo hasta la superficie libre del agua; observe que y no es una coordenada. La velocidad media está dada por la relación

$$V = \frac{1}{A}\int_A v\, dA \tag{10.1.1}$$

En el modelo unidimensional, suponemos que la velocidad es igual a V en todas partes en una sección transversal determinada. Este modelo da excelentes resultados y se usa ampliamente. Es muy probable que los flujos en canales sean turbulentos, y puede suponerse que el perfil de la velocidad es aproximadamente constante, como en la figura 10.1c, sin incurrir en un error de importancia. En consecuencia, se utiliza el modelo unidimensional.

10.2 FLUJOS EN CANALES ABIERTOS

10.2.1 Clasificación de flujos con superficie libre

El flujo en un canal se caracteriza por la velocidad media, aun cuando exista un perfil de velocidad en una sección determinada, como se muestra en la figura 10.1. El flujo se clasifica como una combinación de permanente o no permanente, y uniforme o no uniforme. Por flujo permanente se entiende que la velocidad media V, así como la profundidad y, es independiente del tiempo, mientras que un flujo no permanente necesita que el tiempo sea considerado como una variable independiente. Un flujo uniforme implica que V y y sean independientes de la coordenada de posición en la dirección del flujo; un flujo no uniforme significa que V y y varían en magnitud a lo largo de esa coordenada. Las combinaciones posibles se muestran en la tabla 10.1; la coordenada de posición está designada como x.

Un flujo permanente y uniforme es la situación donde la velocidad terminal se ha alcanzado en un canal de sección transversal constante; la velocidad media no sólo es constante, sino que además la profundidad tampoco varía. Un flujo permanente, no uniforme, es un caso común en ríos y canales artificiales. En esas situaciones se encontrará que el flujo permanente, no uniforme ocurre en dos formas. En tramos relativamente cortos, llamados *transiciones*, existe un cambio rápido en

CONCEPTO CLAVE *En tramos relativamente cortos, llamados transiciones, existe un rápido cambio en profundidad y velocidad.*

Tabla 10.1 Combinaciones de flujos con superficie libre unidimensionales

Tipo de flujo	*Velocidad promedio*	*Profundidad*
Permanente, uniforme	$V = \text{const.}$	$y = \text{const.}$
Permanente, no uniforme	$V = V(x)$	$y = y(x)$
No permanente, uniforme	$V = V(t)$	$y = y(t)$
No permanente, no uniforme	$V = V(x, t)$	$y = y(x, t)$

Flujo de variación rápida: *Cambio rápido en profundidad y velocidad.*

profundidad y velocidad; dicho flujo se denomina **flujo de variación rápida**. Ejemplos de estos flujos son el salto hidráulico (que se muestra en el ejemplo 4.12), el flujo que entra en un canal empinado desde un lago o embalse, el flujo cercano a la desembocadura libre de un canal y el flujo en la cercanía de una obstrucción como puede ser el pilar de un puente o una compuerta de desagüe.

Flujo gradualmente variado: *En tramos extensos de un canal, la velocidad y profundidad cambian en forma lenta.*

A lo largo de tramos más extensos de un canal, es posible que la velocidad y profundidad puedan no variar rápidamente sino que, más bien, cambian en forma lenta. Aquí la superficie del agua puede ser considerada continua, y el régimen se denomina **flujo gradualmente variado**. Ejemplos de un flujo permanente gradualmente variado son el remanso creado por una presa construida en un río y el descenso del nivel de una superficie de agua cuando el flujo se aproxima a una catarata. La figura 10.2 ilustra la forma en que un flujo de variación rápida (FVR) y un flujo gradualmente variado (FGV) pueden presentarse en forma simultánea en un tramo de un canal. Observe que la escala vertical es más grande que la horizontal; esta distorsión de escala es común cuando se representan situaciones de flujo en un canal abierto.

Raras veces se presenta un flujo uniforme no permanente, pero un flujo no permanente y no uniforme es común. Las olas de una creciente en ríos, los aguajes y los flujos regulados en canales son ejemplos de la última categoría. En numerosas situaciones, estos flujos pueden ser considerados que se comportan lo suficiente como un flujo uniforme permanente o como uno uniforme permanente para justificar el tratarlos como tales. Los flujos no permanentes están fuera del ámbito de un tratado fundamental y no se presentarán en este libro; la excepción es el aguaje, es decir, un salto hidráulico en movimiento, que puede ser analizado de una forma casi permanente.

10.2.2 Importancia del número de Froude

El principal mecanismo para mantener un flujo en un canal abierto es la fuerza gravitacional. Por ejemplo, la diferencia en elevación entre dos embalses hará que el agua fluya a través de un canal que los conecte. El parámetro que representa este efecto gravitacional es el *número de Froude*,

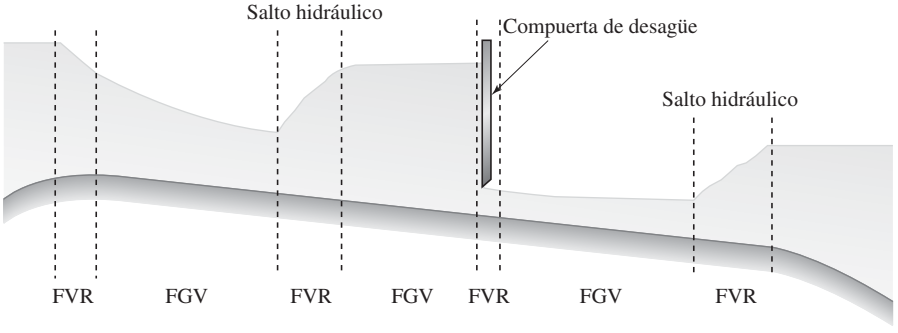


Fig. 10.2 Flujo permanente no uniforme en un canal.

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \tag{10.2.1}$$

que en el capítulo 6 se estableció que es la relación entre la fuerza inercial y la fuerza de gravedad. En el contexto de flujo en un canal abierto, V es la velocidad media a través de la sección transversal y L es la longitud representativa. Para un canal de sección transversal rectangular, L es la profundidad y del flujo.

El número de Froude desempeña un papel dominante en el análisis del flujo en un canal abierto. Aparece en varias relaciones que se desarrollarán más adelante en este capítulo. Además, conociendo su magnitud, pueden determinarse características importantes respecto al régimen de flujo. Por ejemplo, si Fr > 1, el flujo posee una velocidad relativamente alta y baja profundidad; por otra parte, cuando Fr < 1, la velocidad es relativamente baja y la profundidad es relativamente grande. Excepto en la cercanía de rápidos, cascadas y cataratas, la mayoría de los ríos tienen un número de Froude menor que la unidad. Los canales construidos pueden ser diseñados para que los números de Froude sean mayores que o menores que la unidad, o que varíen de mayores que la unidad a menores que ésta a lo largo de la longitud de un canal.

10.2.3 Distribución de la presión hidrostática

Considere un canal en el que el flujo es casi horizontal, como se muestra en la figura 10.3. En este caso, hay poca o ninguna aceleración vertical del fluido dentro del tramo, y las líneas de corriente permanecen casi paralelas. Esta condición es común en muchos flujos en canales abiertos, y ciertamente, si existen ligeras variaciones, se supone que las líneas de corriente se comportan como si fueran paralelas. Como las aceleraciones verticales son casi cero, se puede concluir que en la dirección vertical la distribución de la presión es hidrostática. Como resultado de lo anterior, la suma $(p + \gamma z)$ permanece constante a cualquier profundidad, y la línea de referencia hidráulica coincide con la superficie del agua. En flujos en un canal abierto se acostumbre designar a z como la elevación del fondo del canal y a y como la profundidad del flujo. Como en el fondo del canal $p/\gamma = y$, la línea de referencia

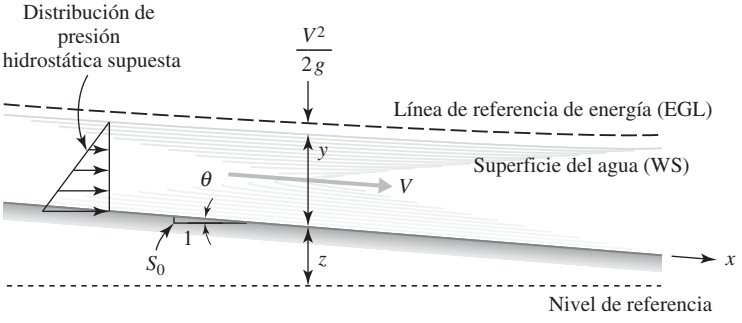


Fig. 10.3 Tramo de flujo en un canal abierto.

hidráulica está dada por la suma $(y + z)$. Los conceptos de este capítulo se desarrollan suponiendo una distribución de presión hidrostática.

10.3 FLUJO UNIFORME

CONCEPTO CLAVE *Las secciones transversales de canales pueden ser consideradas regulares o irregulares.*

Antes de estudiar los flujos no uniformes en la sección 10.6, concentremos nuestra atención en la condición más simple de un flujo permanente uniforme, o simplemente flujo uniforme. Este flujo es raro, pero si se presentara en un canal, la profundidad y velocidad no variarían en toda su longitud o, en otras palabras, se habrían alcanzado las condiciones terminales. Además del flujo uniforme, esta sección cubre la geometría de la sección transversal de canales abiertos; las formulaciones se aplicarán a flujos uniformes y no uniformes. Parte de ese material se expuso en la sección 7.7 pero lo repasamos aquí para que quede completa su comprensión.

10.3.1 Geometría de canales

Sección regular: *Sección cuya forma no varía a lo largo de la longitud de un canal.*

Las secciones transversales de canales pueden considerarse regulares o irregulares. Una **sección regular** es aquella cuya forma no varía a lo largo de la longitud de un canal, mientras que una sección irregular tendrá cambios en su geometría. En este capítulo consideramos principalmente formas regulares de un canal; en la figura 10.4 se muestran tres geometrías comunes.

La forma más simple de un canal es una sección rectangular. El área de la sección transversal está dada por

$$A = by \tag{10.3.1}$$

Perímetro mojado: *Es la longitud de la línea de contacto entre el líquido y el canal.*

en la que b es el ancho del fondo del canal (vea la figura 10.4a). Otros parámetros de importancia para el flujo en canales abiertos son el perímetro mojado, el radio hidráulico y el ancho de la superficie libre. El **perímetro mojado** P es la longitud de la línea de contacto entre el líquido y el canal; para un canal rectangular, es

$$P = b + 2y \tag{10.3.2}$$

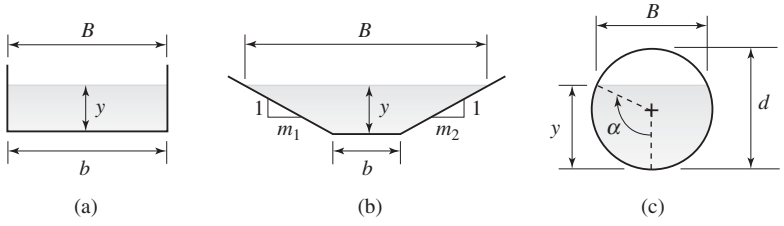


Fig. 10.4 Secciones transversales regulares representativas: (a) rectangular; (b) trapezoidal; (c) circular.

El **radio hidráulico** R es el área dividida entre el perímetro mojado, es decir,

Radio hidráulico: *Es el área dividida entre el perímetro mojado.*

$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} \tag{10.3.3}$$

El ancho B de la superficie libre es igual al ancho b del fondo para una sección rectangular.

Una sección trapezoidal (figura 10.4b) tiene la característica adicional de que sus paredes laterales están inclinadas. Si m_1 es la relación entre el cambio horizontal y el vertical de la pared en un lado, y m_2 es la cantidad correspondiente en la otra pared, el área, el perímetro mojado y el ancho de la superficie libre están dados como

$$A = by + \frac{1}{2}y^2(m_1 + m_2) \tag{10.3.4}$$

$$P = b + y\left(\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2}\right) \tag{10.3.5}$$

$$B = b + y(m_1 + m_2) \tag{10.3.6}$$

Observe que la sección rectangular queda comprendida en la definición trapezoidal, ya que para las paredes laterales verticales m_1 y m_2 son cero, y las relaciones para A, P y B se hacen idénticas a las del canal rectangular. Además, si b se iguala a cero, las ecuaciones 10.3.4 a 10.3.6 describen la geometría de un canal de forma triangular.

Es importante considerar la sección transversal circular, ya que numerosos flujos con superficie libre en sistemas de drenaje y alcantarillado se transportan en conductos circulares. Si d es el diámetro del conducto, el área, el perímetro mojado y el ancho de la superficie libre están dados por

$$A = \frac{d^2}{4}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha) \tag{10.3.7}$$

$$P = \alpha d \tag{10.3.8}$$

$$B = d \operatorname{sen}\alpha \tag{10.3.9}$$

donde

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - 2\frac{y}{d}\right) \tag{10.3.10}$$

El ángulo α está definido en la figura 10.4c.

Una geometría de sección transversal generalizada puede expresarse en forma funcional como $A(y)$, $P(y)$, $R(y)$ y $B(y)$. Las representaciones funcionales incluyen todas las formas analíticas dadas antes, y también pueden usarse para describir un canal irregular. Por ejemplo, en una sección de un río, podemos describir el área y

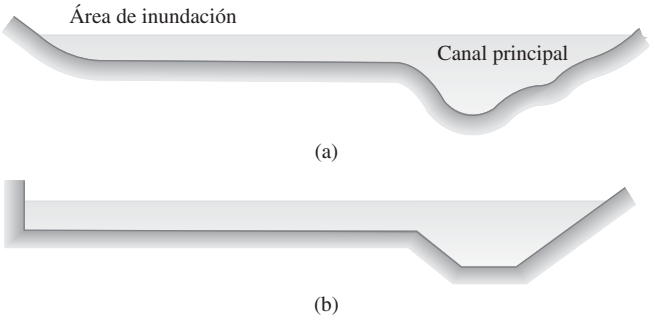


Fig. 10.5 Representación de una sección generalizada: (a) sección transversal real; (b) sección transversal compuesta.

el perímetro mojado en forma tabular y utilizar técnicas tales como el ajuste de una curva o la interpolación para obtener la información numérica como funciones de la profundidad. Estos procedimientos son útiles para análisis basados en computadoras.

Una sección compuesta es la formada por varias subsecciones; por lo general estas subsecciones son de forma analítica. El ejemplo mostrado en la figura 10.5a consta de un canal principal y de un área de inundación. El canal principal es aproximado por un trapezoide y el área de inundación por un rectángulo, figura 10.5b. Podríamos deducir expresiones analíticas para este tipo de sección compuesta; no obstante, podría ser más útil considerar las formas funcionales para los parámetros geométricos. Observe que las funciones serán discontinuas a profundidades donde se acoplan las dos secciones.

La mayoría de los desarrollos teóricos en este capítulo se concentran en secciones transversales que son rectangulares. Esta suposición nos permite simplificar los cálculos matemáticos asociados con el análisis de un flujo en un canal abierto. Aun cuando las ecuaciones se simplificarán respecto a geometrías más complicadas, la comprensión física de los fenómenos y las conclusiones alcanzadas se aplicarán a la mayoría de las secciones transversales prismáticas generalizadas. Se hará una distinción clara entre una geometría rectangular y otros tipos de geometrías cuando presentemos varios de los desarrollos y conceptos.

CONCEPTO CLAVE *Un flujo uniforme se presenta en un canal cuando su profundidad y velocidad no varían a lo largo de su longitud.*

10.3.2 Ecuación para flujo uniforme

Un flujo uniforme se presenta en un canal cuando la profundidad y velocidad no varían a lo largo de su longitud, es decir, cuando las condiciones terminales se hayan alcanzado en el canal. Ante estas condiciones, la línea de referencia de energía, la superficie del agua y el fondo del canal son paralelos. Se puede predecir un flujo uniforme con una ecuación de la forma

$$V = C\sqrt{RS_0} \tag{10.3.11}$$

en la que S_0 es la pendiente del fondo del canal y C es el *coeficiente de Chezy*, que es independiente del número de Reynolds ya que el flujo es considerado completamente turbulento. Se ha hecho práctica común en la ingeniería relacionar C con la rugosidad del canal y el radio hidráulico mediante el uso de la *relación de Manning*

$$C = \frac{c_1}{n} R^{1/6} \tag{10.3.12}$$

donde $c_1 = 1$ para unidades SI y $c_1 = 1.49$ para unidades inglesas. Combinando las ecuaciones 10.3.11 y 10.3.12 con la definición de descarga resulta en la *ecuación de Chezy-Manning*

$$Q = \frac{c_1}{n} AR^{2/3} \sqrt{S_0} \tag{10.3.13}$$

En la tabla 7.3 se dan los valores del coeficiente de Manning n.

CONCEPTO CLAVE *La profundidad asociada con un flujo uniforme recibe el nombre de profundidad uniforme o profundidad normal.*

La profundidad asociada con un flujo uniforme se designa como y_0; recibe el nombre de *profundidad uniforme* o *profundidad normal.* Un flujo uniforme raras veces se presenta en ríos debido a la irregularidad de su geometría. En canales artificiales no siempre está presente, ya que la presencia de controles como compuertas de desagüe, vertederos y desembocaduras harán que el flujo se haga gradualmente variado. No obstante, es necesario determinar y_0 cuando se analicen condiciones de flujo gradualmente variado porque proporciona una base para evaluar el tipo de superficie del agua que pueda existir en el canal. Es frecuente que el diseño de redes de drenaje de flujo por gravedad esté basado en suponer un flujo uniforme y utilizando la ecuación 10.3.13, aun cuando gran parte del tiempo el flujo en esos sistemas sea no uniforme.

Un análisis de la ecuación 10.3.13 revela que pueden despejarse explícitamente Q, n o S_0. Los ejemplos 7.19 y 7.20 dan ilustraciones. Es necesario recurrir a una solución de prueba y error o resolver las ecuaciones cuando se requiera hallar y_0 con los parámetros restantes dados.

Ejemplo 10.1

En un canal trapezoidal fluye agua a razón de 4.5 m^3/s (figura 10.4b) cuyo ancho de fondo es 2.4 m y las pendientes laterales son 1 vertical a 2 horizontal. Calcule y_0 si $n = 0.012$ y $S_0 = 0.0001$.

Solución

Los datos geométricos dados son $b = 2.4$ m y $m_1 = m_2 = 2$. Reacomodamos la ecuación 10.3.13, tomando nota que $R = A/P$ y $c_1 = 1$:

$$\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{nQ}{\sqrt{S_0}}$$

Sustituyendo los datos conocidos y la geometría trapezoidal, tenemos

$$\frac{\left[2.4y_0 + \frac{1}{2}y_0^2(2 + 2)\right]^{5/3}}{[2.4 + y_0(2\sqrt{1 + 2^2})]^{2/3}} = \frac{0.012 \times 4.5}{\sqrt{0.0001}}$$

El valor de y_0, ya sea por prueba y error o utilizando un programa de computadora, resulta en $y_0 = 1.28$ m.

Ejemplo 10.2

Ocasionalmente se presenta un flujo uniforme en un conducto circular de concreto de 5 m de diámetro (figura 10.4c), pero la profundidad del flujo puede variar. El coeficiente de Manning es $n = 0.013$, y la pendiente del canal es $S_0 = 0.0005$. (a) Calcule la descarga para $y = 3$ m, (b) grafique la curva descarga-profundidad.

Solución

(a) Primero, use la ecuación 10.3.10 para hallar el ángulo α:

$$\alpha = \cos^{-1}(1-2y/d)$$
$$= \cos^{-1}(1-2 \times 3/5) = 101.54° \text{ o } 101.54 \times \pi/180 = 1.772 \text{ rad}$$

Usando las ecuaciones 10.3.7 y 10.3.8, el área y el perímetro mojado son

$$A = \frac{d^2}{4}(\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\alpha) = \frac{5^2}{4}(1.772 - \text{sen}\,101.54° \cos 101.54°) = 12.3 \text{ m}^2$$
$$p = \alpha d = 1.772 \times 5 = 8.86 \text{ m}$$

El radio hidráulico es entonces

$$R = \frac{A}{P} = \frac{12.3}{8.86} = 1.388 \text{ m}$$

Por último, la descarga, cuando $y = 3$ m, es

$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S^{1/2} = \frac{1}{0.013} \times 12.3 \times 1.388^{2/3} \times 0.0005^{0.5} = 26.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) Se utiliza Mathcad para generar la curva. Observe que la solución es generalizada, de modo que cualquier diámetro, el coeficiente de Manning, o la pendiente del canal pueden ingresarse en el algoritmo. Las ecuaciones 10.3.7 y 10.3.8 se usan para definir el área y el perímetro mojado, respectivamente. Se pueden utilizar ya sea unidades SI o inglesas para definir apropiadamente el parámetro c_1. En este problema se usa un valor de 1.0. En el apéndice E, figura E.1, se muestra una solución obtenida con MATLAB.

Ingrese el diámetro, el coeficiente de Manning, y la pendiente del canal:

$$d := 5 \qquad n := 0.013 \qquad S_0 := 0.0005 \qquad c_1 := 1.0$$

Defina las funciones geométricas:

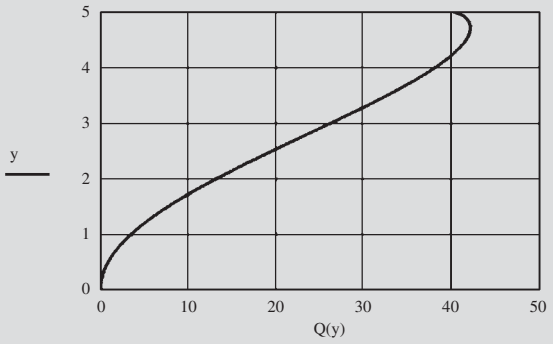
$$\alpha(y) := \text{acos}\left(1 - 2\cdot\frac{y}{d}\right)$$
$$A(y) := \frac{d^2}{4}\cdot(\alpha(y) - \text{sen}(\alpha(y))\cdot\cos(\alpha(y)))$$
$$P(y) := \alpha(y)\cdot d$$
$$R(y) := \frac{A(y)}{P(y)}$$

Defina la función de descarga (es decir, la ecuación de Manning):

$$Q(y) := \frac{c_1}{n}\cdot A(y)\cdot R(y)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{S_0}$$

Grafique la profundidad contra descarga:

y:= 0,0.01..d



10.3.3 Sección más eficiente

El diseño de un canal para transportar un flujo uniforme por lo general consiste en seleccionar o especificar la sección transversal geométrica apropiada siempre que se conozcan Q, n y S_0. Una vez seleccionada, las dimensiones óptimas de la sección transversal pueden basarse en los criterios de resistencia mínima al flujo. La resistencia al flujo por longitud unitaria es igual al esfuerzo cortante en la pared multiplicado por el perímetro mojado. Usando un volumen de control para flujo uniforme, suponga una pequeña pendiente S_0 de modo que sen $\theta = S_0$; entonces, sumando fuerzas

$$\tau_0 P = \gamma A S_0 \tag{10.3.14}$$

Por tanto, un criterio de resistencia mínima es equivalente a requerir un área mínima de sección transversal respecto a los parámetros que definen el área. Además, tenemos que satisfacer la ecuación de Chezy-Manning. Como Q, n y S_0 se dan y $R = A/P$, la ecuación 10.3.13 puede escribirse como

$$P = cA^{5/2} \tag{10.3.15}$$

en la que c es una constante. Como ejemplo, considere un canal rectangular con ancho b y profundidad y. La mejor sección transversal hidráulica se obtiene reescribiendo la ecuación 10.3.15 de modo que A sea una función de b únicamente. Por tanto, expresamos P en términos de A y b, usando $A = by$ y $P = b + 2y$:

$$P = b + \frac{2A}{b} \tag{10.3.16}$$

La sustitución de esta ecuación en la ecuación 10.3.15 da

$$b + \frac{2A}{b} = cA^{5/2} \tag{10.3.17}$$

Ahora, derivamos la ecuación 10.3.17 respecto a b, recordando que A depende de b:

$$1 + \frac{2}{b}\frac{dA}{db} - \frac{2A}{b^2} = \frac{5}{2}cA^{3/2}\frac{dA}{db} \tag{10.3.18}$$

Hacemos $dA/db = 0$, dado que el objetivo es hallar el valor de b que minimice A. El resultado es

$$\frac{2A}{b^2} = 1 \tag{10.3.19}$$

o bien, usando $A = by$,

$$b = 2y \tag{10.3.20}$$

Entonces, si el ancho de un canal rectangular es dos veces la profundidad del agua que fluye, el agua fluirá con mayor eficiencia.

Para una sección transversal trapezoidal es más simple empezar con la ecuación 10.3.15, eliminar b y expresar P como una función de A, y y m, donde $m = m_1 = m_2$. Luego, al considerar A como una función de m y y, el mínimo de A se encuentra igualando a cero el vector gradiente de A. El resultado es $m = \sqrt{3}/3$ o un ángulo de la pendiente lateral de 60º con la horizontal. La forma hexagonal resultante es un trapezoide que se aproxima mejor a un semicírculo. La evaluación se deja como ejercicio para el lector.

El criterio óptimo basado en la resistencia al flujo no siempre puede usarse y, de hecho, puede ser menos importante que otros factores de diseño. Otros aspectos adicionales a considerar son el tipo de excavación y, si el canal no está revestido, la estabilidad de los taludes de las paredes laterales y la posibilidad de erosión del lecho.

10.4 CONCEPTOS DE ENERGÍA

La carga de energía en cualquier posición a lo largo de un canal es la suma de la distancia vertical medida desde un nivel de referencia horizontal z, la profundidad de flujo y la carga de energía cinética $V^2/2g$. Esa suma define la línea de referencia de energía y se denomina **energía total** H:

Energía total: *La suma de la distancia vertical hasta el fondo del canal medida desde un nivel de referencia horizontal, la profundidad del flujo y la energía cinética.*

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.4.1}$$

Se supone que el factor de corrección por energía cinética asociado con el término $V^2/2g$ es la unidad (vea la sección 4.4.4); esto es práctica común para la mayoría de los canales prismáticos de geometría simple, ya que los perfiles de la velocidad son casi uniformes para los flujos turbulentos involucrados. La ecuación de energía fundamental, desarrollada en la sección 4.4, establece que ocurrirán pérdidas para un fluido real entre cualesquiera dos secciones del canal, y por tanto la energía total no permanecerá constante. El equilibrio de energía está dado simplemente por la relación

$$H_1 = H_2 + h_L \tag{10.4.2}$$

en la cual h_L es la pérdida de carga. La única forma en que la energía se puede agregar a un sistema de flujo en un canal abierto, es que tenga lugar un bombeo o elevación mecánica del líquido. La ecuación 10.4.2 es aplicable para situaciones de flujo con variación rápida así como con variación gradual; se usará en coordinación con las ecuaciones de la cantidad de movimiento y continuidad en varias aplicaciones.

10.4.1 Energía específica

Es conveniente, en flujos en canales abiertos, medir la energía respecto al fondo del canal; ya que proporciona un medio útil para analizar situaciones de flujo complejas. Esta medida se conoce como **energía específica** y se designa como E:

Energía específica: *Medida de la energía respecto al fondo del canal.*

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.4.3}$$

La energía específica es entonces la suma de la profundidad del flujo y y la carga por la energía cinética $V^2/2g$.

Secciones rectangulares. Para una sección rectangular, la energía específica puede expresarse como una función de la profundidad y. La **descarga específica** q se define como la descarga total dividida entre el ancho del canal, es decir,

Descarga específica: *Descarga total dividida entre el ancho del canal (válida sólo para un canal rectangular).*

$$q = \frac{Q}{b} = Vy \tag{10.4.4}$$

La energía específica para un canal rectangular puede entonces ponerse en la forma

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \tag{10.4.5}$$

Esta relación $E - y$ se muestra en la figura 10.6a. Podemos observar que una descarga específica requiere al menos una energía mínima; esta energía mínima se conoce como *energía crítica,* E_c. La profundidad correspondiente y_c recibe el nombre de **profundidad crítica**. Si la energía específica es mayor que E_c, son posibles dos profundidades las cuales se conocen como **profundidades alternas**. Para una q constante, la ecuación 10.4.5 es una ecuación cúbica en y para un valor determinado de E que es mayor que E_c. Las dos soluciones positivas de y son las profundidades alternas.[2] Otra forma de expresar la ecuación 10.4.5 es considerar E constante y hacer variar q. De la ecuación 10.4.5 se puede despejar q como

Profundidad crítica: *Profundidad crítica es la profundidad para la cual la energía específica es un mínimo.*

Profundidades alternas: *Las dos profundidades de flujo que son posibles para una energía específica y descarga determinadas.*

$$q = \sqrt{2gy^2\,(E - y)} \tag{10.4.6}$$

[2]La curva $E - y$ queda comprendida entre las dos asíntotas $E = y$ y $y = 0$. Existe otra curva definida por la relación para y negativa, ésta no se considera ya que no tiene significado físico para el flujo en canales abiertos.

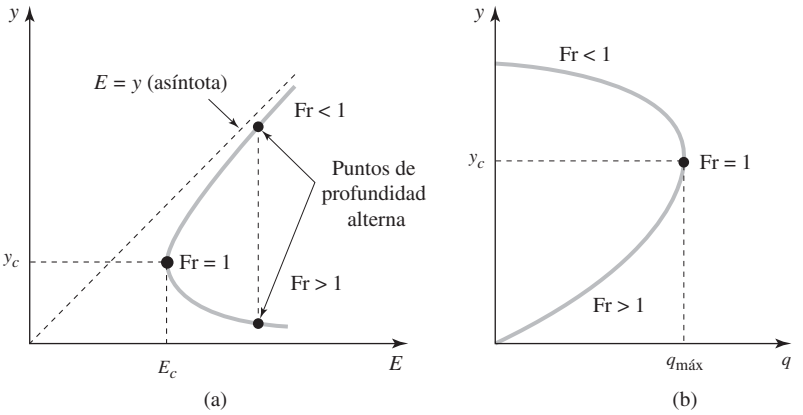


Fig. 10.6 Variación de la energía específica y la descarga específica con la profundidad: (a) E contra y para q constante; (b) q contra y para E constante.

Esta relación se muestra en la figura 10.6b. Esta forma de la relación de la energía es útil para analizar flujos en los que la energía específica permanece casi constante en toda la región de transición; algunos ejemplos son un cambio en el ancho de un canal y la variación de la profundidad con la descarga a la entrada de un canal. Observe que la descarga unitaria máxima, $q_{máx}$, ocurre a una profundidad crítica.

La profundidad crítica y_c puede evaluarse a partir de la ecuación 10.4.5 igualando a cero la derivada de E respecto a y:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0 \tag{10.4.7}$$

Como $q = Vy$, la condición de E mínima es

$$1 - \frac{V^2}{gy} = 1 - \mathrm{Fr}^2 = 0 \tag{10.4.8}$$

donde el número de Froude en un canal rectangular es

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{q}{\sqrt{gy^3}} \tag{10.4.9}$$

Entonces, de la ecuación 10.4.8 el número de Froude es igual a la unidad para energía mínima. Despejando la profundidad en la ecuación 10.4.7 en términos de q, tenemos

$$y = y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{10.4.10}$$

Esta relación da la profundidad crítica en términos de la descarga específica. Observe que en condiciones de flujo crítico, E_c puede ser expresada por conveniencia al combinar las ecuaciones 10.4.5 y 10.4.10 para eliminar q, resultando en

$$E_c = \frac{3}{2} y_c \tag{10.4.11}$$

En la curva E–y, para cualquier profundidad mayor que y_c, el flujo es relativamente lento o tranquilo, y Fr < 1; este estado se denomina *flujo subcrítico*. Por el contrario, para una profundidad menor que la crítica, el flujo es relativamente rápido o raudo, con Fr > 1, y el régimen es de *flujo supercrítico*. El diagrama E–y es una representación del cambio en energía específica a medida que varía la profundidad, dada una descarga específica constante. Es posible que q varíe, como cuando cambia el ancho de una sección rectangular en una región de transición. Cuando q aumenta, la curva E–y se desplaza hacia la derecha en la figura 10.6a. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que para una energía específica determinada, la maximización de q de la ecuación 10.4.6 producirá condiciones críticas a descarga máxima (vea la figura 10.6b).

Sección transversal generalizada. Para una sección generalizada, la energía específica se escribe en términos de la descarga total Q y del área de la sección transversal A como

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{10.4.12}$$

La condición de energía mínima se obtiene al derivar la ecuación 10.4.12 respecto a y para obtener

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} \tag{10.4.13}$$

Para cambios incrementales en la profundidad, el cambio correspondiente en el área es $dA = B\,dy$. Entonces, igualando a cero la ecuación 10.4.13, la condición de energía mínima se convierte en

$$1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} = 0 \tag{10.4.14}$$

Por analogía con la ecuación 10.4.8, el segundo término en la ecuación 10.4.14 es el cuadrado del número de Froude; en consecuencia

$$\text{Fr} = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{Q/A}{\sqrt{gA/B}} = \frac{V}{\sqrt{gA/B}} \tag{10.4.15}$$

La relación A/B recibe el nombre de *profundidad hidráulica*, y su uso permite generalizar la definición del número de Froude. El lector puede verificar que A/B es igual a y para un canal rectangular.

El diagrama de la energía específica de la figura 10.6 proporciona un medio útil para visualizar la solución de un problema de transición. Aun cuando es probable que uno resuelva numéricamente el problema, una evaluación de la solución gráfica puede proporcionar una visión física profunda así como prevenir que se seleccione una raíz incorrecta.

Ejemplo 10.3

Por un canal triangular fluye agua con $m_1 = m_2 = 1.0$ y con una descarga de $Q = 3\ \text{m}^3/\text{s}$. Si la profundidad del agua es 2.5 m, determine la energía específica, el número de Froude, la profundidad hidráulica y la profundidad alterna.

Solución

Reconociendo que $b = 0$, el área de flujo y el ancho en la parte superior se calculan con las ecuaciones 10.3.4 y 10.3.6 como sigue:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}y^2\,(m_1 + m_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 2.5^2 \times (1 + 1) = 6.25\ \text{m}^2 \\ B &= (m_1 + m_2)y \\ &= (1 + 1) \times 2.5 = 5.0\ \text{m} \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones 10.4.12 y 10.4.15, E y Fr se encuentra que son

$$\begin{aligned} E &= y + \frac{Q^2}{2gA^2} \\ &= 2.5 + \frac{3^2}{2 \times 9.81 \times 6.25^2} = 2.51\ \text{m} \\ \text{Fr} &= \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}} \\ &= \sqrt{\frac{3^2 \times 5}{9.81 \times 6.25^3}} = 0.137 \end{aligned}$$

La profundidad hidráulica es

$$\frac{A}{B} = \frac{6.25}{5.0} = 1.25\ \text{m}$$

La profundidad alterna se calcula usando la ecuación de la energía. Reconociendo que $A = y^2$, tenemos

$$\begin{aligned} 2.51 &= y + \frac{3^2}{2 \times 9.81 \times (y^2)^2} \\ &= y + \frac{0.459}{y^4} \end{aligned}$$

Una solución de prueba y error da $y = 0.71$ m.

10.4.2 Uso de la ecuación de la energía en transiciones

Como ya se mencionó en la sección 10.2.1, una transición es un tramo relativamente corto de un canal donde la profundidad y la velocidad cambian, creando un flujo no uniforme de variación rápida. El mecanismo para estos cambios en el flujo es por

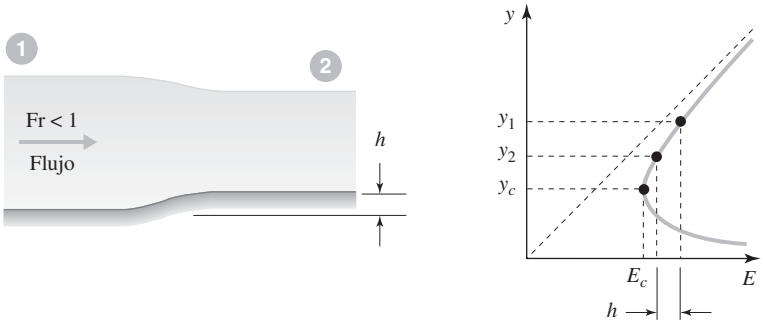


Fig. 10.7 Constricción en un canal: (a) fondo del canal elevado; (b) diagrama de la energía específica.

lo general una alteración de uno o más parámetros geométricos del canal.[3] Dentro de estas regiones, la ecuación de la energía puede usarse de manera efectiva para analizar el flujo en una transición o para ayudar en el diseño de una transición. En esta sección damos dos aplicaciones para demostrar la metodología; otros tipos de transiciones pueden tratarse de manera similar.

Constricción en un canal. Considere un canal rectangular cuyo fondo está elevado una distancia h a lo largo de una región corta (figura 10.7a). El cambio en profundidad en la transición puede analizarse mediante la ecuación de la energía y, como primera aproximación, se puede hacer caso omiso de las pérdidas. Supongamos que se conoce la energía específica corriente arriba de la transición. Reconociendo que $H = E + z$, la ecuación 10.4.2 se aplica desde la ubicación 1 hasta el extremo de la región de transición, ubicación 2:

$$E_1 = E_2 + h \tag{10.4.16}$$

La profundidad y_2 en el extremo de la transición puede visualizarse por inspección del diagrama $E - y$ (figura 10.7b). Si el flujo en la ubicación 1 es subcrítico, y_1 está ubicada en la parte superior como se muestra en el diagrama de la energía específica. La magnitud de h se selecciona para que sea relativamente pequeña, de modo que $y_2 > y_c$, por lo que el flujo en la ubicación 2 es similarmente subcrítico; no obstante, cuando h aumenta aun más, en la transición se alcanza en última instancia un estado de energía mínima. La condición de energía mínima se conoce a veces como *condición de estrangulamiento* o *flujo estrangulado.* Una vez que se presenta el flujo estrangulado, cuando h aumenta, las variaciones en profundidad y velocidad ya no se localizan en la cercanía de la transición. Pueden observarse influencias para distancias considerables tanto corriente arriba como corriente abajo de la transición.

CONCEPTO CLAVE *La condición de flujo estrangulado o condición de estrangulamiento implica que existe energía específica mínima dentro de la transición.*

El lector debe verificar que en una región de transición, un estrechamiento del ancho del canal creará una situación similar a una elevación del fondo del canal. La región de transición más general es la que posee un cambio tanto en el ancho como en la elevación del fondo.

[3]Una excepción notable para esto es el salto hidráulico, el cual requiere que se utilice el principio de la cantidad de movimiento y se considerará en la sección 10.5.2.

Ejemplo 10.4

Un canal rectangular de 3 m de ancho transporta agua a una profundidad $y_1 = 1.55$ m y con una velocidad $V_1 = 1.83$ m/s. El flujo entra a una región de transición como se muestra en la figura E10.4, en donde la elevación del fondo sube una distancia $h = 0.20$ m. Determine la profundidad y la velocidad en la transición, y el valor de h para que ocurra estrangulamiento.

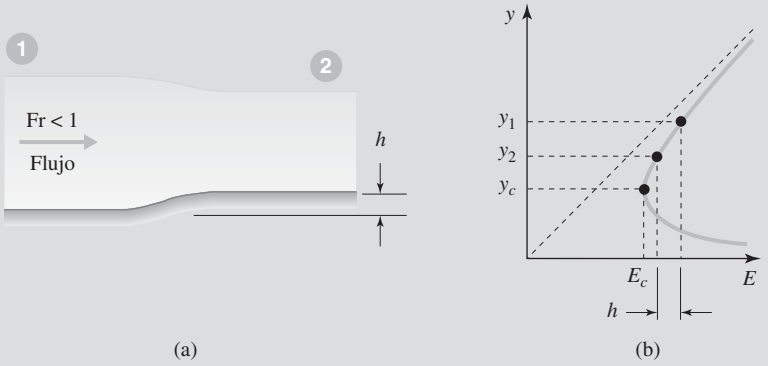


Fig. E10.4

Solución

Use la ecuación 10.4.4 para calcular la descarga específica como

$$q = V_1 y_1 = 1.83 \times 1.55 = 2.84 \text{ m}^2/\text{s}$$

El número de Froude en la ubicación 1 es

$$\text{Fr} = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}} = \frac{1.83}{\sqrt{9.81 \times 1.55}} = 0.47$$

lo cual es menor que la unidad. Por tanto, el flujo en la ubicación 1 es subcrítico. La energía específica en la ubicación 1, usando la ecuación 10.4.3, se encuentra que es

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 1.55 + \frac{1.83^2}{2 \times 9.81} = 1.72 \text{ m}$$

La energía específica en la ubicación 2 se encuentra, usando la ecuación 10.4.16, que es

$$E_2 = E_1 - h = 1.72 - 0.20 = 1.52 \text{ m}$$

Si $E_2 > E_c$, es posible determinar la profundidad y_2. En consecuencia, E_c se calcula primero. De las ecuaciones 10.4.10 y 10.4.11 las condiciones críticas son

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{2.84^2}{9.81}\right)^{1/3} = 0.94 \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3y_c}{2} = 3 \times \frac{0.94}{2} = 1.41 \text{ m}$$

Por tanto, como $E_2 > E_c$, podemos continuar con el cálculo de y_2. La profundidad y_2 puede evaluarse sustituyendo los valores conocidos en la ecuación 10.4.5:

$$1.52 = y_2 + \frac{2.84^2}{2 \times 9.81 \times y_2^2}$$

La solución es

$$y_2 = 1.26 \text{ m}$$

$$\therefore V_2 = \frac{q}{y_2}$$

$$= \frac{2.84}{1.26} = 2.25 \text{ m/s}$$

El flujo en la ubicación 2 es subcrítico puesto que no hay manera en que el flujo se pueda hacer supercrítico en la transición con la geometría dada.

El valor de h para que el flujo crítico aparezca en la ubicación 2 se determina haciendo $E_2 = E_c$ en la ecuación 10.4.16:

$$h = E_1 - E_c = 1.72 - 1.40 = 0.31 \text{ m}$$

Entrada a un canal con flujo crítico. Considere que un flujo entra a un canal desde un lago o un embalse pasando sobre una cresta corta y redondeada, como se muestra en la figura 10.8. Si la pendiente del canal es pronunciada, el flujo descargará libremente hacia el canal y ocurrirá un flujo supercrítico corriente abajo de la región de entrada. Aguas arriba de la cresta el flujo puede ser considerado como subcrítico. Como el régimen de flujo en la cresta cambia de subcrítico a supercrítico, el flujo en la cresta debe ser crítico. Para determinar la descarga, suponemos que tiene lugar un flujo rápidamente variado sobre la cresta en conjunto con la condición de flujo crítico en la cresta. Un ejemplo ilustra el procedimiento.

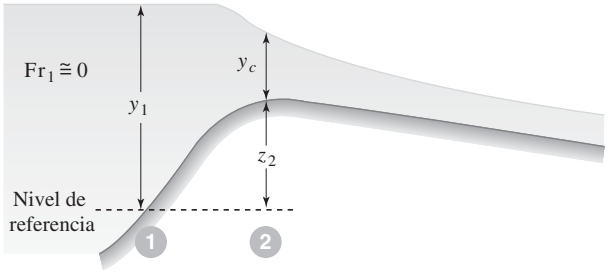


Fig. 10.8 Descarga de un embalse con flujo crítico a la entrada del canal.

Ejemplo 10.5

Desde un embalse fluye agua libremente hacia un canal trapezoidal con ancho de fondo $b = 5.0$ m y parámetros de la pendiente lateral $m_1 = m_2 = 2.0$. La elevación de la superficie del agua en el estanque es 2.3 m arriba de la cresta de entrada. Suponiendo pérdidas insignificantes en la transición y una velocidad extremadamente pequeña en el embalse corriente arriba de la entrada, encuentre la profundidad crítica en la transición y la descarga hacia el canal.

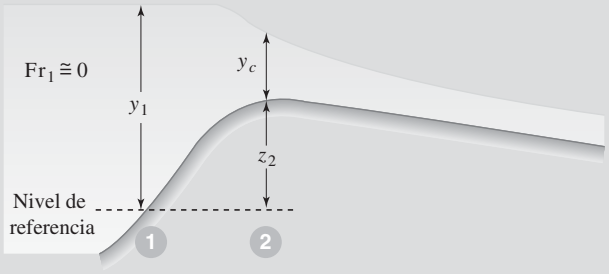


Fig. E10.5

Solución

La energía total en la ubicación 1 en la figura E10.5 es y_1 puesto que la energía cinética en el embalse es insignificante ($V_1 \approx 0$). Igualando las energías totales en las ubicaciones 1 y 2 tendremos

$$y_1 = E_2 + z_2$$

Como las condiciones críticas se presentan en la ubicación 2, las ecuaciones 10.4.12 y 10.4.14 pueden combinarse para eliminar la descarga, con el resultado

$$E_2 = y_c + \frac{A}{2B}$$

La eliminación de E_2 en las dos ecuaciones da la expresión

$$y_1 - z_2 = y_c + \frac{A}{2B} = y_c + \frac{by_c + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)y_c^2}{2[\,b + (m_1 + m_2)y_c\,]}$$

o bien, con la información dada, la expresión se convierte en

$$2.3 = y_c + \frac{5y_c + \frac{1}{2}(2 + 2)y_c^2}{2[\,5 + (2 + 2)y_c\,]}$$

La relación previa es cuadrática en y_c. La raíz positiva es seleccionada, lo cual dará

$$y_c = 1.70 \text{ m}$$

De manera subsiguiente, se puede hallar que $A = 14.28$ m^2 y $B = 11.80$ m. Use la ecuación 10.14 para hallar que la descarga es

$$Q = \sqrt{\frac{gA^3}{B}}$$

$$= \sqrt{\frac{9.8 \times 14.3^3}{11.8}} = 49.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pérdidas de energía. Se sabe que las pérdidas de energía en expansiones y contracciones son relativamente pequeñas cuando el flujo es subcrítico; no obstante, puede ser necesario ante ciertas circunstancias que se consideren las pérdidas. La ecuación 10.4.2 incluye un término de pérdida que puede considerar las pérdidas de transición. Pueden emplearse las siguientes fórmulas deducidas experimentalmente. Para una expansión en un canal use

$$h_L = K_e \left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \right) \tag{10.4.17}$$

y para una contracción en un canal use

$$h_L = K_c \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) \tag{10.4.18}$$

En la ecuación 10.4.17, K_e es un coeficiente de expansión; se ha sugerido (King y Brater, 1963) usar $K_e = 1.0$ para expansiones repentinas o abruptas, y $K_e = 0.2$ para expansiones bien diseñadas o redondeadas. Para el coeficiente de contracción K_c en la ecuación 10.4.18, use $K_c = 0.5$ para contracciones repentinas y $K_c = 0.10$ para contracciones bien diseñadas. Cuando el flujo sea supercrítico, pueden generarse patrones de ondas estacionarias significativos en todo el flujo y corriente abajo de la región de transición; para estos flujos, un diseño apropiado requiere que se considere la mecánica de ondas (Chow, 1959; Henderson, 1966).

10.4.3 Medición del flujo

El medio más común para medir una descarga en un canal abierto es usar un vertedero. Básicamente, un **vertedero** es un dispositivo colocado en un canal que obliga a que el flujo pase por una abertura diseñada para medir la descarga. Se han diseñado vertederos especializados para necesidades específicas; en esta sección se presentarán dos tipos fundamentales, el de cresta ancha y el de cresta afilada.

Vertedero: *Dispositivo colocado en un canal que obliga al flujo a pasar por una abertura, con frecuencia diseñado para medir la descarga.*

CONCEPTO CLAVE *Un flujo convergirá y acelerará hasta una condición crítica cerca de la cresta del vertedero.*

Un vertedero apropiadamente diseñado exhibirá un flujo subcrítico corriente arriba de la estructura, y el flujo convergirá y acelerará hasta una condición crítica cerca de la parte superior o *cresta* del vertedero. En consecuencia, puede hacerse una correlación entre la descarga y una profundidad corriente arriba del vertedero. El derrame corriente abajo se denomina *capa* o *lámina vertiente*, que por lo general descarga libremente hacia la atmósfera. Existen diversos factores que afectan la operación de un vertedero; entre los más importantes están el patrón de flujo tridimensional, los efectos de la turbulencia, la resistencia por fricción, la tensión superficial y la cantidad de ventilación abajo de la capa. Las deducciones simplificadas presentadas aquí están basadas en la ecuación de Bernoulli; los otros efectos pueden considerarse si se modifica la descarga ideal con un *coeficiente de descarga,* C_d. La descarga real es la descarga ideal multiplicada por el coeficiente de descarga. Cuando sea posible, es ventajoso calibrar un vertedero particular en el lugar para obtener la precisión deseada.

Vertedero de cresta ancha. En la figura 10.9 se ilustra un vertedero de cresta ancha. Tiene una elevación suficiente sobre el fondo del canal para estrangular el flujo, y es lo suficientemente largo para que las líneas de corriente de rebose se hagan paralelas, resultando en una distribución de presión hidrostática. Luego, en alguna posición, por ejemplo la ubicación 2, existe una condición de flujo crítico.

Considere un canal horizontal rectangular y sea h la altura del vertedero. La ubicación 1 es un punto corriente arriba del vertedero donde el flujo está relativamente sin perturbaciones, y Y es la distancia vertical desde la parte superior del vertedero hasta la superficie libre en ese punto. Aplicando la ecuación de Bernoulli de la ubicación 1 a la ubicación 2 en la superficie libre y haciendo caso omiso de la carga de energía cinética en la ubicación 1 ($V_1 \approx 0$), tenemos el resultado

$$h + Y = h + y_c + \frac{V_c^2}{2g} \tag{10.4.19}$$

Despejando V_c,

$$V_c = \sqrt{2g(Y - y_c)} \tag{10.4.20}$$

Para un vertedero cuyo ancho normal al flujo es b, la descarga ideal es

$$Q = by_cV_c = by_c\sqrt{2g(Y - y_c)} \tag{10.4.21}$$

Reconociendo que $Y = E_c$, la ecuación 10.4.11 se usa para relacionar y_c con Y, y cuando se sustituye en la ecuación 10.4.21 el resultado es

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}g}\; bY^{3/2} \tag{10.4.22}$$

Para un borde apropiadamente redondeado corriente arriba en el vertedero, la ecuación 10.4.22 es precisa a no más de varios puntos porcentuales del flujo real; por tanto, no se aplica un coeficiente de descarga.

Vertedero de cresta afilada. Un vertedero de cresta afilada es una placa vertical colocada normal al flujo y que contiene una cresta con bordes afilados para que la lámina vertiente se comporte como un chorro libre. La figura 10.10 muestra un vertedero rectangular con cresta horizontal que se extiende a todo lo ancho del canal. Debido a la presencia de las paredes laterales, no existen contracciones laterales.

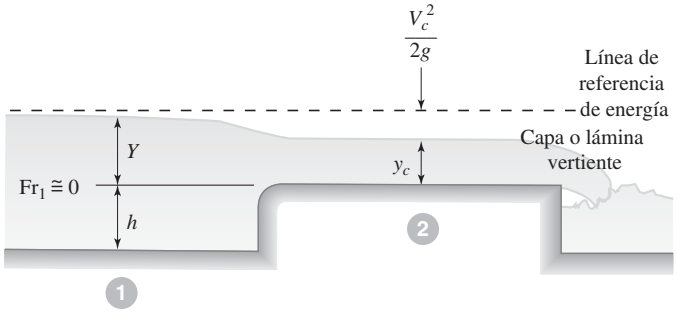
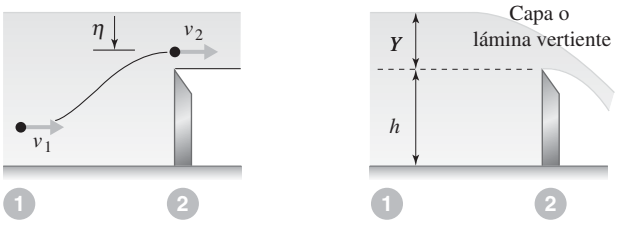


Fig. 10.9 Vertedero de cresta ancha.



(a) (b)

Fig. 10.10 Vertedero rectangular de cresta afilada: (a) flujo ideal; (b) flujo real

Definamos una situación de flujo idealizada: el flujo en el plano vertical no se contrae cuando pasa sobre la cresta, de modo que las líneas de corriente son paralelas, la presión atmosférica está presente en la lámina vertiente, y existe un flujo uniforme en la ubicación 1 con energía cinética insignificante ($v_1 \approx 0$). La ecuación de Bernoulli se aplica a lo largo de una línea de corriente representativa (figura 10.10a) con v_2 despejada y la velocidad local en la lámina vertiente:

$$v_2 = \sqrt{2g\eta} \tag{10.4.23}$$

Si b es el ancho de la cresta normal al flujo, la descarga ideal está dada como

$$Q = b\int_0^Y v_2\, d\eta = b\int_0^Y \sqrt{2g\eta}\, d\eta = b\frac{2}{3}\sqrt{2g}\, Y^{3/2} \tag{10.4.24}$$

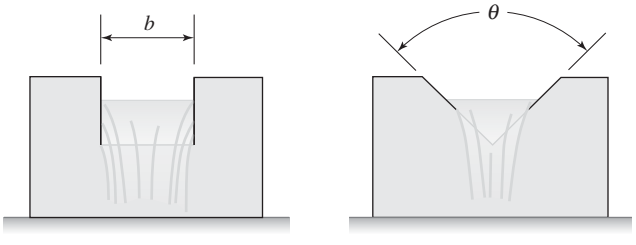
Experimentos han demostrado que la magnitud del exponente es casi correcta pero debe aplicarse un coeficiente de descarga C_d para predecir con precisión el flujo real, mostrado en la figura 10.10b:

$$Q = C_d\frac{2}{3}\sqrt{2g}\, b\, Y^{3/2} \tag{10.4.25}$$

El coeficiente de descarga considera el efecto de la contracción, la velocidad de aproximación, la viscosidad y la tensión superficial. Una fórmula obtenida experimentalmente para C_d (Chow, 1959) se ha dado como

$$C_d = 0.61 + 0.08\frac{Y}{h} \tag{10.4.26}$$

Normalmente, para una relación Y/h pequeña, $C_d = 0.61$. Si la cresta del vertedero no se extiende hasta las paredes laterales pero deja un margen para que aparezcan contracciones, como en la figura 10.11a, el ancho efectivo del vertedero puede ser aproximado con $(b - 0.2Y)$.



(a) (b)

Fig. 10.11 Vertederos rectangular y con muesca en V contraídos: (a) rectangular; (b) muesca en V.

El vertedero con muesca en V (figura 10.11b) es más preciso que el vertedero rectangular para la medición de una descarga baja. De un modo semejante al desarrollo para la relación de un vertedero rectangular, la descarga idealizada se encuentra al integrar la velocidad local en toda la lámina vertiente sobre la cresta. Se aplica un coeficiente de descarga para dar

$$Q = C_d \frac{8}{15} \sqrt{2g} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) Y^{5/2} \tag{10.4.27}$$

Para emplearse con agua, y para θ variando de 22.5º a 120º, experimentos (King y Brater, 1963) han demostrado que un valor de $C_d = 0.58$ es aceptable para cálculos en ingeniería. La deducción de la ecuación 10.4.27 se deja como ejercicio.

Como de costumbre, las ecuaciones previas pueden usarse con cualquiera de los dos conjuntos de unidades.

Ejemplo 10.6

Determine la descarga de agua sobre un vertedero de cresta afilada, con $b = 1.25$ m, $Y = 0.35$ m, $h = 1.47$ m y con paredes laterales con contracciones en los extremos. Si un vertedero con muesca en V de 90º fuera a sustituir al vertedero rectangular, ¿cuál sería la Y requerida para una descarga similar?

Solución

Para el vertedero rectangular, usando la ecuación 10.4.26, el coeficiente de descarga es

$$C_d = 0.61 + 0.08 \frac{Y}{h} = 0.61 + 0.08 \times \frac{0.35}{1.47} = 0.63$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 10.4.25 para calcular

$$\begin{aligned} Q &= C_d \frac{2}{3} \sqrt{2g}\, b Y^{3/2} \\ &= 0.63 \times \frac{2}{3} \times \sqrt{2 \times 9.81} \times 1.25 \times 0.35^{3/2} \\ &= 0.48 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Con contracciones en los extremos, el ancho efectivo del vertedero se reduce en $0.2Y$, resultando en

$$\begin{aligned} Q &= C_d \frac{2}{3} \sqrt{2g}\, (b - 0.2Y)\, Y^{3/2} \\ &= 0.63 \times \frac{2}{3} \times \sqrt{2 \times 9.81} \times (1.25 - 0.2 \times 0.35) \times 0.35^{3/2} \\ &= 0.45 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Con una descarga de $Q = 0.48$ m^3/s, use la ecuación 10.4.27 para hallar Y para el vertedero con muesca en V de 90º:

$$\begin{aligned} Y &= \left[\frac{Q}{C_a \times \frac{8}{15} \times \sqrt{2g} \tan(\theta/2)} \right]^{2/5} \\ &= \left[\frac{0.482}{0.58 \times \frac{8}{15} \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \tan 45^\circ} \right]^{2/5} = 0.66 \text{ m} \end{aligned}$$

Métodos adicionales de medición del flujo. Otros tipos de vertederos incluyen aquellos cuyas caras están inclinadas en la dirección corriente arriba y corriente abajo (triangulares, trapezoidales, irregulares). Además, la sección del vertedero de una presa puede ser considerada como un vertedero con cresta redondeada. King y Brater (1963) dan detalles de la selección y uso de estos tipos.

Un tipo especial de canal abierto es aquel en el que la geometría de la garganta se estrecha en forma tal que estrangula el flujo, creando un flujo crítico seguido de un salto hidráulico. Cuando se construya usando una sección estandarizada particular, el canal se denomina **canal medidor de Parshall**, mostrado en la figura 10.12. Numerosas calibraciones han establecido fórmulas empíricas confiables para predecir la descarga. Para anchos de garganta de 1 a 8 ft (aproximadamente 0.3 a 2.4 m), la descarga está dada por la fórmula

Canal medidor de Parshall: *Canal abierto donde la garganta se estrecha para estrangular el flujo y crear un flujo crítico seguido de un salto hidráulico.*

$$Q = 4BH^{1.522B^{0.026}} \tag{10.4.28}$$

en la que H es la profundidad medida en la ubicación corriente arriba que se muestra en la figura 10.12. Observe que H y B se miden en pies, y Q en pies cúbicos por segundo. Las otras dimensiones se usan para desarrollar la ecuación 10.4.28.

En una sección natural de un río puede ser impráctico colocar un vertedero; en ese caso se puede realizar un aforo para medir la descarga. Se establece una ubicación de control corriente arriba del sitio de aforo y para una profundidad determinada o *altura* del río, se mide el perfil de velocidad bidimensional usando medidores de corriente.

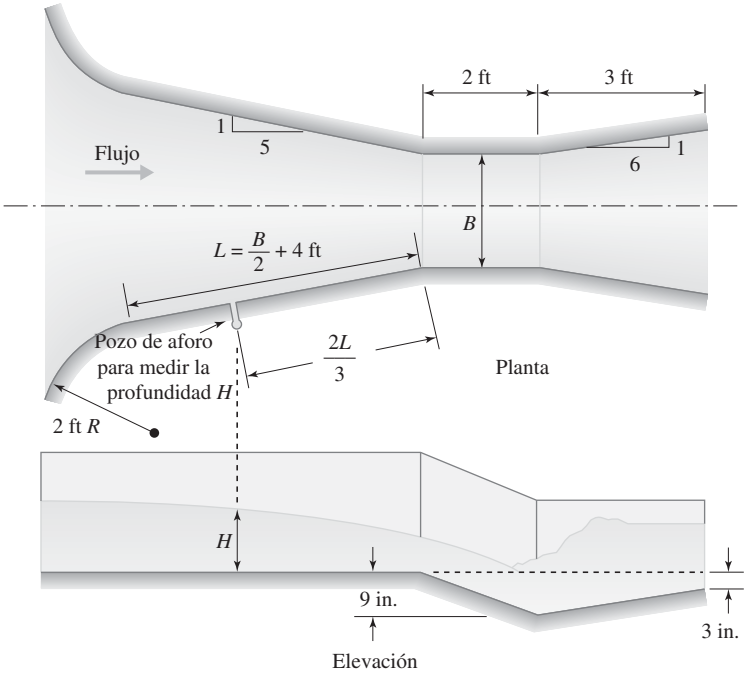


Fig. 10.12 Canal medidor de Parshall. (HENDERSON, OPEN CHANNEL FLOW, 1st, ©1966. Impresa y electrónicamente reproducida con permiso de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.)

Posteriormente, el perfil se integra numéricamente para obtener la descarga. Una serie de esas mediciones producirá una curva de altura-descarga, la cual luego puede emplearse para estimar la descarga con la altura medida del río.

10.5 CONCEPTOS DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En la sección anterior hemos visto la forma en que se aplica la ecuación de la energía a situaciones de flujo de variación rápida y, en particular, cómo se utiliza para analizar flujos en regiones de transición. La ecuación de la cantidad de movimiento también se aplica para estudiar ciertos fenómenos en esas situaciones. Cuando se usa en conjunción con las relaciones de energía y continuidad, la ecuación de la cantidad de movimiento da al usuario un medio conciso para analizar casi todos los problemas de transición importantes, incluyendo los problemas que involucran saltos hidráulicos.

10.5.1 Ecuación de la cantidad de movimiento

Considere el tramo de un canal abierto con flujo supercrítico corriente arriba de un obstáculo sumergido, como se describe en la figura 10.13a. Representa un flujo de variación rápida con un cambio abrupto en la profundidad pero sin cambio en el ancho. En general, dicho cambio puede resultar por un obstáculo en el flujo o por un salto hidráulico. El flujo corriente arriba es supercrítico y el flujo corriente abajo es subcrítico. También pueden ser considerados otros regímenes de flujo; por ejemplo, las condiciones podrían ser subcríticas en todo el volumen de control. Cada situación debe abordarse como una formulación única.

La situación de flujo generalizada puede usarse para desarrollar la ecuación de movimiento para regiones de transición. El volumen de control correspondiente a la figura 10.13a se muestra en la figura 10.13b. Se supone que la distribución de la presión es hidrostática, y las fuerzas hidrostáticas resultantes están dadas por $\gamma A\bar{y}$, donde la distancia $\bar{y}$ al centroide del área de la sección transversal se mide desde la superficie libre. El obstáculo sumergido (por ejemplo, una roca o un obstáculo bidimensional) imparte una fuerza F sobre el volumen de control

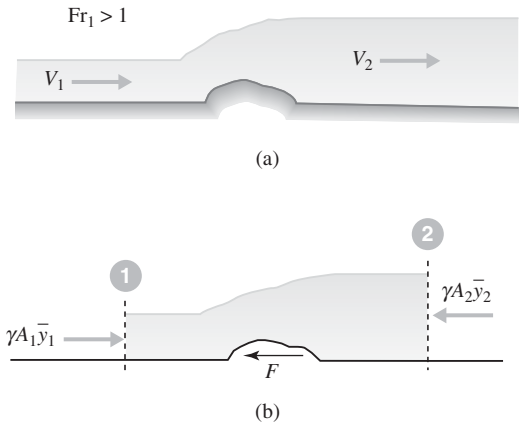


Fig. 10.13 Flujo en canal sobre un obstáculo: (a) flujo idealizado; (b) volumen de control.

con una dirección opuesta a la dirección del flujo. La ecuación de la cantidad de movimiento lineal, presentada en la sección 4.5, se aplica al volumen de control en la dirección x para obtener

$$\gamma A_1 \overline{y}_1 - \gamma A_2 \overline{y}_2 - F = \rho Q\,(V_2 - V_1) \tag{10.5.1}$$

Observe que las fuerzas friccionales no han sido incluidas en la ecuación 10.5.1; suelen ser muy pequeñas respecto a los otros términos, de modo que puede hacerse caso omiso de ellas. Del mismo modo, las fuerzas gravitacionales en la dirección del flujo son insignificantes para las pequeñas pendientes de canal consideradas. La ecuación 10.5.1 puede reacomodarse en la forma

$$M_1 - M_2 = \frac{F}{\gamma} \tag{10.5.2}$$

en la que M_1 y M_2 son términos que contienen la fuerza hidrostática y el flujo de la cantidad de movimiento en las ubicaciones 1 y 2, respectivamente. La cantidad M recibe el nombre de *función de la cantidad de movimiento*, y para una sección prismática general está dada por

$$M = A\overline{y} + \frac{Q^2}{gA} \tag{10.5.3}$$

Para una sección rectangular, $A\overline{y} = by^2/2$, y la función de la cantidad de movimiento es

$$M = \frac{by^2}{2} + \frac{bq^2}{gy} = b\left(\frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy}\right) \tag{10.5.4}$$

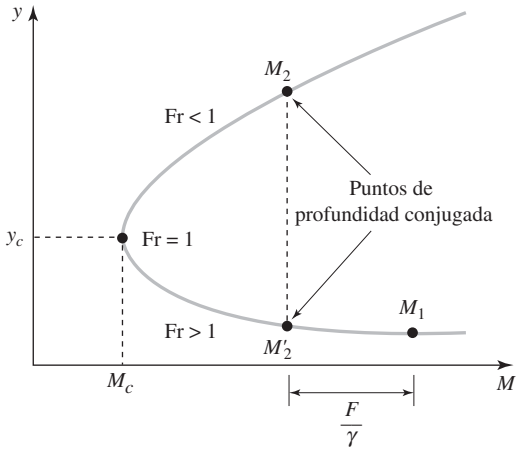


Fig. 10.14 Variación de la función de la cantidad de movimiento con la profundidad.

Profundidades conjugadas o consecuentes: *Las dos profundidades de flujo que son posibles para un valor determinado de la función de la cantidad de movimiento y descarga.*

La ecuación 10.5.4 está trazada en la figura 10.14. Existen dos raíces y positivas para una M y q dadas; reciben el nombre de profundidades **conjugadas** o **consecuentes**. El tramo superior de la curva ($y > y_c$) aplica al flujo subcrítico y el tramo inferior ($y < y_c$) al flujo supercrítico. Se muestran los valores de M_1 y M_2 para el ejemplo de la figura 10.13a, indicando flujo supercrítico corriente arriba y flujo subcrítico corriente abajo del obstáculo sumergido. La distancia horizontal entre M_1 y M_2 es igual a F/γ. El flujo corriente abajo sería supercrítico si no hubiera salto hidráulico; el valor correspondiente de la función de la cantidad de movimiento está indicado por M_2'.

La profundidad asociada con una M mínima se encuentra derivando M respecto a y en la ecuación 10.5.3:

$$\frac{dM}{dy} = A - \frac{BQ^2}{gA^2} = 0 \tag{10.5.5}$$

Observe[4] que $d(A\bar{y})/dy = A$. La condición para una M mínima es entonces

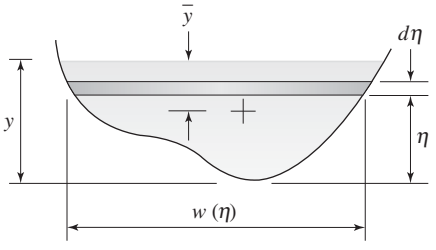
$$Q^2B = gA^3 \tag{10.5.6}$$

Este resultado es idéntico a la ecuación 10.4.14. Entonces la condición de M mínima es equivalente a la de energía mínima: flujo crítico con un número de Froude igual a la unidad.

Ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a una región de transición. Con mucha frecuencia se aplica la ecuación de la cantidad de movimiento en situaciones donde se desea determinar la fuerza resultante que actúa en un lugar específico, o para hallar el cambio en profundidad o velocidad cuando hay una pérdida importante no definida en toda la región de transición. Es importante recordar que las ecuaciones de la energía y continuidad también están a nuestra disposición, y debemos determinar cuáles relaciones son necesarias. En algunos casos, junto con la ecuación de continuidad, deben aplicarse las ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento. A continuación damos un ejemplo para ilustrar la técnica.

[4]Esto se puede observar a partir de la definición $\bar{y} = (1/A) \int (y - \eta)\, dA$. La diferenciación de $(\bar{y}A)$ usando la regla de Leibniz del cálculo resulta en

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(\bar{y}A) &= \frac{d}{dy}\int_0^y (y-\eta)w(\eta)d\eta \\ &= (y-\eta)w(\eta)\Big|_{\eta=y} + \int_0^y w(\eta)d\eta \\ &= 0 + A = A\end{aligned}$$



Ejemplo 10.7

Por un canal rectangular de 5 m de ancho, se descarga agua a 14.0 m^3/s (figura E10.7). Encuentre la fuerza ejercida sobre la compuerta de desagüe cuando $y_1 = 2$ m y $y_2 = 0.5$ m.

Fig. E10.7

Solución

Usando la ecuación 10.5.3, las funciones de la cantidad de movimiento en 1 y 2 son

$$M_1 = A_1\bar{y}_1 + \frac{Q^2}{gA_1}$$
$$= 5 \times 2 \times 1 + \frac{(14)^2}{9.81 \times 5 \times 2} = 12.0 \text{ m}^3$$
$$M_2 = A_2\bar{y}_2 + \frac{Q^2}{gA_2}$$
$$= 5 \times 0.5 \times 0.25 + \frac{(14)^2}{9.81 \times 5 \times 0.5} = 8.62 \text{ m}^3$$

La fuerza resultante que actúa sobre el volumen de control de fluido se determina, usando la ecuación 10.5.2, que es

$$F = \gamma(M_1 - M_2)$$
$$= 9800 \times (12.0 - 8.62) = 33\,100 \text{ N}$$

Entonces la fuerza sobre la compuerta actúa en el sentido de corriente abajo con una magnitud de 33.1 kN.

10.5.2 Salto hidráulico

Salto hidráulico: *Fenómeno donde un fluido que se mueve en un estado supercrítico experimentará una transición a un estado subcrítico.*

Un **salto hidráulico** es un fenómeno en el que un fluido que se mueve en un estado supercrítico experimentará una transición a un estado subcrítico. Las condiciones límite corriente arriba y corriente abajo del salto dictarán su fuerza así como su ubicación. Un salto hidráulico idealizado se muestra en la figura 10.15. La fuerza del salto varía ampliamente, como se muestra en la tabla 10.2, con perturbaciones relativamente moderadas que ocurren en un extremo, con separación importante y formación de remolinos que tienen lugar en el otro. Como consecuencia, se considera que la pérdida de energía asociada con el salto es desconocida, de manera que la ecuación de la energía no se usa en el análisis inicial. Se supone que no hay

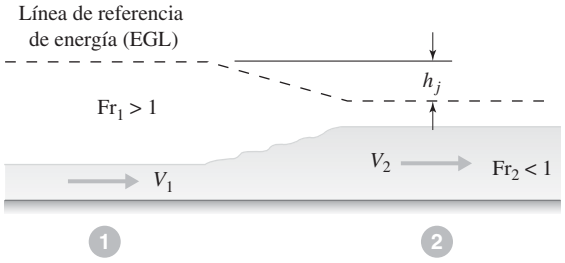


Fig. 10.15 Salto hidráulico idealizado.

fricción a lo largo del fondo ni un obstáculo sumergido; esto es, igualando F a cero, la ecuación 10.5.2 muestra que $M_1 = M_2$. Para una sección rectangular, la ecuación 10.5.4 puede sustituirse en la relación, permitiéndonos obtener

$$\frac{q^2}{g}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right) = \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2) \tag{10.5.7}$$

Reacomodando, factorizando y observando que $\mathrm{Fr}_1^2 = q^2/gy_1^3$ tendremos

$$\mathrm{Fr}_1^2 = \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1}\left(\frac{y_2}{y_1} + 1\right) \tag{10.5.8}$$

Esta ecuación es adimensional y relaciona el número de Froude corriente arriba del salto con la relación entre las profundidades corriente abajo y corriente arriba. Puede verse que la ecuación 10.5.8 es cuadrática respecto a y_2/y_1 siempre que se conozca Fr_1. Despejando y_2/y_1 obtenemos

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right) \tag{10.5.9}$$

El signo positivo frente al radical se ha elegido para obtener una solución físicamente significativa.

Merece la pena observar que la ecuación 10.5.9 también es válida si se invierten los subíndices en las profundidades y en el número de Froude:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_2^2} - 1\right) \tag{10.5.10}$$

La pérdida de energía teórica asociada con un salto hidráulico en un canal rectangular puede determinarse una vez que se conozcan las profundidades y los flujos en las ubicaciones 1 y 2. La ecuación de la energía se aplica de 1 a 2, incluyendo la

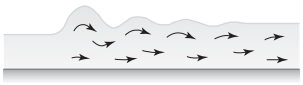
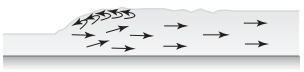
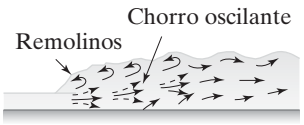
pérdida de carga h_j a través del salto, como se representa en la figura 10.15. Combinando la ecuación de la energía con la ecuación 10.5.7 y la ecuación de continuidad, después de un poco de álgebra podemos demostrar que

$$h_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \tag{10.5.11}$$

Las ecuaciones 10.5.8 a 10.5.11 son formas útiles para resolver la mayoría de problemas de salto hidráulico en un canal rectangular.

La tabla 10.2 muestra las diversas formas que un salto hidráulico puede tomar respecto al número de Froude corriente arriba. Es frecuente que un salto permanente, bien establecido, con $4.5 < \text{Fr} < 9.0$, se utilice como disipador de energía corriente abajo de una presa o vertedero. Se caracteriza por la existencia de olas rompientes y remolinos acompañados de un chorro sumergido con turbulencia y disipación de energía significativas en el cuerpo principal del salto; corriente abajo, la superficie del agua está relativamente en calma. Para números de Froude fuera del intervalo de 4.5 a 9.0, existen saltos menos deseables que pueden crear olas superficiales indeseables corriente abajo. La longitud de un salto es la distancia desde la cara frontal hasta precisamente corriente abajo donde existe agua en calma; un salto permanente tiene una longitud aproximada de seis veces la profundidad corriente arriba.

Tabla 10.2 Saltos hidráulicos en canales rectangulares horizontales

Fr *corriente arriba*	*Tipo*	*Descripción*	
1.0–1.7	Ondulante	Superficie encrespada u ondulante del agua; se forman remolinos superficiales cerca de Fr = 1.7	
1.7–2.5	Débil	Flujo prevalente en calma; baja pérdida de energía	
2.5–4.5	Oscilante	Chorros intermitentes desde el fondo hasta la superficie, causando olas corriente abajo persistentes	
4.5–9.0	Permanente	Estable y bien equilibrado; disipación de energía contenida en el cuerpo principal del salto	
>9.0	Fuerte	Efectivo, pero con superficie encrespada, ondulante corriente abajo	

Fuente: Adaptada con permiso de Chow, 1959. (Adaptada de Chow, 1959)

Ejemplo 10.8

Un salto hidráulico está situado en un canal rectangular de 4 m de ancho. La descarga en el canal es de 7.5 m^3/s, y la profundidad corriente arriba del salto es de 0.20 m. Determine la profundidad corriente abajo del salto, los números de Froude corriente arriba y corriente abajo, y la cantidad de energía disipada por el salto.

Solución

Encuentre la descarga unitaria y el número de Froude corriente arriba:

$$q = \frac{Q}{b}$$
$$= \frac{7.5}{4} = 1.88 \text{ m}^2/\text{s}$$
$$\text{Fr}_1 = \frac{q}{\sqrt{gy_1^3}}$$
$$= \frac{1.88}{\sqrt{9.81 \times 0.20^3}} = 6.71$$

La profundidad corriente abajo se calcula, usando la ecuación 10.5.9, que es

$$y_2 = \frac{y_1}{2}(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1)$$
$$= \frac{0.20}{2}(\sqrt{1 + 8 \times 6.71^2} - 1) = 1.80 \text{ m}$$

El número de Froude corriente abajo es

$$\text{Fr}_2 = \frac{q}{\sqrt{gy_2^3}}$$
$$= \frac{1.88}{\sqrt{9.81 \times 1.80^3}} = 0.25$$

La pérdida de carga en el salto está dada por la ecuación 10.5.11:

$$h_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2}$$
$$= \frac{(1.80 - 0.20)^3}{4 \times 0.20 \times 1.80} = 2.84 \text{ m}$$

Por tanto, la cantidad de disipación de energía en el salto es (vea la ecuación 4.5.25)

$$\gamma Q h_j = 9800 \times 7.5 \times 2.84 = 2.09 \times 10^5 \text{ W} \quad \text{o} \quad 209 \text{ kW}$$

CONCEPTO CLAVE *Un salto hidráulico de traslación es un oleaje positivo, que mantiene un frente estable conforme se propaga hacia una región no perturbada.*

Salto hidráulico de traslación. Un salto hidráulico de traslación, alternativamente conocido como *oleaje* o *aguaje*, se muestra en la figura 10.16a; se denomina oleaje positivo en el sentido de que mantiene un frente estable conforme se propaga a una velocidad w hacia una región sin perturbaciones. Dicha ola puede ser generada al cerrar abruptamente una compuerta corriente abajo o al liberar

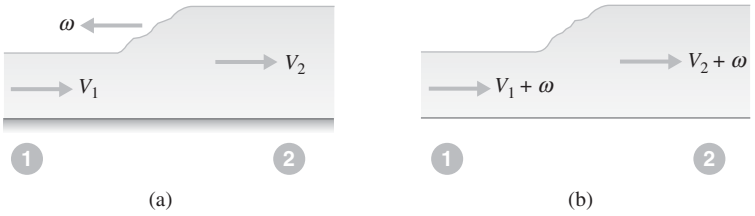


Fig. 10.16 Salto hidráulico de traslación: (a) frente moviéndose corriente arriba; (b) el frente parece estacionario por la superposición.

agua rápidamente en un lugar corriente arriba en un canal. Esta situación de flujo no permanente de variación rápida puede ser analizada cómodamente, como problema de estado estable, al superponer la velocidad del aguaje w en el sentido opuesto sobre el volumen de control (figura 10.16b). El frente parece estacionario, y las velocidades relativas en las ubicaciones 1 y 2 son iguales a $V_1 + w$ y $V_2 + w$, respectivamente.

Supongamos un aguaje de traslación en un canal horizontal rectangular, sin fricción. La ecuación 10.5.9 puede aplicarse al sustituir $V_1 + w$ en lugar de V_1 en la definición de Fr_1 para obtener

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8\frac{(V_1 + w)^2}{gy_1}} - 1\right] \tag{10.5.12}$$

La relación de continuidad aplicada al volumen de control de la figura 10.16b es

$$y_1(V_1 + w) = y_2(V_2 + w) \tag{10.5.13}$$

Las ecuaciones 10.5.12 y 10.5.13 contienen cinco parámetros: y_1, y_2, V_1, V_2 y w. Tres de ellos deben ser conocidos para despejar los dos restantes. Dependiendo de cuáles variables sean desconocidas, la solución de las ecuaciones 10.5.12 y 10.5.13 será explícita o estará basada en un procedimiento de prueba y error.

Ejemplo 10.9

Por un canal rectangular con una profundidad de 1.5 m fluye agua con una velocidad de 2.5 m/s. Abruptamente se cierra una compuerta, formando un oleaje que se desplaza aguas arriba. Encuentre la velocidad del oleaje y la profundidad detrás del oleaje.

Solución

Como la compuerta está cerrada, la velocidad corriente abajo es $V_2 = 0$. Las ecuaciones 10.5.12 y 10.5.13 contienen dos incógnitas ω y y_2. Combinándolas para eliminar y_2 y sustituyendo $V_1 = 2.5$ y $y_1 = 1.5$ resulta en la relación

$$2.5 + w = \frac{w}{2}\left[\sqrt{1 + 8\frac{(2.5 + w)^2}{9.81 \times 1.5}} - 1\right]$$

(*continúa*)

Una solución de prueba y error, da $w = 3.41$ m/s. Use la ecuación 10.5.13 para calcular y_2:

$$y_2 = y_1 \frac{V_1 + w}{V_2 + w}$$

$$= 1.5 \times \frac{2.5 + 3.41}{3.41} = 2.60 \text{ m}$$

Arrastre en objetos sumergidos. Si un objeto está sumergido en un flujo es posible describir la fuerza de arrastre como sigue:

$$F = C_D A \rho \frac{V^2}{2} \tag{10.5.14}$$

en la que C_D es el coeficiente de arrastre y A es el área proyectada normal al flujo. En la sección 8.3.1 se analizaron los coeficientes de arrastre para diversos objetos sumergidos. En un flujo en un canal abierto, como está presente una superficie libre, el coeficiente de arrastre debe modificarse para tomar en cuenta el arrastre por las olas así como el arrastre debido a la fricción y separación. Ejemplos de objetos sumergidos en un flujo en un canal abierto incluyen acueductos y pilares de puentes; en estas situaciones, un salto hidráulico puede no estar presente.

En la figura 10.17 se ilustra una aplicación de diseño. Los bloques deflectores son dispositivos colocados en un tramo de canal conocido como *estanque de amortiguamiento* para estabilizar la ubicación de un salto hidráulico y ayudar en la disipación de la energía del flujo. Por lo general, se usan para un Fr_1 mayor que 4.5. El ejemplo 10.10 demuestra la forma en que los bloques deflectores reducen la magnitud de la función de la cantidad de movimiento corriente abajo de un salto hidráulico, resultando en una profundidad corriente abajo reducida e incrementa la disipación de energía. En la práctica, la ecuación 10.5.14 raras veces se utiliza para analizar o diseñar un estanque de amortiguamiento, puesto que también deben ser considerados otros factores tales como los accesorios adicionales, la velocidad de aproximación, la socavación y la cavitación. En cambio, se han establecido normas de diseño basadas en observaciones de estanques ya existentes y estudios en modelos de laboratorio (U.S. Department of Interior,1974; Roberson *et al.*, 1988).

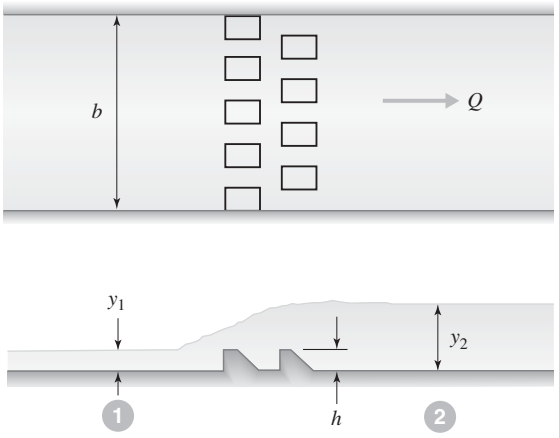


Fig. 10.17 Estanque de amortiguamiento con bloques deflectores.

Ejemplo 10.10

En la situación de flujo presentada en el ejemplo 10.8, una serie de bloques deflectores se coloca en el canal como se muestra en la figura E10.10. Experimentos de laboratorio han demostrado que la distribución tiene un coeficiente de arrastre efectivo de 0.25, siempre que los bloques se encuentren sumergidos en el flujo. Si los bloques son de 0.15 m de alto, y si la descarga, la profundidad y el ancho corriente arriba permanecen iguales como en el ejemplo 10.8, determine la profundidad corriente abajo del salto y la cantidad de energía disipada por el salto.

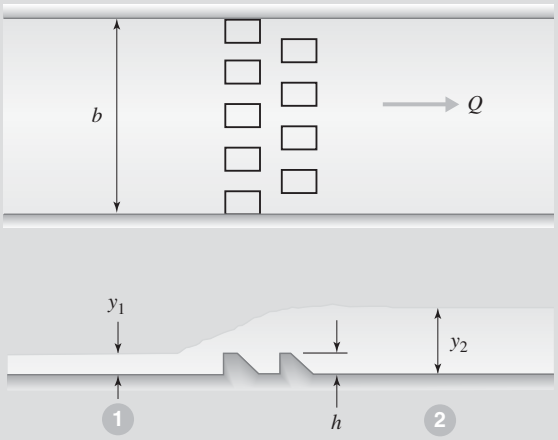


Fig. E10.10

Solución

Es necesario usar la ecuación 10.5.2 ya que los obstáculos (es decir, los bloques deflectores) están colocados dentro del volumen de control. La velocidad corriente arriba es

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{7.5}{4 \times 0.2} = 9.38 \text{ m/s}$$

La fuerza F debida a la presencia de los bloques deflectores se calcula usando la ecuación 10.5.14:

$$F = C_D A \rho \frac{V_1^2}{2} = 0.25 \times (4 \times 0.15) \times 1000 \times \frac{9.38^2}{2} = 6600 \text{ N}$$

Observe que el área frontal es el ancho del canal multiplicado por la altura de los bloques. Sustituyendo las condiciones conocidas en la ecuación 10.5.2, haciendo uso de la ecuación 10.5.4 que define M para un canal rectangular, y observando que $q = 7.5/4 = 1.88 \text{ m}^2/\text{s}$, encontramos

$$b\left(\frac{y_1^2}{2} + \frac{q^2}{g y_1}\right) - b\left(\frac{y_2^2}{2} + \frac{q^2}{g y_2}\right) = \frac{F}{\gamma}$$

$$4\left(\frac{0.2^2}{2} + \frac{1.88^2}{9.81 \times 0.2}\right) - 4\left(\frac{y_2^2}{2} + \frac{1.88^2}{9.81 y_2}\right) = \frac{6600}{9800}$$

(*continúa*)

La relación se reduce a

$$y_2^2 + \frac{0.721}{y_2} = 3.31$$

La solución para y_2 es 1.70 m. El cambio en energía específica entre las ubicaciones 1 y 2 es

$$\begin{aligned} E_1 - E_2 &= y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} - \left(y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2}\right) \\ &= 0.2 + \frac{1.88^2}{2 \times 9.81 \times 0.2^2} - \left(1.70 + \frac{1.88^2}{2 \times 9.81 \times 1.70^2}\right) \\ &= 2.94 \text{ m} \end{aligned}$$

La cantidad de disipación de energía, por tanto, es

$$\begin{aligned} \gamma Q(E_1 - E_2) &= 9800 \times 7.5 \times 2.94 \\ &= 2.16 \times 10^5 \text{ W} \quad \text{o} \quad 216 \text{ kW} \end{aligned}$$

10.5.3 Solución numérica de la ecuación de la cantidad de movimiento

Para canales no rectangulares, la relación de la cantidad de movimiento puede usarse directamente para analizar el salto hidráulico u otros problemas que requieran la ecuación de la cantidad de movimiento; la técnica se demuestra como sigue. Considere un canal trapezoidal con condiciones conocidas en la ubicación 1 corriente arriba del salto. En consecuencia, M_1 y F se evalúan como constantes y la ecuación 10.5.2 puede escribirse en la forma

$$M_2 - M_1 + \frac{F}{\gamma} = 0 \tag{10.5.15}$$

en la que M_2 es una función de y_2. Introduciendo la geometría trapezoidal en la ubicación 2, con $m_1 = m_2 = m$, la relación anterior puede escribirse como

$$\frac{y_2^2}{6}(2my_2 + 3b) + \frac{Q^2}{g(by_2 + my_2^2)} - M_1 + \frac{F}{\gamma} = 0 \tag{10.5.16}$$

De aquí puede despejarse y_2 por medio de una técnica numérica apropiada tal como reducir a la mitad el intervalo, la posición falsa, o el método de Newton, que se estudian en cualquier libro sobre métodos numéricos (vea, por ejemplo, Chapra y Canale, 1998). Observe que haciendo $F = 0$, se convierte en la relación para hallar las condiciones corriente abajo de un salto hidráulico, y que adicionalmente al hacer $m = 0$, puede resolverse un problema de salto hidráulico rectangular.

Ejemplo 10.11

Existe un salto hidráulico en un canal triangular con $m_1 = m_2 = 2.5$. La descarga es 20 m^3/s y $y_c = 1.67$ m. Corriente arriba del salto se dan los siguientes parámetros: $y_1 = 0.75$ m, $\mathrm{Fr}_1 = 7.42$ y $M_1 = 29.35\ m^3$. Determine la profundidad conjugada y_2 corriente abajo del salto.

Solución

Use la ecuación 10.5.16 con $F = 0$:

$$\frac{y_2^2}{6} \times 2 \times 2.5y_2 + \frac{20^2}{9.81 \times 2.5y_2^2} - 29.35 = 0$$

La relación se reduce a

$$f(y_2) = y_2^3 + \frac{19.58}{y_2^2} - 35.23 = 0$$

El método de la posición falsa se escoge para hallar y_2. El primer paso es establecer los límites superior e inferior, llamados y_u y y_l. Como $\mathrm{Fr}_1 > 1$, y $y_2 > y_c$, un límite inferior apropiado es $y_l = y_c = 1.67$ m. Se supone que el límite superior es de 5 m.

Iteración	y_u	y_l	$f(y_u)$	$f(y_l)$	y_r	$f(y_r)$	*Signo de* $f(y_l) \times f(y_r)$	ε
1	5	1.67	90.55	–23.55	2.357	–18.61	—	
2	5	2.357	90.55	–18.61	2.808	–10.61	—	
3	5	2.808	90.55	–10.61	3.038	–5.076	—	
4	5	3.038	90.55	–5.067	3.142	–2.231	—	
5	5	3.142	90.55	–2.231	3.187	–0.944	—	
6	5	3.187	90.55	–0.944	3.205	–0.393	—	
7	5	3.205	90.55	–0.393	3.213	–0.162	—	2.5×10^{-3}
8	5	3.213	90.55	–0.162	3.216	–0.0672	—	9.4×10^{-4}
9	5	3.216	90.55	–0.0672	3.218	–0.0277	—	4.9×10^{-4}

La solución está tabulada arriba. En cada iteración, se hace una nueva iteración y_r de la raíz:

$$y_r = \frac{y_u f(y_l) - y_l f(y_u)}{f(y_l) - f(y_u)}$$

El producto $f(y_l) \times f(y_r)$ se forma para determinar en qué subintervalo se encontrará la raíz. Si $f(y_l) \times f(y_r) < 0$, entonces $y_u = y_r$; de otro modo, $y_l = y_r$. Se requiere que inicialmente $f(y_u)$ y $f(y_l)$ tengan signo contrario. Las iteraciones continúan hasta que un error relativo ε, definido por

$$\varepsilon = \left| \frac{y_r^{\text{new}} - y_r^{\text{old}}}{y_r^{\text{old}}} \right|$$

sea menor que un valor especificado, que en el ejemplo es 0.0005. El resultado después de nueve iteraciones es $y_2 = 3.22$ m, redondeado a tres cifras significativas.

Con Mathcad o MATLAB se encuentra que la solución es menos tardada; vea el apéndice E, figuras E.2 y E.3.

10.6 FLUJO NO UNIFORME GRADUALMENTE VARIADO

La evaluación de numerosas situaciones de flujo en un canal abierto debe incluir análisis precisos de tramos relativamente largos donde la profundidad y la velocidad pueden variar pero no exhiben cambios rápidos o abruptos. En las dos secciones anteriores destacamos los fenómenos de flujo no uniforme, rápidamente variado, que ocurren en tramos relativamente cortos, o transiciones, en canales abiertos. La atención está ahora enfocada en un flujo no uniforme, gradualmente variado, donde la superficie del agua está continuamente en calma. Una diferencia importante entre los dos es que, para flujo rápidamente variado, es frecuente que puede hacerse caso omiso de las pérdidas sin consecuencias severas mientras que, para flujo gradualmente variado, es necesario incluir las pérdidas debidas al esfuerzo cortante distribuido a lo largo de la longitud del canal. El esfuerzo cortante es el mecanismo principal que se opone al flujo.

El flujo gradualmente variado es un tipo de flujo permanente, no uniforme, en el que y y V no exhiben cambios repentinos o rápidos, sino que varían en forma tan gradual que la superficie del agua puede considerarse continua. En consecuencia, es posible desarrollar una ecuación diferencial que describa la variación incremental de y respecto a x, la distancia a lo largo del canal. Un análisis de esta relación hace posible predecir las diversas tendencias que el perfil de la superficie del agua puede tomar con base en la geometría del canal, la magnitud de la descarga y las condiciones límite conocidas. Una evaluación numérica de la misma ecuación proporcionará criterios de diseño de ingeniería.

10.6.1 Ecuación diferencial para flujo gradualmente variado

En la figura 10.18 se ilustra un flujo no uniforme gradualmente variado representativo. Sobre la distancia incremental Δx, se sabe que la profundidad y la velocidad cambian lentamente. La pendiente de la línea de referencia de energía se designa como S. En contraste con un flujo uniforme, las pendientes de la línea de referencia de energía, la superficie del agua, y el fondo del canal ya no son paralelas. Como los cambios en y y V son graduales, la pérdida de energía a lo largo de la longitud incremental Δx puede ser representada por la ecuación de Chezy-Manning. Esto significa que la ecuación 10.3.13, que es válida para flujo uniforme, también puede usarse para evaluar S para una situación de flujo gradualmente variado, y que los coeficientes de rugosidad presentados en la tabla 7.3 son aplicables. Suposiciones adicionales incluyen una sección transversal regular, una pequeña pendiente en el canal, una distribución de presión hidrostática y un flujo unidimensional.

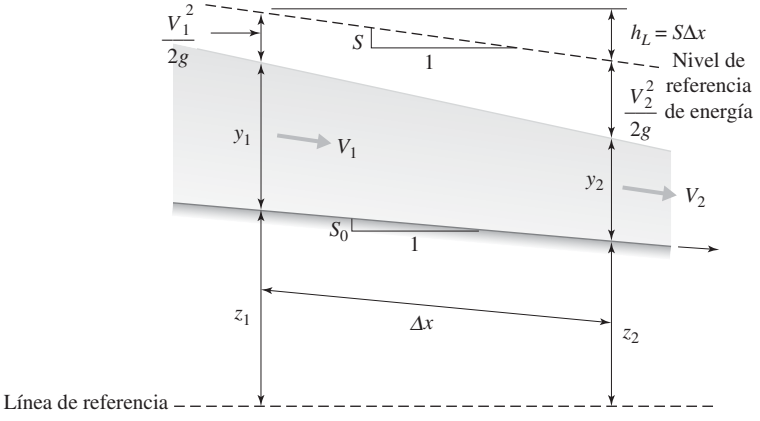


Fig. 10.18 Flujo no uniforme gradualmente variado.

La ecuación de la energía se aplica de la ubicación 1 a la ubicación 2, con el término de pérdida h_L dado por $S\Delta x$. Si la energía total en la ubicación 2 se expresa como la energía en la ubicación 1 más el cambio incremental en energía a lo largo de la distancia Δx, la ecuación 10.4.2 se convierte en

$$H_1 = H_2 + S\,\Delta x = H_1 + \frac{dH}{dx}\,\Delta x + S\,\Delta x \tag{10.6.1}$$

Se sustituye $H = y + z + V^2/2g$ y $dz/dx = -S_0$ en esta relación y se reacomodan términos para llegar a

$$S - S_0 = -\frac{d}{dx}\left(y + \frac{V^2}{2g}\right) \tag{10.6.2}$$

El término de la derecha es $-dE/dx$, y se transforma en

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dy}\frac{dy}{dx} = (1 - \mathrm{Fr}^2)\frac{dy}{dx} \tag{10.6.3}$$

(Recuerde de las ecuaciones 10.4.13 y 10.4.15 que $dE/dy = 1 - Q^2B/gA^3 = 1 - \mathrm{Fr}^2$.) Por último, al sustituir en la relación de la energía y despejar la pendiente dy/dx de la superficie del agua se encuentra que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \mathrm{Fr}^2} \tag{10.6.4}$$

donde S y Fr dependen de x. Ésta es la ecuación diferencial para flujo gradualmente variado y es válida para cualquier canal de forma regular.

Ejemplo 10.12

Usando un volumen de control apropiado para un flujo gradualmente variado, demuestre que la pendiente S de la línea de referencia de energía es equivalente a $\tau_0/\gamma R$.

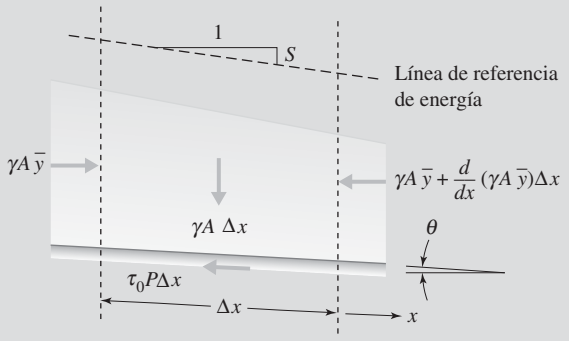


Fig. E10.12

(continúa)

Solución

El volumen de control se muestra en la figura E10.12. La fuerza resultante que actúa sobre el volumen de control se debe al cambio incremental en la presión hidrostática $[\gamma d(A\bar{y})/dx]\Delta x$, a la componente del peso en la dirección x que es $\gamma A \operatorname{sen}\theta \Delta x$, y al término de resistencia $\tau_0 P \Delta x$. Usando la ecuación de la cantidad de movimiento

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

con $V_{2x} - V_{1x} = (dV/dx)\,\Delta x$ resulta en

$$-\gamma \frac{d}{dx}(A\bar{y})\,\Delta x + \gamma A \operatorname{sen}\theta\,\Delta x - \tau_0 P\,\Delta x = \rho V A \frac{dV}{dx}\Delta x$$

Esta relación puede simplificarse si observamos que

$$\frac{d(A\bar{y})}{dx} = \frac{d(A\bar{y})}{dy}\frac{dy}{dx} = A\frac{dy}{dx}$$

y $P = A/R$. Sustituimos y dividimos la ecuación entre $\gamma A \Delta x$, el peso del volumen de control, y encontramos que

$$-\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}\theta - \frac{\tau_0}{\gamma R} = \frac{V}{g}\frac{dV}{dx}$$

Como sen $\theta \simeq S_0$ para θ pequeño, la ecuación anterior puede reacomodarse en la forma

$$\begin{aligned}\frac{\tau_0}{\gamma R} - S_0 &= -\frac{dy}{dx} - \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} \\ &= -\frac{d}{dx}\left(y + \frac{V^2}{2g}\right)\end{aligned}$$

Una vez comparada con la ecuación 10.6.2, se ve que el lado derecho es equivalente a $S - S_0$ y, en consecuencia,

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} - S_0 = S - S_0$$

o bien,

$$S = \frac{\tau_0}{\gamma R}$$

10.6.2 Perfiles de superficies de agua

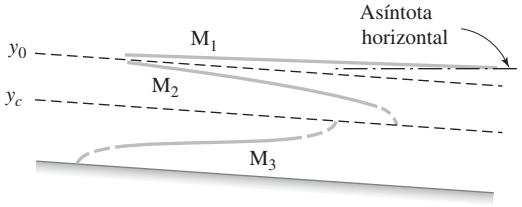
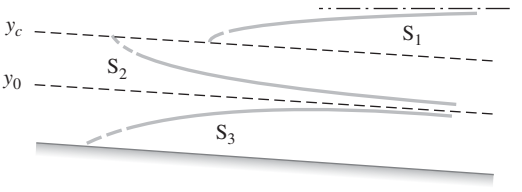
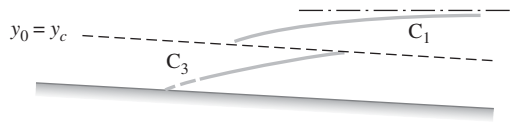
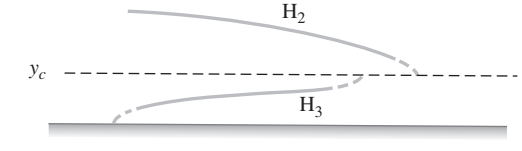
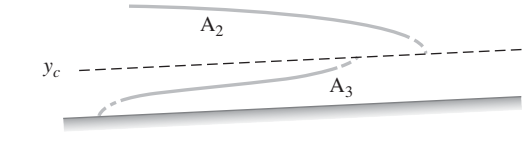
Es posible identificar una serie de perfiles de superficies de agua con base en una evaluación de la ecuación 10.6.4 (Bankhmeteff, 1932). Para el desarrollo, es esencial la determinación de las profundidades normales y críticas. Observe que y_0 y y_c están determinadas únicamente una vez establecidas las propiedades y la descarga del canal. La tabla 10.3 muestra la clasificación de los perfiles de superficies de agua. Asociada con y_c está una pendiente crítica S_c, que se encuentra al sustituir y_c en la ecuación de Chezy-Manning y despejar la pendiente. La pendiente del canal puede designarse como moderada, aguda o crítica, dependiendo de si S_0 es menor que, mayor que o igual a S_c, respectivamente. Existe una pendiente horizontal cuando $S_0 = 0$ y una pendiente adversa cuando $S_0 < 0$. Una inspección de la tabla 10.3

muestra que hay 12 perfiles posibles. Cada perfil está clasificado por una combinación alfanumérica. La letra se refiere a la pendiente del canal: M para moderada, S para aguda, C para crítica, H para horizontal y A para adversa.

El subíndice numérico designa el intervalo de y respecto a y_0 y y_c. Puede ocurrir un flujo a profundidades arriba o debajo de y_c y a profundidades arriba o debajo de y_0.

La variación de y respecto a x para cada perfil en la tabla 10.3 puede encontrarse ahora. Dados Q, n, S_0 y la geometría del canal, el análisis se reduce a la determinación de cómo varían S y Fr con y. Una inspección de la ecuación de Chezy-Manning revelará que S disminuye al aumentar y; de igual forma, el número de Froude disminuye cuando y aumenta. El numerador en la ecuación 10.6.4 asume las siguientes desigualdades: $(S_0 - S) > 0$ para $y > y_0$, y $(S_0 - S) < 0$ para $y < y_0$. Además, el denominador varía en la forma $(1 - \text{Fr}^2) > 0$ para $y > y_c$ y $(1 - \text{Fr}^2) < 0$ para $y < y_c$. Con estos criterios, el signo de dy/dx puede ser evaluado. Además, con el uso de la ecuación 10.6.2, el signo de dE/dx se manifiesta.

Tabla 10.3 Clasificación de perfiles de superficies

Pendiente del canal	*Tipo de perfil*	*Intervalo de profundidad*	Fr	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dE}{dx}$	
Moderada $S_0 < S_c$ $y_0 > y_c$	M_1	$y > y_0 > y_c$	< 1	> 0	> 0	
	M_2	$y_0 > y > y_c$	< 1	< 0	< 0	
	M_3	$y_0 > y_c > y$	> 1	> 0	< 0	
Aguda $S_0 > S_c$ $y_0 < y_c$	S_1	$y > y_c > y_0$	< 1	> 0	> 0	
	S_2	$y_c > y > y_0$	> 1	< 0	> 0	
	S_3	$y_c > y_0 > y$	> 1	> 0	< 0	
Crítica $S_0 = S_c$ $y_0 = y_c$	C_1	$y > y_c$ o y_0	< 1	> 0	> 0	
	C_3	y_c o $y_0 > y$	> 1	> 0	< 0	
Horizontal $S_0 = 0$ $y_0 \to \infty$	H_2	$y > y_c$	< 1	< 0	< 0	
	H_3	$y_c > y$	> 1	> 0	< 0	
Adversa $S_0 < 0$ y_0 no definida	A_2	$y > y_c$	< 1	< 0	< 0	
	A_3	$y_c > y$	> 1	> 0	< 0	

Los límites de los perfiles pueden establecerse como sigue:[5]

1. Cuando y tiende a y_0, S tiende a S_0. Entonces dy/dx se aproxima a cero; en otras palabras, la superficie del agua se aproxima a y_0 asintóticamente. Esto aplica a las curvas M_1, M_2, S_2 y S_3.
2. Cuando y aumenta, la velocidad se reduce y S y Fr tienden a cero, de modo que dy/dx se aproxima a S_0. Entonces la superficie se aproxima a una asíntota horizontal; las curvas M_1, S_1 y C_1 son de este tipo.
3. Cuando y se aproxima a y_c, dy/dx se hace infinita, un límite que nunca se alcanza. Para flujo supercrítico, cuando las curvas M_3, H_3 y A_3 se aproximan a y_c, se formará un salto hidráulico y creará una discontinuidad en la superficie del agua; al principio de la curva, ocurre una aceleración rápida con líneas de corriente no paralelas. Cuando el flujo es subcrítico (M_2, H_2, A_2), tiene lugar un descenso de nivel cercano a y_c, y las líneas de corriente ya no son paralelas. Para todas estas situaciones, la ecuación 10.6.4 es inválida puesto que el flujo ya no es unidimensional.

Para los perfiles mostrados en la tabla 10.3 no hay una importancia física para el límite teórico cuando y tiende a cero, ya que es necesaria una profundidad finita para la existencia de un flujo. Se deja como ejercicio demostrar que para la condición de pendiente crítica, $dy/dx > S_c$ cuando y se aproxima a y_c ya sea desde el perfil C_1 o C_2, y que dy/dx se aproxima a una asíntota horizontal cuando y se vuelve muy grande.

Ejemplo 10.13

Suponiendo un canal rectangular ancho, desarrolle el lado derecho de la ecuación 10.6.4 para demostrar cómo varía dy/dx con y.

Solución

Para un canal rectangular ancho, suponga que $b \gg y$, por lo que el perímetro mojado es aproximado por $P \simeq b$. Entonces, el radio hidráulico se convierte en $R = A/P \simeq (by)/b = y$.Observando que $Q = qb$, la ecuación de Chezy-Manning, usada para evaluar S, se simplifica a

$$S = \frac{(qbn)^2}{(by^{5/3})^2} = \frac{(qn)^2}{y^{10/3}}$$

Esto es suponiendo que en la ecuación de Chezy-Manning $c_1 = 1$. Para una sección rectangular, el cuadrado del número de Froude (véase la ecuación 10.4.9) es

$$\mathrm{Fr}^2 = \frac{q^2}{gy^3}$$

Sustituyendo en la ecuación 10.4.6 da como resultado

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - (qn)^2/y^{10/3}}{1 - q^2/(gy)^3}$$

[5]Observe que x se mide paralela al fondo del canal, y que y se mide verticalmente desde el fondo del canal, por lo que dy/dx y dE/dx se evalúan respecto al fondo del canal y no a una referencia horizontal.

Como $(qn)^2 y_0^{-10/3} = S_0$ y $\mathrm{Fr}_c^2 = q^2/(gy_c^3) = 1$, la relación puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_0/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3}$$

Esta ecuación puede usarse como alternativa a la ecuación 10.6.4 para evaluar los perfiles de la superficie del agua que se muestran en la tabla 10.3.

10.6.3 Controles y flujo crítico

CONCEPTO CLAVE *Un control es una característica del canal que establece una relación profundidad-descarga en su cercanía.*

La existencia de los diversos perfiles mostrados en la tabla 10.3 depende de las condiciones límite que se especifican en ubicaciones determinadas en el canal. Con bastante frecuencia, un control definirá la condición límite. Existe un *control* cuando puede establecerse una relación profundidad-descarga en una sección. La forma en que la sección de control afecta a la superficie del agua lejos de su ubicación específica puede estudiarse si se examina el flujo cerca del estado crítico en un canal rectangular.

La ecuación 10.5.12 es la expresión para un oleaje de magnitud finita que se traslada en la dirección corriente arriba en un canal rectangular. Cuando y_2 tiende a y_1, la magnitud del oleaje repentino se hace infinitesimal; estas olas pueden ser generadas por la presencia de estructuras de control y otras secciones de transición que tienden a "perturbar" el flujo. En la ecuación 10.5.12, uno puede sustituir y_1 y y_2 con y, y V_1 con V. Además, deja que la onda se desplace en la dirección corriente abajo, de modo que la ecuación se convierte en

$$1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8\frac{(V-w)^2}{gy}} - 1\right] \tag{10.6.5}$$

Despejamos ω se obtiene

$$w = V \pm \sqrt{gy} = V \pm c \tag{10.6.6}$$

en la que $c = \sqrt{gy}$, denominada *celeridad.* La celeridad es la velocidad a la que una ola infinitesimal se desplazará hacia una región no perturbada, es decir, una región con velocidad cero. Para un canal no rectangular, $c = \sqrt{gA/B}$. Entonces, si una perturbación es creada en una ubicación a mitad de la corriente en un canal, se generan dos olas infinitesimales. Un frente de ondas tenderá a propagarse corriente arriba a una velocidad $V - c$, y el segundo se moverá corriente abajo a una velocidad $V + c$. Estas observaciones se hacen respecto a un observador en una posición fija, es decir, respecto a alguien que está de pie en la orilla observando el movimiento de las olas.

En un canal rectangular con condiciones de flujo crítico, $\mathrm{Fr} = V/\sqrt{gy} = 1$, o $V = \sqrt{gy} = c$. Por tanto, para un flujo crítico, el primer frente de ondas generado por la perturbación no se movería corriente arriba sino que parecería estacionario y se convertiría en lo que se denomina onda estacionaria. El frente opuesto sería arrastrado corriente abajo a una velocidad $2c$. Si $\mathrm{Fr} < 1$, la primera onda viajaría corriente arriba y, la onda opuesta, corriente abajo a una velocidad menor que $2c$. Para $\mathrm{Fr} > 1$ en el canal, puesto que $V > c$, ambas ondas son arrastradas corriente abajo. Entonces, dado que contiene un mecanismo que perturba al flujo, un control

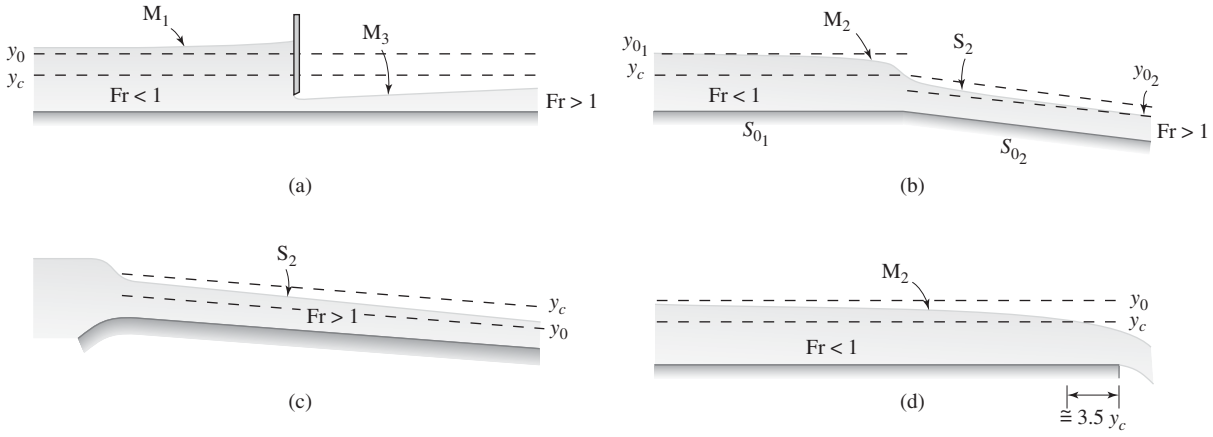


Fig. 10.19 Controles representativos: (a) compuerta de desagüe; (b) cambio en pendiente de moderada (S_{01}) a aguda (S_{02}); (c) entrada a un canal con mucha pendiente; (d) descarga libre.

influirá las condiciones corriente arriba sólo cuando el flujo es subcrítico (Fr $<$ 1). De igual forma, cuando el flujo es supercrítico (Fr $>$ 1), el control puede influir sólo en las condiciones de flujo corriente abajo. Esto se ilustra en la figura 10.19a, donde una compuerta de desagüe está colocada en un canal con flujo subcrítico corriente arriba y flujo supercrítico corriente abajo. Se genera un perfil M_1 sobre la compuerta y existe un perfil M_3 debajo de ella. Cualquier movimiento de la compuerta influiría en la naturaleza de los dos perfiles; bajar la compuerta alargaría su intervalo; subirla produciría el efecto contrario.

Los perfiles que se muestran en la tabla 10.3 todos son influidos por la presencia de controles. En la figura 10.19 se muestran varios controles que crean diversos perfiles. Es frecuente que una profundidad crítica esté asociada con un control efectivo. Entre los ejemplos se cuentan compuertas de desagüe, vertederos, represas y canalones de descarga, todos ellos obligan a que ocurra un flujo crítico en algún punto en la región de transición. Además, puede estar ubicado un control en un cambio de la pendiente del canal de moderada corriente arriba a aguda corriente abajo (figura 10.19b). La entrada a un canal agudo (figura 10.19c) es un ejemplo de un control corriente arriba, con un flujo crítico presente en la cresta. El flujo crítico se presentará a corta distancia corriente arriba desde una descarga libre en una pendiente moderada (figura 10.19d). Otros controles, que no se muestran en la figura 10.19, son una constricción en un canal que actúa como estrangulamiento y, para una pendiente moderada, la existencia de un flujo uniforme en alguna otra ubicación.

10.6.4 Síntesis de perfiles

La identificación de controles y las interacciones de ellos con los posibles perfiles es un requisito para una comprensión satisfactoria y el correcto diseño y análisis del flujo en canales abiertos. Como los controles son esencialmente secciones de transición, los principios de flujo de variación rápida presentados en las secciones 10.4 y 10.5 pueden usarse para determinar las necesarias relaciones profundidad-descarga. Una vez identificados los controles, los perfiles pueden ser seleccionados y establecer el intervalo de influencia de los controles.

Como ejemplo, considere la situación mostrada en la figura 10.20. Un flujo entra al canal de pendiente aguda desde un embalse, de modo que existe un flujo crítico

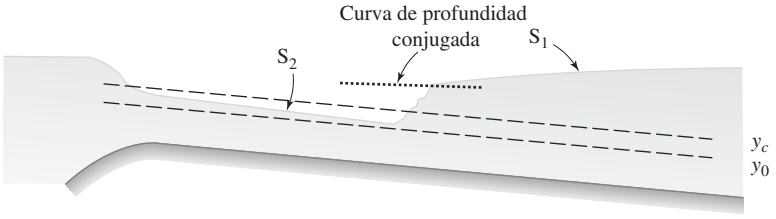


Fig. 10.20 Ejemplo de síntesis de perfiles.

en la entrada del canal. La magnitud de la descarga y el perfil S_2 están influidos por la profundidad en la entrada; por tanto, la profundidad actúa como un control. En el extremo corriente abajo del canal, el embalse inferior actúa como control para establecer un perfil S_1 que se proyecta corriente arriba. En alguna ubicación interior, se presenta un salto hidráulico para permitir que el flujo pase de un estado supercrítico a uno subcrítico. La ubicación del salto puede hallarse al graficar una curva de la profundidad conjugada hasta el perfil S_2 y hallar su punto de intersección con la curva S_1. Un descenso de la elevación del embalse inferior causaría que el salto se moviera corriente abajo y, en última instancia, se arrastrara fuera del canal. Un aumento de la elevación del embalse inferior movería el salto corriente arriba; si fuera a moverse hacia la región de la entrada, el control corriente arriba ya no existiría. Ejemplos adicionales de la síntesis del perfiles se dan en la sección 10.7.

Ejemplo 10.14

En un canal rectangular, $b = 3$ m, $n = 0.015$, $S_0 = 0.0005$, y $Q = 5$ m^3/s. A la entrada del canal, el flujo sale de una compuerta de desagüe a una profundidad de 0.15 m. El canal es lo suficientemente largo para que las condiciones de flujo uniforme se establezcan lejos de la región de entrada, figura E10.14a. Encuentre la naturaleza del perfil de la superficie del agua en la cercanía de la entrada.

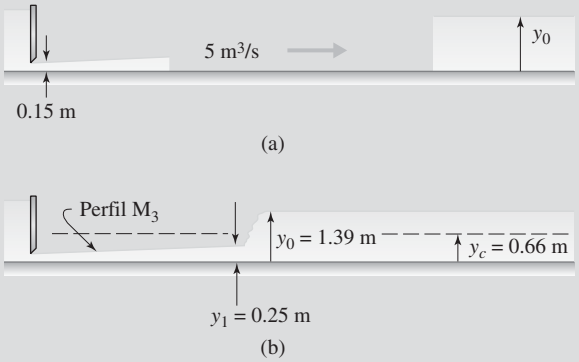


Fig. E10.14

Solución

Primero encuentre y_0 y y_c para determinar el tipo de canal. Para hallar y_0, siga el método mostrado en el ejemplo 10.1. Sustituya en la ecuación de Chezy-Manning los datos conocidos:

(*continúa*)

$$\frac{(3y_0)^{5/3}}{(3 + 2y_0)^{2/3}} = \frac{0.015 \times 5}{\sqrt{0.0005}} = 3.354$$

Resolviendo, tendremos $y_0 = 1.39$ m. A continuación, se calcula la profundidad crítica y resulta que es

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left[\frac{(5/3)^2}{9.81}\right]^{1/3} = 0.66 \text{ m}$$

Como $y_0 > y_c$, existe una condición de pendiente moderada. La compuerta es un control y habrá un perfil M_3 que inicia en la entrada, terminado por un salto hidráulico. Corriente abajo del salto, la condición de flujo uniforme actúa como un control, de modo que la ubicación de la profundidad es y_0 y el número de Froude es

$$\text{Fr}_0 = \frac{q}{\sqrt{gy_0^3}} = \frac{5/3}{\sqrt{9.81 \times 1.39^3}} = 0.325$$

Usando la ecuación 10.5.10, la profundidad antes del salto es

$$y_1 = \frac{y_0}{2}(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_0^2} - 1) = \frac{1.39}{2}(\sqrt{1 + 8 \times 0.325^2} - 1) = 0.25 \text{ m}$$

Las profundidades y_c y y_1 han sido calculadas a dos cifras significativas, puesto que el coeficiente de Manning se conoce a sólo dos cifras significativas. La figura E10.14b muestra el perfil.

10.7 ANÁLISIS NUMÉRICO DE PERFILES DE SUPERFICIES DE AGUA

La sección 10.6 se refirió a la comprensión e interpretación de diversos aspectos de un flujo gradualmente variado. Un procedimiento importante se ha delineado: se puede sintetizar, o anticipar, un perfil de la superficie del agua haciendo uso de la información relevante acerca de la geometría, rugosidad y flujo en un canal, y determinando o suponiendo los controles apropiados. Una vez realizada una síntesis satisfactoria del perfil, estamos en una posición para calcular numéricamente los perfiles deseados de la superficie del agua y sus líneas de referencia de energía.

Cualquiera que sea el tipo de método elegido para evaluar numéricamente un flujo variado gradualmente, el análisis de un perfil de superficie de agua, en un tramo de un canal con pendiente constante, por lo general sigue estos pasos:

1. La geometría del canal, la pendiente S_0 del canal, el coeficiente de rugosidad n y la descarga Q se dan o se suponen.

2. Determine la profundidad normal y_0 y la profundidad crítica y_c.
3. Establezca los controles (es decir, la profundidad de flujo) en los extremos corriente arriba y corriente abajo del tramo de canal.
4. Integre la ecuación 10.4.6 para hallar y y de manera subsiguiente E como funciones de x, lo que permite la posibilidad de que ocurra un salto hidráulico dentro del tramo.

Para un canal prismático, y_0 puede ser evaluada al aplicar la ecuación de Chezy-Manning y hallar la raíz de la función

$$\frac{Qn}{c_1 A R^{2/3} \sqrt{S_0}} - 1 = 0 \tag{10.7.1}$$

De igual forma, y_c se encuentra con la aplicación del número de Froude en la forma

$$\frac{Q^2 B}{gA^3} - 1 = 0 \tag{10.7.2}$$

Para resolver las ecuaciones 10.7.1 y 10.7.2 pueden usarse métodos numéricos, como la posición falsa o reducir a la mitad el intervalo (Chapra y Canale, 1988), o un software.

La ecuación de Chezy-Manning, dada aquí en forma de la ecuación 10.7.1, se usa para representar la variación profundidad-descarga para flujo no uniforme así como para flujo uniforme. Entonces se puede sustituir S_0 con la pendiente S de la línea de referencia de energía de la ecuación 10.7.1 y despejar S en la forma siguiente

$$S(y) = \frac{Q^2 n^2}{c_1^2 [A(y)]^2 [R(y)]^{4/3}} \tag{10.7.3}$$

Dado que Q y n son datos dados o supuestos, el lado derecho de la ecuación 10.7.3 es una función de y únicamente.

En esta sección se presentan dos métodos numéricos para calcular los perfiles de superficies de agua junto con las profundidades normales y críticas. El primero, llamado *método de pasos estándar*, es el que más se utiliza; el segundo emplea un esquema de integración numérica preciso. Las soluciones se ilustrarán usando software Excel, Mathcad y MATLAB. El tercer método es analítico y utiliza la ecuación 10.6.4 en forma integrada, suponiendo propiedades geométricas simplificadas de la sección transversal del canal.

10.7.1 Método de pasos estándar

Para desarrollar un procedimiento numérico para resolver problemas de flujo gradualmente variado, usamos la ecuación 10.6.2; se aplica sobre el tramo de canal mostrado en la figura 10.21, resultando en

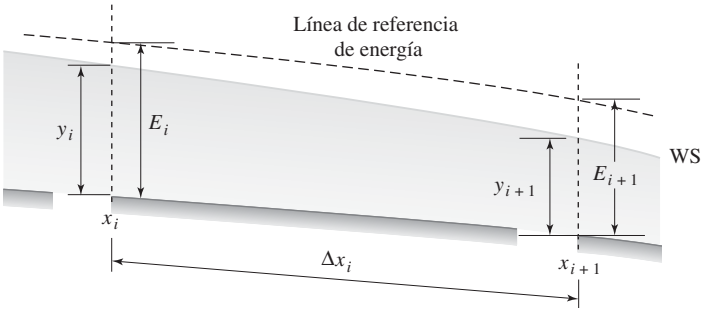


Fig. 10.21 Notación para calcular un flujo gradualmente variado.

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y + \frac{V^2}{2g}\right) = S_0 - S(y) \tag{10.7.4}$$

Para cambios pequeños en y y V entre x_i y x_{i+1}, la ecuación 10.7.4 puede ser aproximada por

$$E_{i+1} - E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_0 - S(y)]\, dx \simeq (x_{i+1} - x_i)[S_0 - S(y_m)] \tag{10.7.5}$$

en la que $y_m = (y_{i+1} + y_i)/2$. De la ecuación 10.7.5 se despeja y_{i+1} para obtener

$$x_{i+1} = x_i + \frac{E_{i+1} - E_i}{S_0 - S(y_m)} \tag{10.7.6}$$

Los cálculos tienen lugar por pasos, empezando en un punto de control u otra ubicación donde se conozca la profundidad. Supongamos que se desea generar un perfil de superficie de agua a lo largo del canal, y calcular los valores de x_i, y_i y E_i, para $i = 1, \ldots, k$, donde k es la ubicación del extremo opuesto del tramo. Además de x_k, no es necesario que la ubicación x_i sea fija, de modo que puede tomar cualquier valor. Empezando en la ubicación i, la evaluación de las condiciones en la ubicación $i + 1$ continúa como sigue:

1. Escoja y_{i+1}.
2. Calcule E_{i+1} de la ecuación 10.4.12, y_m conociendo y_i y y_{i+1}, y $S(y_m)$ de la ecuación 10.7.3.
3. Calcule x_{i+1} de la ecuación 10.7.6.
4. En la ubicación k, se suponen valores de prueba de y_k hasta que la ecuación 10.7.6 se satisfaga para el valor conocido de x_k.

El método de pasos estándar puede ejecutarse usando un análisis con una hoja de cálculo.

Ejemplo 10.15

Por un canal trapezoidal largo fluye agua con $Q = 22\ \text{m}^3/\text{s}$, $b = 7.5\ \text{m}, m_1 = m_2 = 2.5$. Un vertedero libre está ubicado en el extremo corriente abajo del canal, donde $x = 2000$ m. Para $n = 0.015$, $S_0 = 0.0006$, encuentre el perfil de la superficie del agua y la línea de referencia de energía para una distancia de aproximadamente 800 m corriente arriba del vertedero libre.

Solución

Se usan las ecuaciones 10.7.1 y 10.7.2 para evaluar y_0 y y_c por sustitución de los datos conocidos:

$$\frac{22 \times 0.015 \times \left[7.5 + 2y_0\sqrt{1 + (2.5)^2}\right]^{2/3}}{\left[7.5y_0 + \frac{1}{2}y_0^2(2.5 + 2.5)\right]^{5/3}\sqrt{0.0006}} - 1 = 0$$

$$\frac{(22)^2 \times [7.5 + y_c(2.5 + 2.5)]}{9.8 \times \left[7.5y_c + \frac{1}{2}y_c^2(2.5 + 2.5)\right]^3} - 1 = 0$$

Las raíces de estas ecuaciones pueden hallarse usando una rutina como Excel Solver®; las soluciones son $y_0 = 1.29$ m y $y_c = 0.86$ m. De aquí que el canal sea de un tipo moderado y el control estará cercano al vertedero libre en el extremo corriente abajo del canal. Sin ninguna pérdida considerable en la precisión, puede suponerse que las condiciones críticas existirán en el vertedero libre. Por consulta de la tabla 10.3, el perfil corriente arriba del vertedero será del tipo M_2. Una solución con hoja de cálculo Excel se muestra en la tabla E10.15. La parte superior muestra los valores de las profundidades críticas y normales halladas con Solver. En la columna de residuos hay números muy pequeños que deben ser cercanos a cero; vea las dos ecuaciones previas. La parte inferior de la tabla muestra la solución con el método por pasos. Los cálculos pasan de la estación 1 a la estación 5 de una manera directa, con valores arbitrarios de profundidades seleccionadas y puestos en la columna y. El valor inicial de x (2000 m) se coloca en la primera celda de la columna x, y el resto de las distancias se calculan como se explica en la página previa. En la estación 6, se escogen diferentes valores de y hasta que la distancia sea cercana al valor deseado de 1200 m; resulta una profundidad de 1.27 m en una distancia de 1230 m, que es aceptable. Las ecuaciones de la hoja de cálculo para calcular las profundidades normales y críticas, y para el método por pasos, se dan en el apéndice E. Además, en el Apéndice E, figura E.5, se muestra una solución con MATLAB para este problema.

Tabla E10.15

	Profundidad [m]	Residuo
Crítica	0.865	1.087E-06
Normal	1.292	1.812E-06

Estación	y [m]	A [m^2]	V [m/s]	E [m]	y_m [m]	S(y_m)	Δx [m]	x [m]
1	0.865	8.358	2.632	1.218				2000
2	0.950	9.381	2.345	1.230	0.908	2.165E-03	−8	1992
3	1.050	10.631	2.069	1.268	1.000	1.527E-03	−41	1951
4	1.150	11.931	1.844	1.323	1.100	1.081E-03	−114	1837
5	1.250	13.281	1.656	1.390	1.200	7.866E-04	−357	1480
6	1.270	13.557	1.623	1.404	1.260	6.574E-04	−250	1230

Ejemplo 10.16

Un canal trapezoidal de 300 m de largo transporta agua que fluye con $Q = 25\ m^3/s$. Las pendientes laterales inversas de la sección transversal son $m_1 = m_2 = 2.5$, el ancho del fondo es 5 m, la pendiente del fondo es $S_0 = 0.005$, y el coeficiente de Manning es $n = 0.013$. Calcule el perfil de la superficie del agua y la línea de referencia de energía si la profundidad corriente arriba es $y_u = 0.55$ m y la profundidad corriente abajo es $y_d = 2.15$ m.

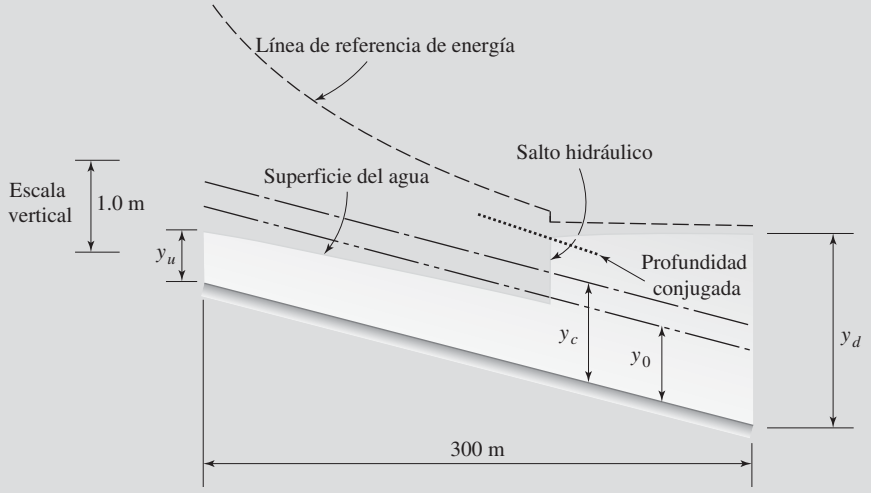


Fig. E10.16

Solución

En la tabla E10.16 se ilustra una solución con la hoja de cálculo Excel usando el método por pasos. Primero, se ingresan los datos de entrada, incluyendo la constante gravitacional y la constante correspondiente c_1 en la ecuación de Manning. Como las dos pendientes laterales inversas son iguales, se introduce un solo valor m. A continuación se evalúan las profundidades críticas y normales con Excel Solver. Puesto que $y_c > y_0$, la pendiente es aguda. Un punto de control está en el extremo corriente arriba, y existe el perfil S_3 en el tramo superior del canal. El perfil se calcula de la estación 1 empezando con y_u a la estación 7 en donde la profundidad es 0.85 m y la distancia es 288 m. Entonces se calcula un perfil S_1 de la estación 9 al final del canal empezando con y_d y terminando cuando y alcance la profundidad crítica. Un salto hidráulico está ubicado aproximadamente a 190 m corriente abajo de la entrada del canal. Se localiza al graficar la curva de profundidad conjugada hasta el perfil S_3 y hallar su intersección con el perfil S_1 como se muestra en la figura E10.16. Las profundidades conjugadas y_{cj} se calculan con Excel Solver.

Tabla E10.16

Q =	25	n =	0.013	S_0 =	0.005	L =	300	g =	9.81	
b =	5	m =	2.5	y_u =	0.55	y_d =	2.15	c_1 =	1.00	

	Profundidad	Residuos
y_c =	1.124	−2.26E-07
y_0 =	0.864	4.363E-07

Estación	y	A	V	E	y_m	$S(y_m)$	Δx	x	y_{cj}	Residual
1	0.550	3.506	7.130	3.141						
2	0.600	3.900	6.410	2.694	0.575	2.189E-02	26	26	1.901	8.81E-07
3	0.650	4.306	5.806	2.368	0.625	1.624E-02	29	56	1.802	5.19E-07
4	0.700	4.725	5.291	2.127	0.675	1.231E-02	33	88	1.711	1.68E-07
5	0.750	5.156	4.848	1.948	0.725	9.500E-03	40	128	1.628	9.30E-07
6	0.800	5.600	4.464	1.816	0.775	7.449E-03	54	182	1.550	3.85E-07
7	0.850	6.056	4.128	1.719	0.825	5.923E-03	105	288	1.477	5.07E-07
9	2.150	22.306	1.121	2.214				300		
10	2.050	20.756	1.204	2.124	2.100	1.575E-04	−19	281		
11	1.950	19.256	1.298	2.036	2.000	1.924E-04	−18	263		
12	1.850	17.806	1.404	1.950	1.900	2.371E-04	−18	245		
13	1.750	16.406	1.524	1.868	1.800	2.951E-04	−17	228		
14	1.650	15.056	1.660	1.791	1.700	3.713E-04	−17	211		
15	1.550	13.756	1.817	1.718	1.600	4.728E-04	−16	195		
16	1.450	12.506	1.999	1.654	1.500	6.102E-04	−15	180		
17	1.350	11.306	2.211	1.599	1.400	7.998E-04	−13	167		
18	1.250	10.156	2.462	1.559	1.300	1.067E-03	−10	157		
19	1.124	8.778	2.848	1.537	1.187	1.514E-03	−6	151		

10.7.2 Método de integración numérica

Existen diversos métodos numéricos para resolver la ecuación 10.6.4 para canales con secciones transversales regulares, cualquiera de los cuales dará una solución con suficiente precisión para fines de diseño y análisis. Merece la pena citar que hay técnicas de integración que usan la regla trapezoidal o la regla de Simpson, y la solución de la forma diferencial usando un procedimiento de Runge-Kutta. La teoría subyacente de estos métodos y algoritmos para su implementación puede hallarse en textos sobre métodos numéricos. McBean y Perkins (1975) analizan problemas de convergencia asociados con el uso de la regla trapezoidal aplicada a un flujo gradualmente variado.

Un útil esquema de integración es la cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre (Chapra y Canale, 1998). Está particularmente bien adaptado para su uso en una computadora y por lo general es más preciso que el método trapezoidal o que el método de la regla de Simpson. La ecuación 10.6.4 está escrita en forma integral como

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1 - \mathrm{Fr}^2}{S_0 - S}\, dy \\ &= x_i + \int_{y_i}^{y_{i+1}} G(y)\, dy \end{aligned} \tag{10.7.7}$$

La última integral se aproxima mediante la fórmula de Gauss-Legendre, que resulta en

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} G(y)\, dy = \frac{y_{i+1} - y_i}{2}\left[G\left(\frac{y_{i+1} + y_i - \sqrt{3}/3(y_{i+1} - y_i)}{2} \right) + G\left(\frac{y_{i+1} + y_i + \sqrt{3}/3(y_{i+1} - y_i)}{2} \right) \right] \tag{10.7.8}$$

El siguiente ejemplo ilustra el uso del algoritmo.

Ejemplo 10.17

Vuelva a resolver el ejemplo 10.15 usando la cuadratura de Gauss-Legendre.

Solución

A continuación se muestra una solución con Mathcad. Una vez introducidos los datos y definidas las funciones, se calculan las profundidades normal y crítica. Posteriormente, se realizan iteraciones con la profundidad para hallar valores correspondientes de la distancia usando las ecuaciones 10.7.7 y 10.7.8.

Ingrese datos:

$$Q := 22 \qquad M := 2.5 \qquad b := 7.5 \qquad L := 2000$$

$$S_0 := 0.0006 \qquad n := 0.015 \qquad g := 9.81$$

Defina funciones:

$$A(y) := b\cdot y + M\cdot y^2 \qquad B(y) := b + 2\cdot M\cdot y \qquad P(y) := b + 2\cdot y\cdot\sqrt{1+M^2}$$

$$S(y) := \frac{Q^2\cdot n^2}{A(y)^{3.3333}\cdot P(y)^{-1.3333}} \qquad Fr(y) := \sqrt{\frac{Q^2\cdot B(y)}{g\cdot A(y)^3}} \qquad G(y) := \frac{1 - Fr(y)^2}{S_0 - S(y)}$$

$$E(y) := y + \frac{Q^2}{2\cdot g\cdot A(y)^2}$$

Calcule profundidades normal y crítica:

$$y_n := \text{root}(S(y) - S_0, y, 0.01, 5) \qquad y_n = 1.292$$

$$y_c := \text{root}(Fr(y) - 1, y, 0.01, 5) \qquad y_c = 0.865$$

Calcule el perfil S2 desde la ubicación corriente arriba:

$$X_0 := 2000 \qquad y_0 := y_c \qquad \Delta y := 0.10 \qquad N := 4$$

$$i := 1,2\ldots N$$

$$y_i := y_{i-1} + \Delta y$$

$$x_i := x_{i-1} + \frac{\Delta y}{2}\cdot\left(G\left(\frac{y_i + y_{i-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\Delta y}{2}\right) + G\left(\frac{y_i + y_{i-1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\Delta y}{2}\right)\right)$$

Profundidad, distancia y energía específica calculadas:

$$y = \begin{pmatrix} 0.865 \\ 0.965 \\ 1.065 \\ 1.165 \\ 1.265 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2\times10^3 \\ 1.988\times10^3 \\ 1.938\times10^3 \\ 1.798\times10^3 \\ 1.257\times10^3 \end{pmatrix} \qquad E(y) = \begin{pmatrix} 1.218 \\ 1.235 \\ 1.275 \\ 1.333 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

10.7.3 Canales irregulares

El método demostrado en el ejemplo 10.15 funciona bien con canales regulares. Cuando se calcule el perfil para un tramo de un canal de un río, en el que los datos de la sección transversal son irregulares, y por lo general dados en ubicaciones fijas, en cada ubicación es necesaria una solución de prueba. Henderson (1966) define un método de cálculo que incluye correcciones para secciones compuestas y pérdidas por remolinos que se presentan en curvas y expansiones. Para una sección compuesta, la pendiente de la línea de nivel de energía está dada por

$$S = \frac{Q^2}{(\Sigma\ K_i)^2} \tag{10.7.9}$$

en la que K_i se denomina el *transporte* de la subsección i:

$$K_i = \left(\frac{c_1 A R^{2/3}}{n}\right)_i \tag{10.7.10}$$

Debe aplicarse un coeficiente por energía cinética al término de la energía cinética; para una sección compuesta utilice

$$\alpha = \frac{(\Sigma\ A_i)^2}{(\Sigma\ K_i)^3} \sum \left(\frac{K_i^3}{A_i^2}\right) \tag{10.7.11}$$

Con tal complejidad, es más cómodo usar el procedimiento del método por pasos en forma codificada para una computadora. El United States Army Corps of Engineers ha desarrollado el algoritmo "HEC-RAS River Analysis System" para emplearlo en canales naturales. La solución está basada en el método por pasos estándar y se puede adquirir para utilizarlo en una computadora personal. El programa y la documentación pueden descargarse de la página web www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/.

10.7.4 Métodos de integración directa

La ecuación 10.6.4 puede integrarse de una manera directa si suponemos un canal rectangular, horizontal, ancho. Existe un procedimiento de integración más general para canales prismáticos no horizontales de varias formas (Chow, 1959). Supongamos que en la ecuación de Chezy-Manning el producto $A^2R^{4/3}$ es proporcional a y^N, y que en el número de Froude la relación A^3/B es proporcional a y^M, donde M y N son constantes. Entonces la ecuación 10.6.4 puede escribirse como

$$dx = \frac{1}{S_0}\left[\frac{1 - (y_c/y)^M}{1 - (y_0/y)^N}\right] dy \tag{10.7.12}$$

La solución de la ecuación 10.7.12 es

$$x = \frac{y_0}{S_0}\left[u - F(u, N) + \left(\frac{y_c}{y_0}\right)^M \frac{J}{N} F(v, J)\right] \tag{10.7.13}$$

en la que $u = y/y_0, v = u^{N/J}, J = N/(N - M + 1)$, y F es la función de flujo variado

$$F(u, N) = \int_0^u \frac{d\eta}{1 - \eta^N} \tag{10.7.14}$$

La ecuación 10.7.14 puede ser evaluada numéricamente y los resultados se presentan como la función de flujo variado en el apéndice E, tabla E.1. Los valores de $N = 2\frac{1}{2}$, 3 y $3\frac{1}{3}$ se usan comúnmente ya que son consistentes con una suposición de canal ancho y rectangular (vea el ejemplo 10.13). Observe que la función F puede tener cualquier constante de integración deseada que se le asigne. En la tabla de la función de flujo variado, la constante se ajusta de modo que $F(0, N) = F(\infty, N) = 0$. Como la integración de una ubicación a otra es directa, no son necesarios más cálculos intermedios. Este método de evaluación está en contraste directo con los métodos numéricos, donde los pasos intermedios no pueden evitarse sin la pérdida de precisión.

Ejemplo 10.18

Un canal ancho y rectangular con una pendiente de $S_0 = 0.001$ transporta un caudal de $q = 3.72\ \text{m}^3/\text{s}$ por metro de ancho. En una ubicación determinada la profundidad es 3 m. Determine la distancia corriente arriba donde la profundidad es 2.5 m. El coeficiente de Manning es 0.025.

Solución

Del ejemplo 10.13, para un canal ancho y rectangular encontramos que $N = 3.33$ y $M = 3$. Por tanto, podemos calcular que J es

$$J = \frac{N}{N - M + 1} = \frac{3.33}{3.33 - 3 + 1} = 2.5$$

También del ejemplo 10.13, podemos determinar y_0 como sigue

$$y_0 = \left(\frac{q^2 n^2}{S_0}\right)^{3/10} = \left(\frac{3.72^2 \times 0.025^2}{0.001}\right)^{3/10} = 1.91\ \text{m}$$

Además,

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{3.72^2}{9.81}\right)^{1/3} = 1.12\ \text{m}$$

Sustituya estos valores en la ecuación 10.7.13 y simplifique:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1.91}{0.001}\left[u - F(u, 3.33) + \left(\frac{1.12}{1.91}\right)^3 \times \frac{2.5}{3.33} F(v, 2.5)\right] \\ &= 1910[u - F(u, 3.33) + 0.151F(v, 2.5)] \end{aligned}$$

Como $y_0 > y_c$, y en la ubicación corriente abajo $y > y_0$, el perfil es una curva M_1. En la ubicación corriente abajo donde la profundidad $y = 3$ m,

(*continúa*)

$$u = \frac{y}{y_0} = \frac{3}{1.91} = 1.57 \quad \text{y} \quad v = u^{N/J} = 1.57^{3.33/2.5} = 1.825$$

Del apéndice E, tabla E.1, mediante una interpolación lineal entre los valores registrados encontramos que

$$F(1.57, 3.33) = 0.166 \quad \text{y} \quad F(1.825, 2.5) = 0.300$$

Considerando x como una distancia medida desde un nivel de referencia arbitrario, encontramos que

$$x = 1910(1.57 - 0.166 + 0.151 \times 0.300) = 2763 \text{ m}$$

Para determinar la distancia corriente arriba del vertedero donde la profundidad es 2.5 m, realizamos los siguientes cálculos en una forma análoga a los de la ubicación corriente abajo:

$$u = \frac{2.5}{1.91} = 1.31 \quad \text{y} \quad v = 1.31^{3.33/2.5} = 1.43$$

$$F(1.31, 3.33) = 0.578 \quad \text{y} \quad F(1.43, 2.5) = 0.474$$

$$x = 1910(1.31 - 0.578 + 0.151 \times 0.474) = 1536 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre las dos ubicaciones, desde una profundidad de 3 m hasta donde la profundidad es 2.5 m, es 2763 – 1536 = 1227 m, o aproximadamente 1230 m.

10.8 RESUMEN

A diferencia de los flujos en tuberías, un flujo en un canal abierto es complicado por la presencia de una superficie libre. Además de la velocidad, la profundidad del flujo es variable, de modo que aun cuando puede ser permanente, el flujo en un canal en general no es uniforme. En la sección 10.3, así como en el capítulo 7, hemos introducido un flujo uniforme como un caso limitante, aquel que no ocurre con frecuencia pero que aun así es importante. Las pérdidas por fricción en un flujo en un canal abierto están descritas matemáticamente por la ecuación de Chezy-Manning, que relaciona la velocidad o descarga con las propiedades geométricas e hidráulicas de la sección transversal del canal. Los principios de energía y cantidad de movimiento se presentaron en las secciones 10.4 y 10.5 y se aplicaron a un flujo no uniforme de variación rápida que ocurre en transiciones de canales y en un salto hidráulico. Las profundidades críticas y conjugadas se han deducido junto con la definición del número de Froude. Hemos visto que la energía específica es un concepto útil para abordar el análisis de transición. En gran parte del desarrollo en este capítulo se ha utilizado una sección transversal rectangular, lo cual se hizo principalmente por conveniencia matemática. Las directrices que se desarrollaron y las conclusiones obtenidas utilizando una sección rectangular también se aplican a secciones no rectangulares. La tabla 10.4 resume varias de las fórmulas desarrolladas en el capítulo.

Un flujo no uniforme gradualmente variado se presenta donde la profundidad y la velocidad varían en forma continua con la distancia a lo largo de un canal. En la sección 10.6, la aplicación de la ecuación de la energía a un flujo gradualmente variado resultó en una descripción matemática del perfil de la superficie del agua. Hemos presentado una clasificación de los diversos tipos de regímenes de flujo que ocurren a lo largo de un tramo de un canal. Además, hemos demostrado que al comprender un flujo de variación rápida y uno gradualmente variado hace posible

predecir la manera en que se comportarán las superficies de agua, una tarea que se requiere previamente el cálculo numérico de perfiles de superficies de agua. Se introdujeron varios métodos numéricos en la sección 10.7 para integrar la ecuación para flujo gradualmente variado, y se dieron ejemplos de soluciones usando hojas de cálculo, software computacional e integrales aproximadas. Quizás el medio más útil de solución sea la hoja de cálculo, en la que un algoritmo generalizado puede adaptarse fácilmente para utilizarlo en diferentes problemas.

Tabla 10.4 Fórmulas para secciones rectangulares y generales

Sección	Fr	y_c	E	M
Rectangular	$\dfrac{q}{\sqrt{gy^3}}$	$\left(\dfrac{q^2}{g}\right)^{1/3}$	$y + \dfrac{q^2}{2gy^2}$	$\dfrac{by^2}{2} + \dfrac{q^2}{gy}$
General	$\dfrac{Q/A}{\sqrt{gA/B}}$	$\dfrac{Q^2B}{gA^3} = 1$	$y + \dfrac{Q^2}{2gA^2}$	$A\bar{y} + \dfrac{Q^2}{gA}$

PROBLEMAS

10.1 Dé un ejemplo de cada uno de los siguientes tipos de flujo para un conducto cerrado y en condiciones de superficie libre. Incluya un bosquejo con cada representación:
- **(a)** Permanente, uniforme
- **(b)** No permanente, no uniforme
- **(c)** Permanente, no uniforme
- **(d)** No permanente, uniforme

10.2 Por un conducto circular fluye agua con una superficie libre con un gasto de 4 m^3/s . Encuentre el diámetro d tal que la profundidad crítica sea $y_c = 0.3d$. Ante condiciones de flujo crítico, $Q^2B/(gA^3) = 1$.

10.3 Clasifique los siguientes flujos como permanentes o no permanentes, y uniformes o no uniformes:
- **(a)** Flujo de agua a través de un atasco de troncos en un río con el observador de pie en la orilla.
- **(b)** Flujo de agua por los rápidos de un río, con el observador en una balsa que se mueve con la corriente.
- **(c)** Una avenida en un río, que es generada por una lluvia/escorrentía de agua moderada, con el observador de pie en la rivera.
- **(d)** Un salto hidráulico en movimiento en un canal prismático, con el observador corriendo a lo largo de la orilla a la misma velocidad que el salto.

Flujo uniforme

10.4 Para cada sección rectangular de canal, construya las curvas R contra y y $AR^{2/3}$ contra y:
- **(a)** Circular, $d = 2$ m
- **(b)** Trapezoidal, $b = 3$ m, $m_1 = m_2 = 2.5$
- **(c)** Compuesta (vea la figura P10.4)

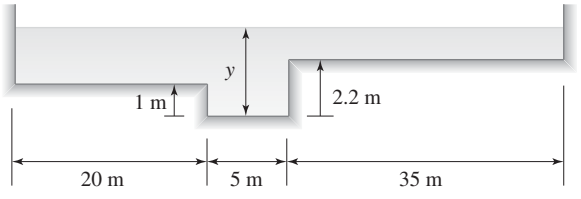


Figura P10.4

10.5 Determine la sección más eficiente con base en la resistencia al flujo para un canal trapezoidal. Suponga pendientes laterales iguales, es decir, $m_1 = m_2$.

10.6 Determine la profundidad uniforme y_0, el área A y el perímetro mojado P para las siguientes condiciones:

- **(a)** Canal trapezoidal, $m_1 = 2.5$, $m_2 = 3.5$, $b = 4.5$ m, $Q = 35$ m³/s, $n = 0.015$, $S_0 = 0.0035$
- **(b)** Canal circular, $d = 2.1$ m, $Q = 4.25$ m³/s, $n = 0.012$, $S_0 = 0.001$
- **(c)** Canal circular, $d = 6$ ft, $Q = 120$ ft³/s, $n = 0.012$, $S_0 = 0.001$
- **(d)** Canal trapezoidal, $Q = 15$ m³/s, $n = 0.011$, $S_0 = 0.0013$, sección transversal "más eficiente"
- **(e)** Canal rectangular, $b = 25$ ft, $Q = 1200$ ft³/s, $n = 0.020$, $S_0 = 0.0004$

10.7 Se tiene un flujo uniforme por un canal trapezoidal con $m_1 = m_2 = 1.75$. El canal debe transportar un caudal de 4.0 m³/s, con una velocidad promedio de 1.4 m/s. Si $n = 0.015$ y $S_0 = 0.001$, encuentre el ancho del fondo y la profundidad uniforme.

10.8 Una sección transversal de un canal, comúnmente llamada *cuneta*, se forma al lado de una calle junto a la guarnición de la banqueta durante condiciones de lluvia (figura P10.8). La pendiente a lo largo de la calzada es $S_0 = 0.0005$, y el coeficiente de rugosidad de Manning es $n = 0.015$. Suponiendo que hay condiciones de flujo uniforme:

- **(a)** Determine la descarga si la profundidad del flujo es $y_0 = 12$ cm
- **(b)** Si $Q = 80$ L/s, ¿cuál es la profundidad y_0 del flujo?

Fig. P10.8

10.9 Un tubo de drenaje de sección transversal circular está hecho de concreto ($n = 0.014$). Tiene que transportar agua en condiciones de flujo uniforme de modo que el flujo fluya medio lleno, es decir, $y = d/2$, donde d = diámetro del tubo. Evalúe las siguientes condiciones:

- **(a)** Con $S_0 = 0.0003$ y $Q = 1.75$ m³/s, encuentre d
- **(b)** Con $S_0 = 0.00005$ y $d = 1.3$ m, encuentre Q
- **(c)** Con $d = 0.75$ m y $Q = 0.45$ m³/s, encuentre S_0

Conceptos de energía

10.10 Para una determinada energía específica en un canal rectangular, demuestre que existe un flujo crítico cuando la descarga específica alcanza su valor máximo $q_{máx}$.

10.11 La relación de la energía específica para una sección rectangular, ecuación 10.4.5, puede hacerse adimensional si se normaliza respecto a la profundidad crítica y_c. Prepare una gráfica con y/y_c como la ordenada y E/y_c como la abscisa. Localice matemáticamente el punto mínimo.

10.12 Por un canal rectangular fluye agua a una velocidad de 3 m/s y a una profundidad de 2.5 m. Determine los cambios en la elevación de la superficie del agua para las siguientes alteraciones en el fondo del canal:

- **(a)** Un aumento (escalón hacia arriba) de 20 cm, despreciando las pérdidas.
- **(b)** Un incremento "bien diseñado" de 15 cm.
- **(c)** El aumento máximo permisible para las condiciones especificadas de flujo corriente arriba para permanecer sin cambio, despreciando las pérdidas.
- **(d)** Un decremento "bien diseñado" (escalón hacia abajo) de 20 cm.

10.13 Por un canal rectangular cuyo ancho es 5 m fluye agua. La profundidad del flujo es 2 m y la descarga es 25 m³/s. Determine los cambios en la profundidad para las siguientes alteraciones en el ancho del canal:

- **(a)** Un aumento de 50 cm, despreciando las pérdidas
- **(b)** Una disminución de 25 cm, suponiendo una transición "bien diseñada"

10.14 Por un canal rectangular de ancho b tiene lugar un flujo con una profundidad conocida y y a una velocidad V. Aguas abajo de esta ubicación, hay un escalón de altura h hacia arriba. Despreciando las pérdidas, determine el cambio en el ancho que debe tener lugar simultáneamente para que ocurra un flujo crítico dentro de la transición.

- **(a)** $b = 3$ m, $y = 3$ m, $V = 3$ m/s, $h = 70$ cm
- **(b)** $b = 10$ ft, $y = 10$ ft, $V = 10$ ft/s, $h = 2.3$ ft

10.15 Por un canal rectangular de 2.0 m de ancho fluye agua. En una sección de transición el fondo del canal tiene una depresión h = 0.1 m en una corta distancia y, a continuación, se eleva de nuevo a la elevación original (figura P10.15). Si y = 1.22 m y Q = 4.8 m³/s, entonces, despreciando las pérdidas:

(a) Encuentre el cambio en el ancho de canal necesario para mantener una superficie horizontal del agua en toda la transición.

(b) ¿Qué cambio en el ancho haría que ocurriera un flujo crítico en la transición?

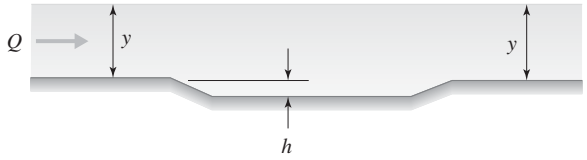


Fig. P10.15

10.16 Por un canal rectangular fluye agua a una profundidad de 2.15 m y con descarga unitaria de 5.5 m³/s. Las pérdidas de energía pueden despreciarse.

(a) ¿Cuál es la altura máxima h de un fondo levantado que permitirá que el flujo pase sobre él sin aumentar la profundidad corriente arriba?

(b) Muestre la solución en un diagrama E–y.

(c) Haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de la energía.

(d) Si el fondo del canal se levanta más que h, analice un tipo de cambio que puede tener lugar corriente arriba de la transición.

10.17 Un lago descarga en un canal pronunciado. A la entrada del canal, el nivel del lago está 2.5 m arriba del fondo del canal. Despreciando las pérdidas, encuentre la descarga para las siguientes geometrías:

(a) Sección rectangular, b = 4 m

(b) Sección trapezoidal, b = 3 m, $m_1 = m_2 = 2.5$

(c) Sección circular, d = 3.5 m

10.18 A la salida de un embalse se tienen condiciones de flujo agudo en un canal abierto. El ancho del canal no se ha fijado aún, pero se conocen la profundidad y a la entrada y la descarga Q. Determine los anchos necesarios para las siguientes geometrías:

(a) Sección rectangular, y = 1 m, Q = 18 m³/s

(b) Sección trapezoidal, $m_1 = m_2 = 3$, y = 1, Q = 18 m³/s

(c) Sección rectangular, y = 3 ft, Q = 635 ft³/s

(d) Sección trapezoidal, $m_1 = m_2 = 3$, y = 3 ft, Q = 635 ft³/s

10.19 Sobre un umbral rectangular se tiene un flujo de variación rápida (figura P10.19), con condiciones de descarga libre en la ubicación C. Puede hacerse caso omiso de las pérdidas en todo el tramo.

(a) Calcule la descarga.

(b) Evalúe las profundidades en las ubicaciones A, B y C.

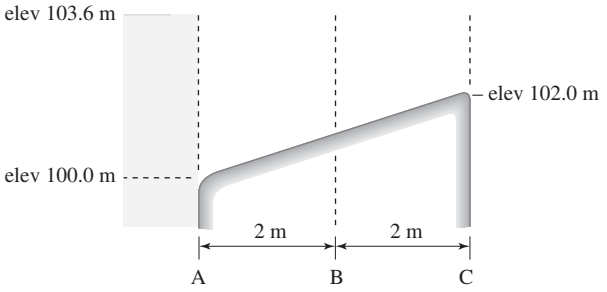


Fig. P10.19

10.20 Escriba un algoritmo de computadora que evalúe la profundidad crítica de un canal regular, usando la técnica de la posición falsa o el método de su elección. Verifique el programa con los datos siguientes:

(a) Sección circular, Q = 5 m³/s, d = 2.5 m

(b) Sección rectangular, Q = 125 ft³/s, b = 12 ft

(c) Sección trapezoidal, Q = 120 m³/s, b = 10 m, $m_1 = m_2 = 5$

(d) Sección triangular, Q = 250 ft³/s, m_1 = 2.5, m_2 = 3.0

10.21 Para la sección transversal de canal mostrada en la figura P10.21, determine la profundidad crítica si la descarga es 16.5 m³/s.

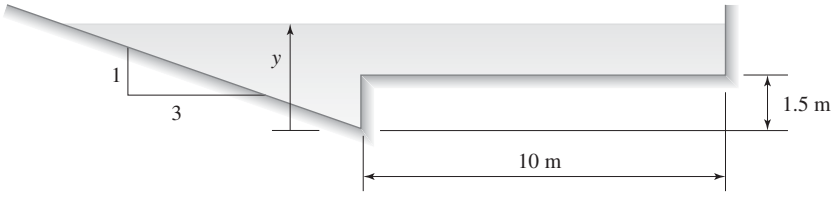


Fig. P10.21

10.22 Para la sección de canal compuesta mostrada en la figura P10.22, encuentre la profundidad crítica y_c si:
(a) $Q = 55\ \text{m}^3/\text{s}$ **(b)** $Q = 3.5\ \text{m}^3/\text{s}$

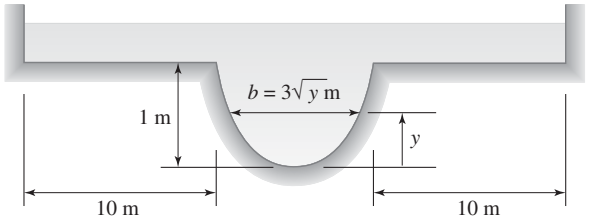


Fig. P10.22

10.23 Un canal parabólico (figura P10.23) está descrito por la función $\eta = 0.1x^2$. Si $Q = 25\ \text{m}^3/\text{s}$ y $y = 2.00$ m, encuentre la profundidad alterna.

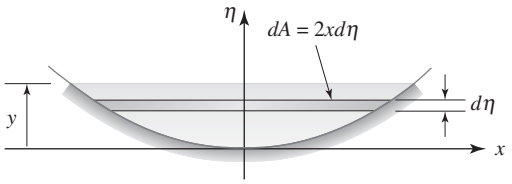


Fig. P10.23

10.24 Escriba un algoritmo de computadora que determine la profundidad alterna, dada la geometría de un canal prismático, la descarga, y la profundidad del flujo. Use la técnica de reducir a la mitad el intervalo o una solución de su elección.

10.25 Deduzca la relación para un vertedero con muesca en V que exprese Q como una función de Y, ecuación 10.4.27.

10.26 Todo el ancho de un río está bloqueado con escombros, como se muestra en la figura P10.26. La sección transversal del río es aproximadamente rectangular, donde $b = 15$ m, $Q = 22.5\ \text{m}^3/\text{s}$, $y_0 = 1.2$ m y $h = 0.2$ m.
(a) Despreciando las pérdidas, analice la superficie del agua de variación rápida en la cercanía de los escombros.
(b) Haga un bosquejo de la línea de referencia de energía y de la superficie del agua.

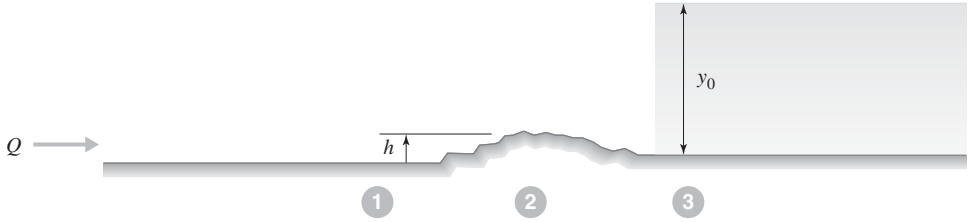


Fig. P10.26

10.27 Desarrolle la expresión para la descarga teórica para el vertedero mostrado en la figura P10.27.

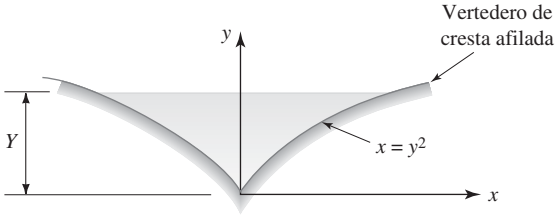


Fig. P10.27

10.28 Un canal medidor de Parshall se coloca en un arroyo pequeño para medir la descarga. Tiene un ancho de 3 ft en su garganta.
(a) Calcule la descarga si la profundidad medida corriente arriba es de 1.2 ft.
(b) Elabore una gráfica de Q contra H, donde H varía de 0.5 a 1.5 ft.

10.29 Fluye agua a una profundidad determinada y descarga en un canal rectangular de 3.5 m de ancho. Una sección sumergida y levantada 60 cm de alto se coloca en el

canal como se muestra en la figura P10.29. La sección levantada abarca todo el ancho del canal, y está diseñada en forma tal que puede hacerse caso omiso de las pérdidas. Calcule la superficie del agua y la línea de referencia de energía:

(a) Cuando $y = 1.5$ m y $Q = 4$ m³/s

(b) Cuando $y = 1.0$ m y $Q = 3$ m³/s

(c) ¿Ante qué condiciones de las dadas, (a) o (b), actuaría la sección levantada en forma similar a un vertedero de cresta ancha (explique su respuesta sólo verbalmente)?

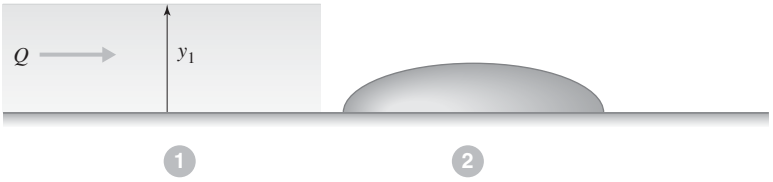


Fig. P10.29

10.30 Diseñe un vertedero de cresta ancha para trasportar la descarga de un río que varía entre Q_1 y Q_2. La profundidad máxima del agua corriente arriba del vertedero no debe ser mayor que y_2 y la profundidad mínima no debe ser menor que y_1.

(a) $Q_1 = 0.15$ m³/s, $Q_2 = 30$ m³/s, $y_1 = 1.05$ m, $y_2 = 1.75$ m

(b) $Q_1 = 5$ ft³/s, $Q_2 = 1000$ ft³/s, $y_1 = 3.45$ ft, $y_2 = 5.75$ ft

10.31 Diseñe un canal para distribuir agua entre los dos embalses que se muestran en la figura P10.31. La distancia horizontal entre los embalses es L. Se requiere que exista un flujo uniforme en todo el tramo. La superficie del agua en el embalse A no debe ser mayor que la distancia h arriba del fondo del canal a la entrada. El canal es de sección transversal rectangular y está hecho de concreto. Haga caso omiso de las pérdidas a la entrada y a la salida, y suponga condiciones de flujo uniforme, subcrítico, a la entrada del canal.

(a) $El_A = 501.8$ m, $El_B = 500.2$ m, $L = 1500$ m, $h = 2$ m, $b = 2.5$ m

(b) $El_A = 1646$ ft, $El_B = 1641$ ft, $L = 4920$ ft, $h = 6.5$ ft, $b = 8$ ft

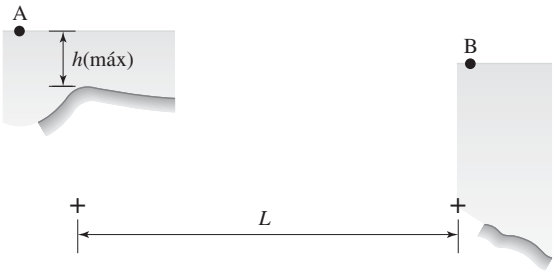


Fig. P10.31

Conceptos de la cantidad de movimiento

10.32 La función de la cantidad de movimiento para una sección rectangular, ecuación 10.5.4, se puede hacer adimensional si se normaliza respecto a $b(y_c)^2$. Elabore una gráfica usando y/y_c como la ordenada y $M/(by_c)^2$ como la abscisa.

10.33 Vuelva a resolver el problema 10.24 para evaluar la profundidad conjugada en lugar de la profundidad alterna.

10.34 Se presenta un flujo por un canal rectangular ancho a una profundidad y. Un proyecto de construcción sobre este canal requiere que en el canal se coloquen ataguías separadas una distancia ω centro a centro (figura P10.34). Suponiendo que las ataguías no ocasionan pérdidas de energía entre las ubicaciones 1 y 2, determine el diámetro máximo permisible de las ataguías sin crear efectos por el remanso corriente arriba (es decir, sin aumentar la profundidad corriente arriba), y también la fuerza de arrastre resultante en cada ataguía (suponga que $C_D = 0.15$).

(a) $q = 1.5$ m²/s, $y = 1.8$ m, $w = 6$ m

(b) $q = 16$ ft²/s, $y = 6$ ft, $w = 20$ ft

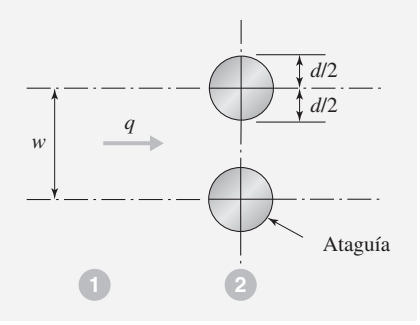


Fig. P10.34

10.35 Se tiene que colocar un oleoducto temporal (diámetro = 200 mm, $C_D = 0.30$) en el lecho de un río normal a la dirección del flujo. El río es aproximadamente rectangular en sección y mide 100 m de ancho. La profundidad del flujo corriente abajo del oleoducto es 2.5 m y la velocidad media es 3 m/s. Sin prestar atención a la pendiente y a la resistencia del lecho, determine lo siguiente:

(a) Las condiciones de flujo (es decir, profundidad y velocidad) corriente arriba del oleoducto una vez colocado en su lugar

(b) La fuerza de arrastre resultante en el oleoducto

10.36 Se produce un salto hidráulico sobre un umbral o reborde colocado en un canal triangular con agua fluyendo como se muestra en la figura P10.36. Las pendientes inversas laterales son $m_1 = m_2 = 3$, el coeficiente de arrastre es $C_D = 0.40$, y la altura del reborde es $h = 0.3$ m. Determine la descarga Q si $y_1 = 0.50$ y $y_2 = 1.8$ m.

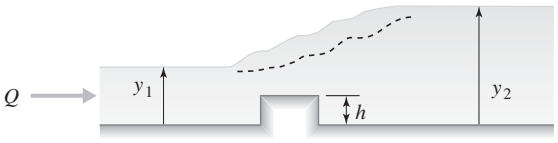


Fig. P10.36

10.37 Por un canal rectangular fluye agua con una profundidad de 1.6 m y a una velocidad de 0.85 m/s. En una ubicación corriente abajo, la descarga se reduce repentinamente a cero, haciendo que se propague un oleaje corriente arriba. Encuentre la profundidad y velocidad detrás del oleaje, y la velocidad de la onda de oleaje.

10.38 Por un canal rectangular fluye agua con una profundidad y y a una velocidad V. En una ubicación corriente abajo, la descarga se reduce repentinamente en un 60% (es decir, a 40% del valor original), haciendo que se propague un oleaje corriente arriba. Determine la profundidad y velocidad detrás del oleaje, así como la velocidad de la onda de oleaje.

(a) $y = 1.5$ m, $V = 1$ m/s

(b) $y = 5$ ft, $V = 3$ ft/s

10.39 Entra agua en un tramo de un canal rectangular donde $y_1 = 0.5$ m, $b = 7.5$ m, y $Q = 20$ m³/s (figura P10.39). Se desea que haya un salto hidráulico aguas arriba (ubicación 2) del reborde y que existan condiciones críticas en el reborde (ubicación 3). A no ser a través del salto, puede hacerse caso omiso de las pérdidas. Determine lo siguiente:

(a) Las profundidades en las ubicaciones 2 y 3

(b) La altura requerida del reborde, h

(c) La fuerza resultante que actúa sobre el reborde

(d) Haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía

(e) Describa la naturaleza y el carácter del salto

Fig. P10.39

10.40 Fluye agua como se muestra en la figura P10.40 bajo la compuerta de desagüe en un canal rectangular horizontal que mide 5 m de ancho. Las profundidades y_1 y y_2 son de 2.5 m y 10 cm, respectivamente. Las distancias horizontales entre las ubicaciones 1, 2 y 3 son lo suficientemente cortas como para que se pueda suponer que ocurran condiciones de flujo de variación rápida. Determine lo siguiente:

(a) La descarga

(b) La profundidad corriente abajo del salto en la ubicación 3

(c) La potencia perdida en el salto hidráulico

Fig. P10.40

10.41 Una sección de transición está ubicada a la entrada de un canal rectangular como se muestra en la figura P10.41. En la ubicación 1, la profundidad es lo suficientemente grande para que la velocidad sea insignificante. Si $b = 3$ m, $Fr_3 = 0.75$ y $Q = 5.55$ m³/s, determine lo siguiente:

(a) La elevación de la superficie del agua respecto al nivel de referencia en las ubicaciones 1, 2 y 3. Haga un bosquejo de la superficie del agua y de las líneas de referencia de energía entre las ubicaciones 1 y 3.

(b) La fuerza horizontal resultante que actúa sobre el fondo del canal entre las ubicaciones 2 y 3

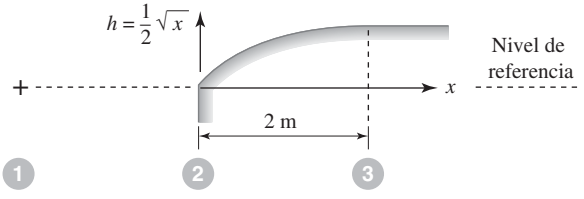


Fig. P10.41

10.42 Por un canal trapezoidal fluye agua, con $b = 5$ m, $m_1 = m_2 = 3$. Existe un salto hidráulico estacionario, con una profundidad corriente arriba $y_1 = 1.1$ m y descarga $Q = 60$ m³/s. Encuentre la profundidad corriente abajo y_2 y la potencia disipada por el salto.

10.43 Un canal rectangular de 4 m de ancho contiene un escalón rectangular hacia arriba cuyo ancho es el mismo que el del canal. Las condiciones de flujo determinadas son $y_1 = 0.5$ m, $V_1 = 8$ m/s y $y_2 = 2$ m.

(a) ¿Cuál es la altura h del escalón si $C_D = 1.2$?

(b) ¿Cuál sería y_2 si el escalón no estuviera presente?

10.44 Un canal rectangular (figura P10.44) tiene un repentino escalón hacia arriba de 0.17 m. Existe un salto hidráulico arriba del escalón. En la ubicación 2, corriente abajo del salto, la profundidad es $y_2 = 1.5$ m, y el número de Froude allí es $\text{Fr}_2 = 0.40$. Si el ancho del canal es 5 m y el coeficiente de arrastre en el escalón es $C_D = 0.35$, encuentre la descarga Q y la profundidad y_1 corriente arriba del salto.

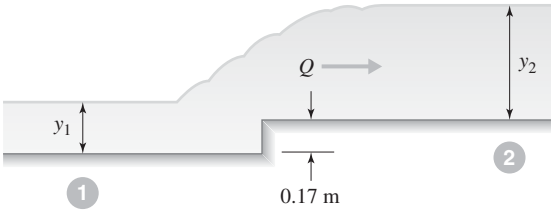


Fig. P10.44

Flujo no uniforme gradualmente variado

10.45 El canal cuyo perfil de fondo se ilustra en la figura P10.45 tiene una sección transversal rectangular, con $b = 8$ m, $n = 0.014$ y $S_0 = 0.004$. Determine lo siguiente:

(a) La descarga en el canal.

(b) Haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía.

(c) La posible existencia de un salto hidráulico

(*Sugerencia:* Suponga condiciones de flujo crítico en la entrada del canal.)

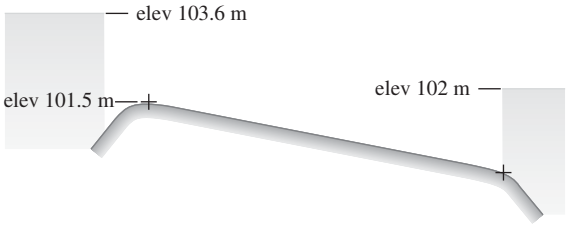


Fig. P10.45

10.46 Existe un flujo uniforme en un largo canal rectangular de ancho b, $S_0 = 0.0163$ y $n = 0.012$. El canal se altera elevando su fondo en Δz en una corta distancia. La alteración tiene la finalidad de actuar como "región de transición uniforme" de modo que las pérdidas puedan considerarse insignificantes. Determine qué cambios tienen lugar debido a la presencia de la transición. En su análisis incluya todos los cálculos relevantes para un flujo de variación rápida, identifique cualesquier perfiles del flujo de variación rápida, y haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía.

(a) $Q = 0.35$ m³/s, $b = 1.80$ m, $\Delta z = 100$ mm

(b) $Q = 12.5$ ft³/s, $b = 6$ ft, $\Delta z = 4$ in

10.47 Vuelva a resolver el problema 10.46 si $S_0 = 0.0013$.

10.48 Tiene lugar un flujo de agua por un canal rectangular con $b = 4$ m, $n = 0.012$, $L = 500$ m, $S_0 = 0.00087$. La descarga es 33 m³/s. A la entrada al canal, la profundidad es 0.68 m y existe una condición de descarga libre en el extremo corriente abajo. Realice una síntesis del perfil para determinar la naturaleza de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía.

10.49 Por un largo canal rectangular de 3 m de ancho con $y_0 = 1.54$ m se tiene un flujo de 8.5 m³/s. Hay una constricción moderada en el canal con lo que se reduce su ancho a 1.8 m de ancho.

(a) Determine las profundidades esperadas en la constricción y justo corriente arriba de la misma, no prestando atención a las pérdidas. Demuestre la solución en un diagrama E–y.

(b) Clasifique el perfil de flujo gradualmente variado corriente arriba de la constricción.

10.50 Se tiene una descarga de agua de 20 m³/s por un canal triangular con $m_1 = 3.5$ m, $m_2 = 2.5$, $S_0 = 0.001$, $n = 0.014$. A la entrada del canal la profundidad es 0.50 m, y a una distancia de 300 m corriente abajo la profundidad es 2.5 m. Determine la naturaleza de la superficie del agua sobre el tramo de 300 metros.

10.51 Un largo canal tiene un cambio en la pendiente del fondo a 500 m desde su extremo corriente abajo; corriente arriba de la transición la pendiente es $S_{01} = 0.0003$, y corriente abajo de ella la pendiente es $S_{02} = 0.005$. El tramo corriente abajo del canal termina en un embalse cuya elevación está a 3 m arriba del fondo del canal en esa ubicación. El tramo superior es bastante largo, y

muy lejos corriente arriba de la transición existen condiciones de flujo normal. La sección del canal es trapezoidal, con un ancho de fondo de 3 m, $m_1 = m_2 = 1.8$, $n = 0.012$, y una descarga de 17.5 m³/s. Determine la naturaleza de la superficie del agua y la línea de referencia de energía desde una ubicación muy alejada corriente arriba de la transición hasta el final del canal.

10.52 Un canal rectangular con $b = 4$ m tiene un cambio en pendiente, de modo que las profundidades normales son $y_{01} = 0.93$ m y $y_{02} = 1.42$ m. En lugares alejados corriente arriba y alejados corriente abajo de la transición, se presenta un flujo a las profundidades uniformes respectivas que sirven como controles. La descarga es 15 m³/s. Encuentre la variación de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía en toda la región.

10.53 El perfil de agua parcial que se ilustra en la figura P10.53 es para un canal rectangular de ancho $b = 3$ m, en el que fluye agua con una descarga de $Q = 5$ m³/s.

(a) ¿Existe un salto hidráulico en el canal? Si es así, ¿está ubicado corriente arriba o corriente abajo de la ubicación A?

(b) Haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía, e identifique cualesquier perfiles de superficie de agua conocidos.

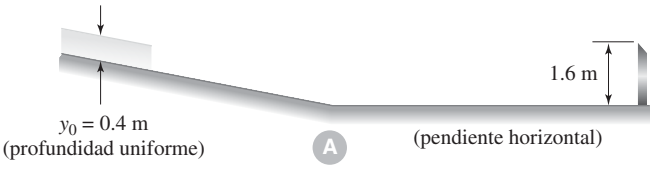


Fig. P10.53

10.54 Un canal rectangular largo (figura P10.54) tiene condiciones de flujo normales en las ubicaciones A y C, y ocurre un cambio en la pendiente del fondo en la ubicación B.

(a) En algún punto entre las ubicaciones A y C tendrá lugar un salto hidráulico. Explique por qué esta afirmación es verdadera.

(b) Clasifique y haga un bosquejo de los dos posibles perfiles de la superficie del agua que existen entre las ubicaciones A y C.

(c) Mediante un razonamiento y cálculos apropiados, determine si el salto ocurrirá corriente arriba de la ubicación B, o corriente abajo de la ubicación B.

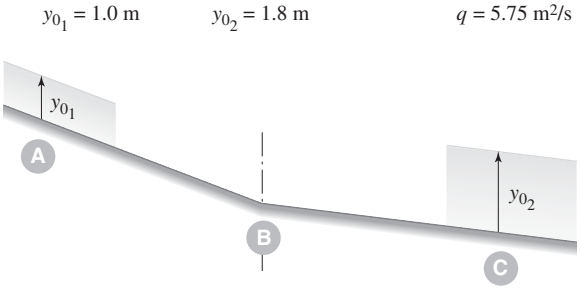


Fig. P10.54

10.55 Un largo canal rectangular (figura P10.55) tiene condiciones de flujo normales en las ubicaciones A y D, respectivamente, muy alejado corriente arriba y corriente abajo de la ubicación C. En C, ocurre un cambio en pendiente como se muestra.

(a) Clasifique la superficie del agua, y haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía entre A y D.

(b) Determine la altura h de la transición tal que ocurran condiciones de flujo normales entre A y B, la cual es una corta distancia corriente arriba de A.

(c) Explique qué tipo de perfil existe ahora corriente abajo de B.

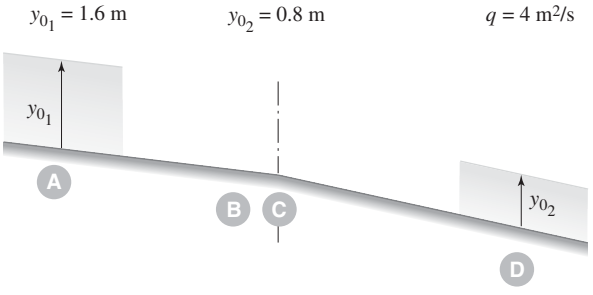


Fig. P10.55

10.56 Fluye agua con una descarga Q por un conducto circular de diámetro d y longitud L, con $S_0 = 0.001$, y $n = 0.015$. A la entrada la profundidad del agua es y_0 y a la salida existe una descarga libre. Determine la naturaleza de la superficie del agua en el conducto.

(a) $Q = 2.5\ \text{m}^3/\text{s}$, $L = 500$ m, $d = 2.5$ m, $y_0 = 0.4$ m

(b) $Q = 88\ \text{ft}^3/\text{s}$, $L = 1600$ ft, $d = 8$ ft, $y_0 = 1.3$ ft

10.57 Con los resultados del problema 10.51, calcule el perfil de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía usando un método numérico de su preferencia.

10.58 Un canal rectangular $(b = 5\ \text{m}, S_0 = -0.001)$ transporta un flujo a razón de $Q = 3\ \text{m}^3/\text{s}$. En un lugar determinado la profundidad es $y_1 = 2$ m y corriente abajo de esa ubicación la profundidad es $y_2 = 1.8$ m. El coeficiente de Manning es $n = 0.02$.

(a) Determine la distancia entre las ubicaciones 1 y 2.

(b) ¿Qué tipo de perfil de la superficie de agua existe en el tramo?

10.59 Un canal rectangular (figura P10.59) tiene las siguientes propiedades: $b = 1$ m, $S_0 = 0.0002$, $n = 0.017$. Un vertedero con muesca en V a 120º se instala en el canal para medir la descarga, con la parte inferior del vertedero ubicada a 0.5 m arriba del fondo del canal. Corriente arriba del vertedero, la profundidad Y se mide que es de 0.37 m.

(a) ¿Cuál es la descarga en el canal?

(b) Si existen condiciones de flujo uniformes muy lejos corriente arriba del vertedero, clasifique la naturaleza de la superficie del agua.

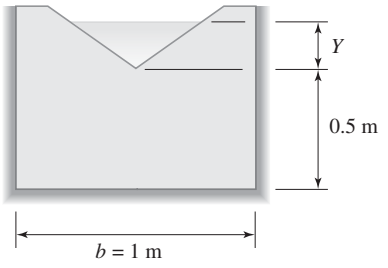


Fig. P10.59

10.60 Se tiene un flujo gradualmente variado sobre un tramo de un canal rectangular con $n = 0.013$, $S_0 = 0.005$ y $b = 2.5$ m. En la ubicación 1 la profundidad es 1.05 m y, en la 2, es de 1.2 m. Si las dos ubicaciones están a 50 m una de la otra, encuentre la descarga e identifique el tipo de perfil.

10.61 En una parte de un muy largo canal rectangular de ancho b (figura P10.61), se tiene un flujo uniforme con descarga Q y profundidad y_0. Al final del canal el flujo termina en una descarga libre. Además, a la salida el ancho del canal se reduce a b_1 en una distancia muy corta. Determine y describa, en forma tan completa como sea posible, los cambios que tienen lugar en la superficie del agua entre las ubicaciones A y B. Use un diagrama E–y para fines de ilustración.

(a) $Q = 5.5\ \text{m}^3/\text{s}$, $y_0 = 0.5$ m, $b = 3$ m, $b_1 = 1.5$ m

(b) $Q = 200\ \text{ft}^3/\text{s}$, $y_0 = 1.65$ ft, $b = 10$ ft, $b_1 = 5$ ft

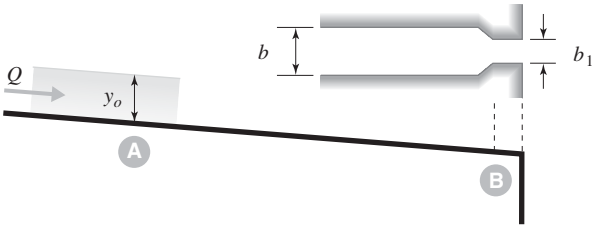


Fig. P10.61

10.62 Una compuerta de desagüe se coloca en un largo canal rectangular, $b = 4$ m, $n = 0.014$, y $S_0 = 0.0008$. La profundidad corriente arriba de la compuerta es $y_1 = 1.85$ m y corriente abajo de la compuerta la profundidad es $y_2 = 0.35$ m. Haciendo caso omiso de las pérdidas, identifique y calcule los perfiles de la superficie del agua en los dos lados de la compuerta.

10.63 Con los siguientes datos,[7] identifique los perfiles y grafique a escala la superficie del agua y la línea de referencia de energía.

$Q =$ 3.5	$n =$ 0.011	$S_0 =$ 0.001	$L =$ 200	$g =$ 9.81
$b =$ 5	$m =$ 2.5	$y_u =$ 0.80	$y_d =$ 2.00	$c_1 =$ 1.00

	Profundidad	Residuo
$y_c =$	1.356	−3.44E-07
$y_0 =$	1.442	−4.23E-07

Estación	y	A	V	E	y_m	S(y_m)	Δx	x	y_{cj}	Residuo
1	0.800	5.600	6.250	2.791						
2	0.850	6.056	5.779	2.552	0.825	8.311E-03	33	33	2.044	−5.98E-07
3	0.900	6.525	5.364	2.366	0.875	6.689E-03	33	65	1.961	−3.09E-07
4	0.950	7.006	4.996	2.222	0.925	5.443E-03	33	98	1.883	8.24E-07
5	1.000	7.500	4.667	2.110	0.975	4.472E-03	32	130	1.809	−7.46E-07
6	1.050	8.006	4.372	2.024	1.025	3.706E-03	32	162	1.740	−9.44E-08
7	1.100	8.525	4.106	1.959	1.075	3.097E-03	31	193	1.674	2.14E-07
8	1.150	9.056	3.865	1.911	1.125	2.606E-03	30	223	1.611	4.94E-07
7	2.000	20.000	1.750	2.156				200		
8	1.975	19.627	1.783	2.137	1.988	2.770E-04	−26	174		
9	1.950	19.256	1.818	2.118	1.963	2.916E-04	−26	147		
10	1.925	18.889	1.853	2.100	1.938	3.073E-04	−27	121		
11	1.900	18.525	1.889	2.082	1.913	3.240E-04	−27	94		
12	1.875	18.164	1.927	2.064	1.888	3.417E-04	−27	67		
13	1.850	17.806	1.966	2.047	1.863	3.607E-04	−27	40		
14	1.825	17.452	2.006	2.030	1.838	3.810E-04	−27	13		

[7]Los datos fueron generados con una hoja de cálculo Excel.

10.64 Con los siguientes datos,[8] identifique los perfiles y grafique a escala la superficie del agua y la línea de referencia de energía.

(a)

$Q =$ 3.5	$n =$ 0.013	$S_0 =$ 0.005	$L =$ 100	$g =$ 9.81
$b =$ 2.5	$m =$ 0	$y_u =$ 0.30	$y_d =$ 0.95	$c_1 =$ 1.00

	Profundidad	Residuo
$y_c =$	0.585	−8.58E-07
$y_0 =$	0.508	−1.42E-07

Estación	y	A	V	E	y_m	S(y_m)	Δx	x	y_{cj}	Residuo
1	0.300	0.750	4.667	1.410						
2	0.325	0.813	4.308	1.271	0.313	2.154E-02	8	8	0.985	6.45E-07
3	0.350	0.875	4.000	1.165	0.338	1.702E-02	9	17	0.932	−4.60E-07
4	0.375	0.938	3.733	1.085	0.363	1.369E-02	9	26	0.884	6.34E-07
5	0.400	1.000	3.500	1.024	0.388	1.119E-02	10	36	0.840	3.55E-07
6	0.425	1.063	3.294	0.978	0.413	9.272E-03	11	47	0.799	2.00E-07
7	0.450	1.125	3.111	0.943	0.438	7.774E-03	13	60	0.762	4.40E-07
8	0.475	1.188	2.947	0.918	0.463	6.587E-03	16	76	0.727	9.05E-07
9	0.500	1.250	2.800	0.900	0.488	5.635E-03	29	104	0.694	2.22E-07
10	0.950	7.006	0.500	0.963				100		
11	0.850	6.056	0.578	0.867	0.900	9.698E-04	−24	76		
12	0.800	5.600	0.625	0.820	0.825	1.236E-03	−13	64		
13	0.750	5.156	0.679	0.773	0.775	1.474E-03	−13	51		
14	0.700	4.725	0.741	0.728	0.725	1.781E-03	−14	36		
15	0.650	4.306	0.813	0.684	0.675	2.183E-03	−16	21		
16	0.600	3.900	0.897	0.641	0.625	2.725E-03	−19	2		

(b)

$Q =$ 125	$n =$ 0.013	$S_0 =$ 0.005	$L =$ 300	$g =$ 32.2
$b =$ 8	$m =$ 0	$y_u =$ 1.00	$y_d =$ 3.00	$c_1 =$ 1.49

	Profundidad	Residuo
$y_c =$	1.965	−1.04E-07
$y_0 =$	1.710	−4.30E-04

Estación	y	A	V	E	y_m	S(y_m)	Δx	x	y_{cj}	Residuo
1	1.000	8.000	15.625	4.791						
2	1.100	8.800	14.205	4.233	1.050	2.155E-02	34	34	3.311	−3.50E-07
3	1.200	9.600	13.021	3.833	1.150	1.634E-02	35	69	3.102	8.20E-07
4	1.300	10.400	12.019	3.543	1.250	1.269E-02	38	107	2.914	5.79E-07
5	1.400	11.200	11.161	3.334	1.350	1.007E-02	41	148	2.744	3.35E-07
6	1.500	12.000	10.417	3.185	1.450	8.135E-03	48	195	2.589	2.31E-07
7	1.600	12.800	9.766	3.081	1.550	6.674E-03	62	258	2.447	3.00E-07
8	1.700	13.600	9.191	3.012	1.650	5.549E-03	126	384	2.317	2.58E-07
9	3.000	37.500	3.333	3.173				300		
10	2.800	33.600	3.720	3.015	2.900	1.105E-03	−40	260		
11	2.600	29.900	4.181	2.871	2.700	1.349E-03	−39	220		
12	2.400	26.400	4.735	2.748	2.500	1.674E-03	−37	183		
13	2.200	23.100	5.411	2.655	2.300	2.121E-03	−32	151		
14	2.000	20.000	6.250	2.607	2.100	2.751E-03	−21	129		
15	1.965	19.478	6.417	2.605	1.983	3.247E-03	−1	128		

[8]Los datos fueron generados con una hoja de cálculo Excel.

10.65 Considere una curva de remanso de agua situada corriente arriba de una presa en un embalse rectangular (figura P10.65). Los datos dados son: profundidad normal $y_0 = 3.92$ m, $Q = 125$ m³/s, $S_0 = 0.0004$, $n = 0.025$, $y_A = 11$ m, $y_B = 12$ m.

(a) Identifique el tipo de perfil que existe en el embalse.

(b) Calcule la distancia entre A y B.

(c) Haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía.

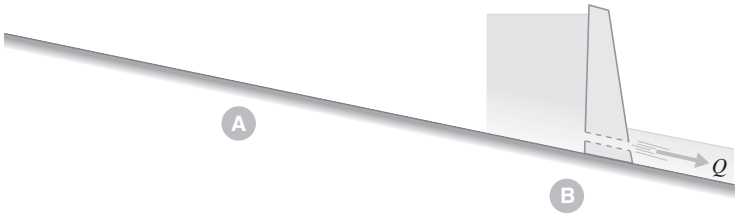


Fig. P10.65

10.66 Un canal rectangular tiene un cambio en pendiente como se ilustra en la figura P10.66. El canal mide 3.66 m de ancho, con $n = 0.017$, $S_{02} = 0.0028$, y $Q = 15.38$ m³/s.

(a) Determine la profundidad que debe existir en el canal corriente abajo para que un salto hidráulico termine en condiciones de flujo uniforme.

(b) Si $y_{01} = 0.6$ m, calcule la longitud al salto, L_j, usando varios incrementos de profundidad en un cálculo por pasos.

(c) Haga un bosquejo de la superficie del agua y de la línea de referencia de energía, e identifique todos los perfiles de flujo gradualmente variados.

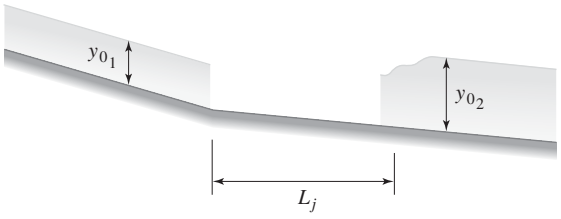


Fig. P10.66

10.67 En los tres canales que se muestran en la figura P10.67, las profundidades normales y críticas están indicadas por líneas discontinuas (- - -) y punteadas (· · ·), respectivamente. Haga un bosquejo de un posible perfil compuesto para cada sistema, e identifique todas las superficies gradualmente variadas.

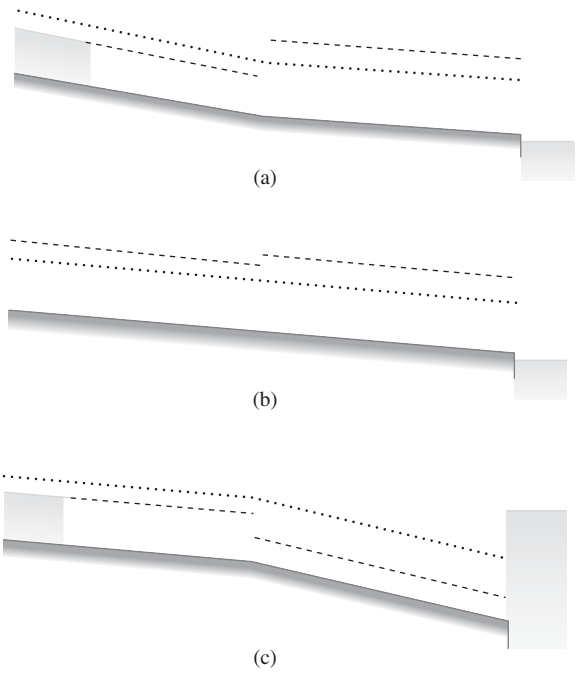


Fig. P10.67

10.68 En un río se tiene un flujo de diseño de $Q = 19$ m³/s que puede ser aproximado como un canal rectangular ancho con las siguientes propiedades: $b = 20$ m, $S_0 = 0.0005$, $n = 0.016$. Se colocará una pequeña represa en el canal como parte de un plan para el control de inundaciones (figura P10.68). La altura de la represa es $h = 6$ m, y la profundidad de flujo en la línea de base aguas abajo de la represa es $y_{\text{línea de base}} = 0.10$ m. Se tiene que colocar un paramento ($n = 0.014$) corriente abajo de la represa. El propósito del paramento es mantener alejado del lecho del río cualquier salto hidráulico que pueda haber corriente abajo de la represa, para las condiciones de diseño dadas para evitar erosión del lecho del río. La profundidad detrás del salto en el extremo del paramento es $y_2 = 0.75$ m. Determine lo siguiente:

(a) La potencia en kilowatts disipada por el salto

(b) La longitud de diseño del paramento

(c) Los perfiles de flujo gradualmente variado aguas arriba de la represa, y entre la línea de base y el salto hidráulico

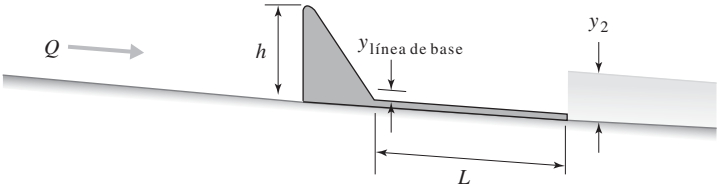


Fig. P10.68

10.69 Un canal rectangular muy ancho tiene las siguientes propiedades: $S_0 = 0.0005$, $n = 0.017$, $q = 1.2$ m²/s. En algún lugar, por ejemplo en la ubicación A, la profundidad es 0.65 m y, en la ubicación B, la profundidad es 0.90 m.

(a) ¿La ubicación B está corriente arriba o corriente abajo de la ubicación A?

(b) Usando la función de flujo variado, determine la distancia entre las ubicaciones A y B.

10.70 Un estuario de un río descarga en el océano. El estuario puede ser aproximado como un canal muy ancho con una profundidad de 7 m en su salida, con $S_0 = 0.0001$ y $n = 0.015$. Si la descarga hacia el océano desde el estuario es $q = 1.5$ m³/s por metro de ancho, determine las distancias corriente arriba desde el océano donde la profundidad es igual a 6, 5, 4 y 2 m.

10.71 La sección transversal de un río puede ser aproximada por dos rectángulos como se muestra en la figura P10.71. Las propiedades y dimensiones del canal son: $b_1 = 150$ m, $z_1 = 4$ m, $n_1 = 0.03$, $b_2 = 5$ m, $z_2 = 0$ m y $n_2 = 0.02$. Si la pendiente de la línea de referencia de energía es $S = 0.0005$ y la profundidad es $y = 5$ m, encuentre:

(a) El coeficiente de energía para la sección compuesta

(b) La descarga

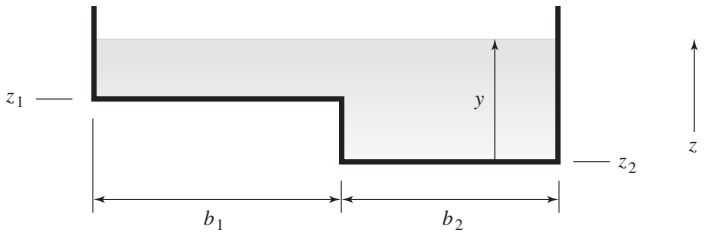


Fig. P10.71

10.72 Considere la sección transversal del mismo río del problema 10.71. En la tabla de la derecha aparecen datos para dos lugares x a lo largo del río:

En el lugar corriente abajo $x = 400$ m, la profundidad es $y = 3.0$ m cuando la descarga es $Q = 280$ m³/s. Usando un procedimiento de prueba y error, determine la profundidad y en la ubicación $x = 0$ corriente arriba.

x (m)	b_1 (m)	b_2 (m)	z_1 (m)	z_2 (m)	n_1	n_2
0	115	107	16.7	15.0	0.05	0.03
400	149	91	17.7	15.1	0.05	0.03

En un complejo con tuberías industriales como éste, el diseño de ingeniería requiere que los flujos permanentes sean analizados para que las medidas de los tubos y la colocación de las bombas sean correctas. Además, ocasionalmente se realizan análisis para mitigar las excitaciones no permanentes, o momentáneas, del sistema. (Marafona/Shutterstock)

11

Flujos en sistemas de tuberías

Esquema

11.1 Introducción
11.2 Pérdidas en sistemas de tuberías
  11.2.1 Pérdidas por fricción en elementos de tuberías
11.3 Sistemas de tuberías simples
  11.3.1 Tuberías en serie
  11.3.2 Tuberías en paralelo
  11.3.3 Tuberías ramales
11.4 Análisis de redes de tuberías
  11.4.1 Ecuaciones para redes generalizadas
  11.4.2 Linearización de las ecuaciones de energía para un sistema
  11.4.3 Método de Hardy Cross
  11.4.4 Análisis de redes con programas de computadora generalizados
11.5 Flujo no permanente en tuberías
  11.5.1 Flujo incompresible en un tubo inelástico
  11.5.2 Flujo compresible en un tubo elástico
11.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Comparar las ecuaciones empíricas para pérdida por fricción en tuberías
- Introducir el concepto de línea de referencia hidráulica como una variable para el análisis de tuberías
- Describir métodos específicos para calcular descargas y presiones en sistemas de tuberías simples
- Presentar soluciones linearizadas (es decir, el método de Hardy Cross) para redes de tuberías mediante un análisis en una hoja de cálculo
- Mostrar el uso de programas de cómputo para el análisis de redes de tuberías
- Introducir un análisis simplificado para flujos no permanentes en sistemas de tuberías simples

11.1 INTRODUCCIÓN

Los flujos internos en tuberías y conductos se encuentran comúnmente en todas partes en nuestra sociedad industrializada. Desde suministrar agua potable hasta transportar productos químicos y otros líquidos industriales, los ingenieros han diseñado y construido incontables kilómetros de sistemas de tuberías a escalas relativamente grandes. Las unidades de tuberías más pequeñas también abundan en controles hidráulicos, en sistemas de calefacción y aire acondicionado, en sistemas de flujo cardiovascular y pulmonar, por mencionar sólo algunos. Estos flujos pueden ser permanentes o no permanentes. El fluido puede ser incompresible o compresible y el material de las tuberías puede ser elástico, inelástico, o quizá viscoelástico. En este capítulo nos concentramos principalmente en los flujos incompresibles y permanentes en tuberías rígidas. El sistema de tuberías puede ser relativamente simple, de modo que las variables puedan resolverse fácilmente con una calculadora, o puede ser lo suficientemente complicado como para que sea más cómodo usar programas computacionales.

Elementos: *Tramos de tubos de diámetro constante.*

Componentes: *Válvulas, conexiones T, codos, reducciones o cualquier otro dispositivo que pueda crear una pérdida en el sistema.*

Se considera que los sistemas de tuberías están compuestos de elementos y componentes. Básicamente, los **elementos** de tuberías son tramos de tubos de diámetro constante, y los **componentes** están formados por válvulas, conexiones T, codos, reducciones, o cualquier otro dispositivo que pueda crear una pérdida en el sistema. Además de los componentes y elementos, las bombas agregan energía al sistema y las turbinas extraen energía. Los elementos y componentes se conectan en uniones. La figura 11.1 ilustra varios tipos de sistemas de tuberías.

Después de un análisis sobre las pérdidas en tuberías, se analizan varios sistemas de tuberías, incluyendo configuraciones en serie, ramales y en paralelo. Dirigimos ahora nuestra atención a sistemas de redes más amplios, donde se presentan varios métodos de solución. La mayoría de los problemas de tuberías analizados son aquellos donde la descarga es la variable desconocida; este tipo de problema está clasificado como de categoría 2 en la sección 7.6.3.

Por último, presentamos una breve introducción al flujo no permanente en tuberías. Este tema ha sido importante durante muchos años. Está adquiriendo una creciente importancia, ya que la demanda de construcción de tuberías más baratas continúa, así que la manera en la cual las tuberías, las válvulas, las bombas y otros componentes interactúan y funcionan se vuelve más sofisticada. Se abordan sólo los aspectos fundamentales de flujos no permanentes, concentrándonos en dos suposiciones en un tubo simple de diámetro constante: un flujo incompresible en un tubo inelástico, y un flujo de líquido compresible en un tubo elástico.

11.2 PÉRDIDAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS

Las pérdidas pueden dividirse en dos categorías: (a) las debidas al cortante en las paredes en elementos de tubos y (b) las que se deben a los componentes en las tuberías. Las primeras se distribuyen a lo largo de los elementos de las tuberías; las últimas se tratan como discontinuidades discretas, en las líneas de referencia hidráulica y de energía, y comúnmente se citan como pérdidas menores; se deben principalmente a flujos separados o secundarios.

La mecánica fundamental del cortante en la pared y el desarrollo de relaciones empíricas referentes a pérdidas en tuberías se trataron en el capítulo 7. Las pérdidas menores se trataron en detalle en la sección 7.6.4 y no se estudian más aquí. El siguiente material se concentra en el tratamiento de las pérdidas en el análisis de sistemas de tuberías.

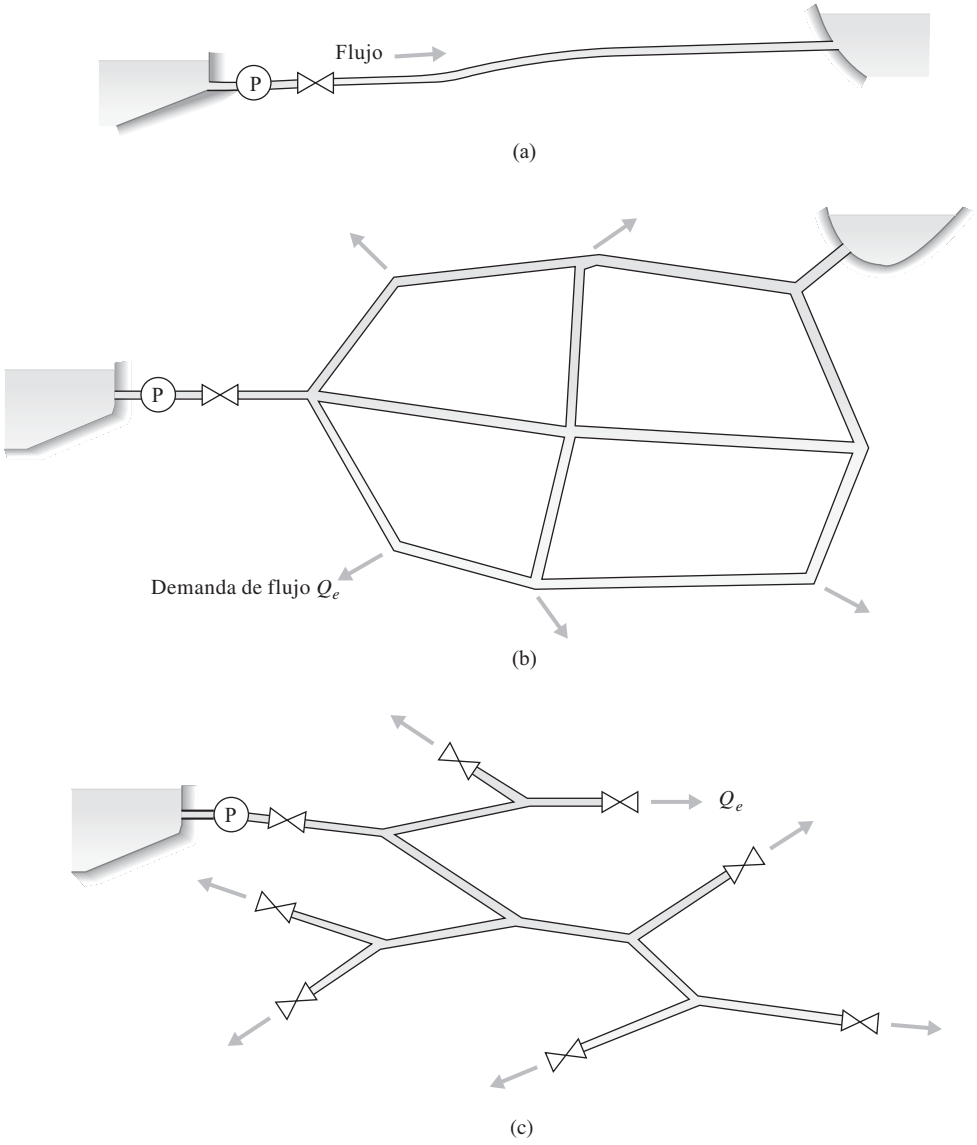


Fig. 11.1 Sistemas de tuberías: (a) un solo tubo; (b) red de distribución; (c) red en forma de árbol.

11.2.1 Pérdidas por fricción en elementos de tuberías

Es conveniente expresar la pérdida por fricción en elementos de tuberías en la forma exponencial

$$h_L = RQ^{\beta} \tag{11.2.1}$$

en donde H_L es la pérdida de carga a lo largo de la longitud L del tubo, R es el *coeficiente de resistencia*, Q es la descarga en el tubo, y β es un exponente. Dependiendo de la formulación elegida, el coeficiente de resistencia puede ser una función de la rugosidad de la tubería, del número de Reynolds, o de la longitud y el diámetro del elemento de la tubería. En particular, la relación de Darcy-Weisbach, ecuación 7.6.23, puede sustituirse en la ecuación 11.2.1. Entonces $\beta = 2$, y la expresión resultante para R es

$$R = \frac{fL}{2gDA^2} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} \tag{11.2.2}$$

CONCEPTO CLAVE *Las pérdidas por fricción en tuberías se evalúan comúnmente usando la ecuación de Darcy-Weisbach o la de Hazen-Williams. La formulación de Darcy-Weisbach da una estimación más precisa.*

donde f es el factor de fricción. Las características de f para flujos en tubos comerciales se desarrollaron en la sección 7.6.3. Específicamente, el diagrama de Moody, figura 7.13, presenta un panorama completo de cómo varía el factor de fricción en un intervalo amplio de números de Reynolds y para diversas rugosidades relativas. Para el análisis de redes de tuberías es conveniente expresar el comportamiento de f usando fórmulas empíricas aproximadas, equivalentes, en las que el factor de fricción puede obtenerse directamente en términos del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. Se han desarrollado diversas relaciones y demostrado que son razonablemente precisas para cálculos de ingeniería (Benedict, 1980). En particular, las fórmulas de Swamee y Jain (1976) se presentaron en la sección 7.6.3 y se demostró que representan con precisión la relación de Colebrook, ecuación 7.6.28. La fórmula del factor de fricción desarrollada por Swamee y Jain es

$$f = 1.325\left\{\ln\left[0.27\left(\frac{e}{D}\right) + 5.74\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2} \tag{11.2.3}$$

Combinando las ecuaciones 11.2.2 y 11.2.3, encontramos que

$$R = 1.07\left(\frac{L}{gD^5}\right)\left\{\ln\left[0.27\left(\frac{e}{D}\right) + 5.74\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2} \tag{11.2.4}$$

Las ecuaciones 11.2.3 y 11.24 son válidas en los intervalos $0.01 > e/D > 10^{-8}$, y $10^8 > \mathrm{Re} > 5000$. El régimen completamente agitado, donde Re tiene un efecto insignificante en f, empieza con un número de Reynolds dado por

$$\mathrm{Re} = \frac{200D}{e\sqrt{f}} \tag{11.2.5}$$

Para valores de Re mayores que éste, el factor de fricción es una función sólo de e/D, y está dado por

$$f = 1.325\left\{\ln\left[0.27\left(\frac{e}{D}\right)\right]\right\}^{-2} \tag{11.2.6}$$

Dos expresiones adicionales para las pérdidas por fricción en tuberías, que se utilizan con frecuencia, son las fórmulas de Hazen-Williams y de Chezy-Manning. Para flujo de agua, el valor de R en la ecuación 11.2.1 para la relación de Hazen-Williams es

$$R = \frac{K_1 L}{C^\beta D^m} \qquad K_1 = \begin{cases} 10.59 & \text{Unidades SI} \\ 4.72 & \text{Unidades inglesas} \end{cases} \tag{11.2.7}$$

en la que los exponentes son $\beta = 1.85$ y $m = 4.87$, y C es el coeficiente de Hazen-Williams que depende sólo de la rugosidad. En la tabla 11.1 se dan valores del coeficiente de rugosidad C de Hazen-Williams.

La ecuación de Chezy-Manning está más comúnmente asociada con un flujo en un canal abierto. No obstante, en sistemas de alcantarillado y drenaje en particular, se ha aplicado a conductos con flujos en condiciones de *sobrecarga*, es decir, ante condiciones presurizadas. La ecuación de Chezy-Manning se introdujo en la sección 7.7. Para un tubo circular con flujo total, la ecuación 7.7.6 puede sustituirse en la ecuación 11.2.1 y despejar R:

$$R = \frac{10.29 n^2 L}{K_2 D^{5.33}} \qquad K_2 = \begin{cases} 1 & \text{Unidades SI} \\ 2.22 & \text{Unidades inglesas} \end{cases} \tag{11.2.8}$$

en donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning. En la ecuación 11.2.1, el exponente $\beta = 2$.

Una ventaja de usar la ecuación 11.2.7 o la ecuación 11.2.8 en lugar de la ecuación 11.2.4 es que en las primeras dos, C y n dependen sólo de la rugosidad mientras que, en la última, f depende del número de Reynolds así como de la rugosidad relativa. No obstante, la ecuación 11.2.4 se recomienda puesto que da una representación más precisa de las pérdidas por fricción en tuberías. Observe que las relaciones de Hazen-Williams y de Chezy-Manning son dimensionalmente no homogéneas,[1] mientras que la ecuación de Swamee-Jain es dimensionalmente homogénea y contiene los dos parámetros e/D y Re, que influyen apropiadamente en las pérdidas.

Tabla 11.1 Valores nominales del coeficiente C de Hazen-Williams

Tipo de tubo	C
Extremadamente liso; asbesto-cemento	140
Hierro colado nuevo o liso; concreto	130
Duela de madera; acero recién soldado	120
Hierro colado promedio; acero recién remachado, arcilla vitrificada	110
Hierro colado o acero remachado después de algunos años de uso	95-100
Tubos viejos deteriorados	60-80

[1] En una ecuación dimensionalmente no homogénea, las constantes de la ecuación tienen unidades asignadas a ellas. En una ecuación dimensionalmente homogénea las constantes son adimensionales.

Las limitaciones de las fórmulas de Hazen-Williams y de Chezy-Manning se demuestran como sigue. Empezando con la ecuación 11.2.1, la pérdida de carga h_L con base en el coeficiente de resistencia de Darcy-Weisbach, ecuación 11.2.2, con el exponente $\beta = 2$ puede igualarse a h_L basada en el coeficiente de Hazen-Williams, ecuación 11.2.7, con $\beta = 1.85$. Introduciendo el número de Reynolds para eliminar Q y despejando el factor de fricción f resulta en

$$f = \frac{1.28gK_1}{C^{1.85}D^{0.02}(\mathrm{Re}\ \nu)^{0.15}} \tag{11.2.9}$$

Con unidades SI y para agua a 20 ºC, la ecuación 11.2.9 se reduce a

$$f = \frac{1056}{C^{1.85}D^{0.02}\mathrm{Re}^{0.15}} \tag{11.2.10}$$

Observe que f depende ligeramente de D en esta ecuación. De manera similar, la ecuación 11.2.8 puede sustituirse en la ecuación 11.2.1 con $\beta = 2$ e igualarse a h_L basada en la formulación de Darcy-Weisbach para dar

$$f = \frac{124.5n^2}{D^{0.33}} \tag{11.2.11}$$

Las comparaciones entre la fórmula original de Colebrook (ecuación 7.6.28), la fórmula de Swamee y Jain (ecuación 11.2.3), y las expresiones equivalentes para los coeficientes de Hazen-Williams y de Manning (ecuaciones 11.2.10 y 11.2.11) se ilustran en la figura 11.2 para un tubo de concreto de 1 m de diámetro que fluye totalmente lleno de agua ($C = 130, n = 0.012, e/D = 0.00015$). Es evidente que las re-

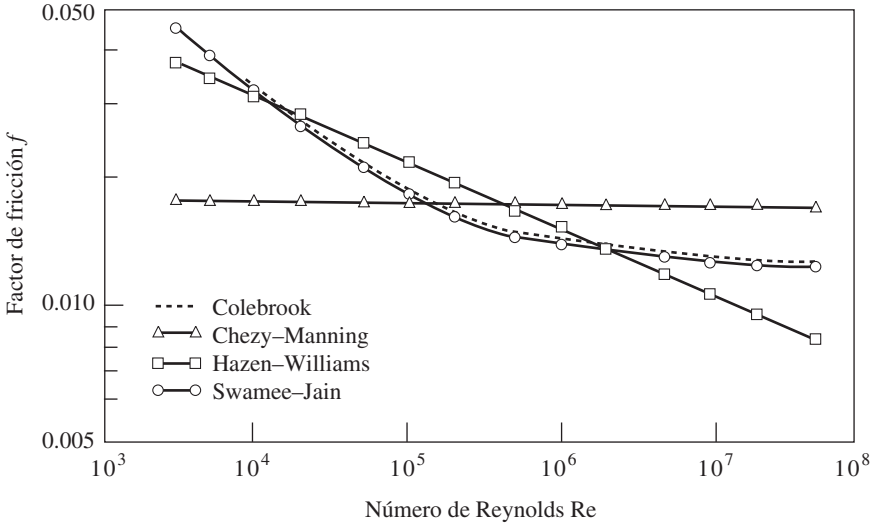


Fig. 11.2 Comparación de varias fórmulas aproximadas con la fórmula original de Colebrook.

laciones de Hazen-Williams y de Chezy-Manning son válidas dentro de un intervalo limitado de Re, y que la ecuación 11.2.3 da una estimación más versátil y precisa de las pérdidas en tuberías. En el resto de este capítulo trataremos la mayoría de las pérdidas por fricción usando las fórmulas de Darcy-Weisbach, ecuaciones 11.2.2 a 11.2.6. Haremos notar cualesquiera excepciones.

Ejemplo 11.1

Una tubería transporta 0.05 m^3/s de agua, a 30 °C. La longitud de la línea es 300 m y el diámetro es 0.25 m. Estime la pérdida de carga debido a la fricción, usando para ello las tres fórmulas (a) Darcy-Weisbach ($e = 0.5$ mm), (b) Hazen-Williams ($C = 110$) y (c) Chezy-Manning ($n = 0.012$).

Solución

La viscosidad cinemática del agua a 30 °C es $\nu = 0.804 \times 10^{-6}$ m^2/s. Se calcula que la rugosidad, la velocidad y el número de Reynolds son

$$\frac{e}{D} = 0.002 \qquad V = 1.02 \text{ m/s} \qquad \text{Re} = 3.17 \times 10^5$$

(a) Sustituya valores en la ecuación 11.2.4:

$$R = 1.07 \frac{300}{9.81 \times (0.25)^5} \times \{\ln[0.27 \times 0.002 + 5.74\,(3.17 \times 10^5)^{-0.9}]\}^{-2} = 610$$

Entonces, con la ecuación 11.2.1, la pérdida por fricción basada en la fórmula de Darcy-Weisbach es

$$h_L = RQ^2$$
$$= 610\,(0.05)^2 = 1.52 \text{ m}$$

(b) Para la fórmula de Hazen-Williams, use la ecuación 11.2.7:

$$R = \frac{10.59 \times 300}{(110)^{1.85}(0.25)^{4.87}} = 454$$

$$h_L = 454\,(0.05)^{1.85} = 1.78 \text{ m}$$

(c) Use la ecuación 11.2.8 para la formulación de Chezy-Manning:

$$R = \frac{10.29(0.012)^2(300)}{1 \times (0.25)^{5.33}} = 719$$

$$h_L = 719\,(0.05)^2 = 1.80 \text{ m}$$

El inciso (a) con $h_L = 1.52$ m es el más preciso. El resultado con la formulación de Hazen-Williams es 17% demasiado alto y el resultado con la de Chezy-Williams es 18% demasiado alto.

11.3 SISTEMAS DE TUBERÍAS SIMPLES

El análisis de una sola tubería se presentó en la sección 7.6.4; sería apropiado aquí que en esa sección el lector repasara las tres categorías de problemas de tuberías. Para sistemas de tuberías más complejos, la metodología es similar. Con redes relativamente simples, por ejemplo sistemas en serie, en paralelo y ramales, pueden desarrollarse soluciones específicas que son apropiadas para su uso con calculadoras, algoritmos de hojas de cálculo o programas de cómputo. Estos procedimientos son relevantes porque hacen uso del ingenio de quien los resuelve y requieren entender la naturaleza del flujo y las distribuciones de la carga hidráulica para la configuración particular de la tubería. Para sistemas de mayor complejidad, un medio alternativo para resolver dichos problemas es el método de Hardy Cross, que se presenta en la sección 11.4.

El principio fundamental en el enfoque específico es identificar todas las incógnitas y escribir un número equivalente de ecuaciones independientes a resolver. Después, el sistema se simplifica al eliminar tantas incógnitas como sea posible y reducir el problema a una serie de problemas de tuberías individuales, ya sea de la categoría 1 o de la categoría 2, sección 7.6.3.

11.3.1 Tuberías en serie

Considere el sistema en serie que se muestra en la figura 11.3. Está formado por N elementos de tubos con un número especificado de componentes de pérdidas menores ΣK, asociadas con cada elemento i-ésimo de tubo. Una pérdida menor individual que se describe en la sección 7.6.5 es igual a $h_L = KV^2/2g$. Es conveniente expresar aquí la pérdida menor en términos de la descarga en lugar de velocidad, de modo que $h_L = KQ^2/2gA^2$. Para muchas situaciones de flujo, es práctica común no prestar atención a los términos de energía cinética a la entrada y a la salida; serían de importancia sólo si las velocidades fueran relativamente altas. Suponiendo que el exponente en la ecuación 11.2.1 es $\beta = 2$, la ecuación de la energía aplicada de la ubicación A a la ubicación B de la figura 11.3 es

CONCEPTO CLAVE *Se usan principios de continuidad y energía para analizar sistemas de tuberías. Los parámetros pronosticados son la descarga y la carga hidráulica.*

$$\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_{\mathrm{A}}-\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_{\mathrm{B}}=\left(R_1+\frac{\Sigma K}{2gA_1^2}\right)Q_1^2+\left(R_2+\frac{\Sigma K}{2gA_2^2}\right)Q_2^2+\cdots+\left(R_N+\frac{\Sigma K}{2gA_N^2}\right)Q_N^2=\sum_{i=1}^{N}\left(R_i+\frac{\Sigma K}{2gA_i^2}\right)Q_i^2 \tag{11.3.1}$$

en la que R_i es el coeficiente de resistencia para el tubo i.

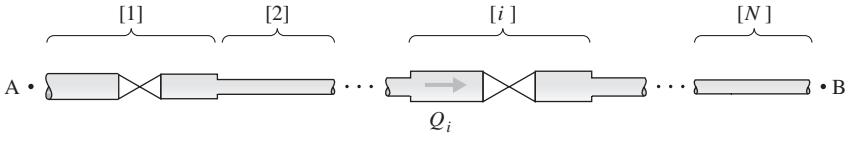


Fig. 11.3 Sistema de tubos en serie.

El enunciado de continuidad para el sistema en serie es que la descarga en cada elemento es idéntica, o

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_i = \cdots = Q_N = Q \tag{11.3.2}$$

Sustituyendo Q_i con Q, la ecuación 11.3.1 se convierte en

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(R_i + \frac{\Sigma K}{2gA_i^2}\right)\right]Q^2 \tag{11.3.3}$$

La ecuación 11.2.4 puede ser sustituida por R_i o, alternativamente, puede usarse la ecuación 11.2.3 o el diagrama de Moody, figura 7.13, para obtener valores del factor de fricción. El lector debe reconocer que, en un sistema en serie, la descarga permanece constante de un elemento de tubería a otro y las pérdidas son acumulativas; esto es, son la suma de las pérdidas menores provocadas por los componentes y las pérdidas por fricción en la tubería.

Para un problema de categoría 1, se conoce el lado derecho de la ecuación 11.3.3 y la solución es directa. Para un problema de categoría 2, en el que se desconozca Q, se requiere de una solución de prueba y error ya que el número de Reynolds, en términos de la descarga desconocida ($\mathrm{Re} = 4Q/\pi\nu D$), está presente en la relación del factor de fricción. Observe que si se supone flujo en la zona completamente agitada, f es independiente de Q y la ecuación 11.3.3 se reduce a una ecuación cuadrática en Q. Un problema de categoría 3 no se encuentra en este tipo de análisis. Un sistema de tuberías en serie con pérdidas menores y tuberías de diámetro constante se aplica a un problema de categoría 1 en el ejemplo 7.13. La solución para un sistema en serie un poco más complejo se ilustra en el ejemplo 11.2.

Ejemplo 11.2

Para el sistema que se muestra en la figura E11.2, encuentre la potencia requerida para bombear 100 L/s de líquido ($S = 0.85$, $\nu = 10^{-5}$ m^2/2). La bomba está operando con una eficiencia $\eta = 0.75$. Los datos pertinentes se dan en la figura.

Línea 1: $L = 10$ m, $D = 0.20$ m, $e = 0.05$ mm, $K_1 = 0.5$, $K_v = 2$
Línea 2: $L = 500$ m, $D = 0.25$ m, $e = 0.05$ mm, $K_e = 0.25$, $K_2 = 1$

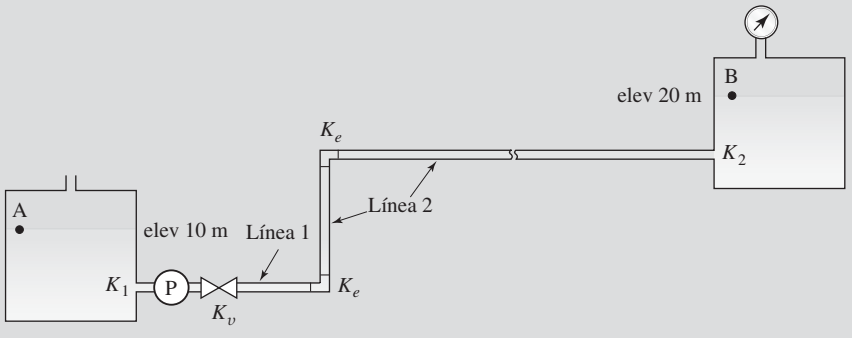


Fig. E11.2

(continúa)

Solución

Éste es un problema de categoría 1. La relación de energía, ecuación 11.3.3, para el sistema es

$$\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_A + H_P = \left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_B + \left[R_1 + \frac{K_1+K_v}{2gA_1^2} + R_2 + \frac{2K_e+K_2}{2gA_2^2}\right]Q^2$$

Los coeficientes de resistencia, R_1 y R_2, se calculan con la ecuación 11.2.4 después de evaluar primero Re y e/D:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{4Q}{\pi D_1 \nu} = \frac{4\times 0.10}{\pi \times 0.20 \times 10^{-5}} = 6.37\times 10^4 \qquad \left(\frac{e}{D}\right)_1 = \frac{0.05}{200} = 0.00025$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{4Q}{\pi D_2 \nu} = \frac{4\times 0.10}{\pi \times 0.25 \times 10^{-5}} = 5.09\times 10^4 \qquad \left(\frac{e}{D}\right)_2 = \frac{0.05}{250} = 0.0002$$

$$R_1 = 1.07\left(\frac{10}{9.81\times 0.20^5}\right) \times \{\ln[0.27\times 0.00025 + 5.74\times (6.37\times 10^4)^{-0.9}]\}^{-2} = 53.4$$

$$R_2 = 1.07\left(\frac{500}{9.81\times\ 0.25^5}\right) \times \{\ln[0.27\times 0.0002 + 5.74\times (5.09\times 10^4)^{-0.9}]\}^{-2} = 904$$

Se calcula que los términos de los coeficientes de pérdidas menores son

$$\frac{K_1+K_v}{2gA_1^2} = \frac{0.5+2}{2\times 9.81\times [\,\pi/4\times 0.20^2\,]^2} = 129.1$$

$$\frac{2K_e+K_2}{2gA_2^2} = \frac{2\times 0.25+1}{2\times 9.81\times [\,\pi/4\times 0.25^2\,]^2} = 31.7$$

Sustituya estos valores en la ecuación de energía y obtenga

$$0+10+H_P = \frac{200\times 10^3}{0.85\times 9800} + 20 + (53.4+129.1+904+31.7)\,0.1^2$$

Esta relación se reduce a

$$10 + H_P = 24 + 20 + 11.2$$

Despejando la carga a través de la bomba da $H_P = 45.2$ m. La potencia de entrada requerida es

$$\dot{W}_P = \frac{\gamma Q H_P}{\eta} = \frac{(9800\times 0.85)\times 0.10\times 45.2}{0.75} = 5.0\times 10^4\ \mathrm{W} \quad \text{o} \quad 50\ \mathrm{kW}$$

11.3.2 Tuberías en paralelo

Una distribución de tuberías en paralelo se muestra en la figura 11.4; es esencialmente una configuración de N elementos de tuberías unidos en A y B con ΣK componentes de pérdidas menores asociados con cada elemento de tubo i. La ecuación de continuidad aplicada ya sea a la ubicación A o a la B está dada por

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i \tag{11.3.4}$$

La suma algebraica de la línea de referencia de energía alrededor de cualquier bucle definido debe ser cero. Al igual que en el caso de tuberías en serie, se acostumbra suponer que $V^2/2g \ll (p/\gamma + z)$. Por tanto, para cualquier elemento i de tubería, la ecuación de energía de la ubicación A a B es

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\mathrm{A}} - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\mathrm{B}} = \left(R_i + \frac{\Sigma K}{2gA_i^2}\right) Q_i^2 \qquad i = 1, \ldots, N \tag{11.3.5}$$

Las incógnitas en las ecuaciones 11.3.4 y 11.3.5 son las descargas Q_i y la diferencia en carga hidráulica entre A y B; la descarga Q hacia el sistema se supone conocida. Es posible convertir los términos de las pérdidas menores usando una longitud equivalente como se definió en la sección 7.6.4. Por cada elemento i de tubería, la longitud equivalente L_e de ΣK componentes que provocan pérdidas menores es

$$(L_e)_i = \frac{D_i}{f_i} \Sigma K \tag{11.3.6}$$

Entonces la ecuación 11.3.5 se simplifica a la forma

$$\left(\frac{P}{\gamma} + z\right)_{\mathrm{A}} - \left(\frac{P}{\gamma} + z\right)_{\mathrm{B}} = \overline{R}_i Q_i^2 \tag{11.3.7}$$

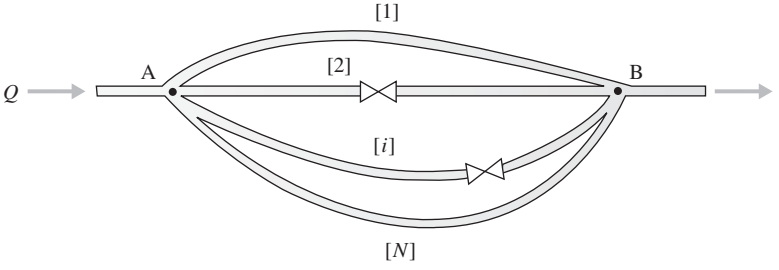


Fig. 11.4 Sistema de tuberías en paralelo.

en la que el coeficiente de resistencia modificado de cada tubería $\overline{R}_i$ está dado por

$$\overline{R}_i = \frac{8f_i[L_i + (L_e)_i]}{g\pi^2 D_i^5} \tag{11.3.8}$$

Observe que el lado derecho de la ecuación 11.3.8 es equivalente al término $R_i + \Sigma K/(2gA_i^2)$, donde la ecuación 11.2.2 expresa R_i.

Una solución empleando el método de sustitución sucesiva se desarrolla en la siguiente forma. Defina la variable W para que sea el cambio en la línea de referencia hidráulica entre A y B; esto es, $W = (p/\gamma + z)_A - (p/\gamma + z)_B$. Entonces de la ecuación 11.3.7 puede despejarse Q_i en términos de W como

$$Q_i = \sqrt{\frac{W}{\overline{R}_i}} \tag{11.3.9}$$

Las ecuaciones 11.3.4 y 11.3.9 se combinan para eliminar las descargas desconocidas Q_i, resultando en

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{W}{\overline{R}_i}} = \sqrt{W} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\overline{R}_i}} \tag{11.3.10}$$

La incógnita restante W se saca del signo de sumatoria ya que es igual en todos los tubos. Despejando W de la ecuación 11.3.10 resulta en

$$W = \left(\frac{Q}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\overline{R}_i}}} \right)^2 \tag{11.3.11}$$

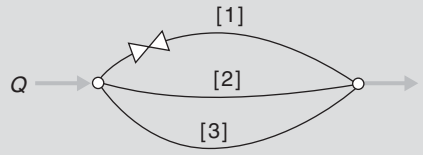
Un procedimiento iterativo puede formularse para calcular W y las descargas Q_i como sigue:

1. Suponga que los flujos de cada línea están en la zona completamente agitada, y calcule un estimado inicial de los factores de fricción en cada línea usando la ecuación 11.2.6.
2. Calcule $\overline{R}_i$ para cada tubo y evalúe W con la ecuación 11.3.11.
3. Calcule Q_i en cada tubo con la ecuación 11.3.9.
4. Actualice los estimados de los factores de fricción en cada línea usando los valores actuales de Q_i y la ecuación 11.2.3.
5. Repita los pasos 2 a 4 hasta que las incógnitas W y Q_i no varíen dentro de una tolerancia deseada.

Observe que si los factores de fricción se encuentran en la zona completamente agitada, de manera que son independientes de la descarga y por tanto son constantes, los pasos 4 y 5 son innecesarios y resulta una solución en la primera iteración. La técnica se ilustra en el ejemplo 11.3.

Ejemplo 11.3

Encuentre la distribución del flujo y la caída en la línea de referencia hidráulica para la configuración de tres tuberías en paralelo que se muestra en la figura E11.3. Use factores de fricción variables con $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. La descarga total de agua es $Q = 0.020$ m^3/s.



Tubo	L(m)	D (m)	e (mm)	ΣK
1	100	0.05	0.1	10
2	150	0.075	0.2	3
3	200	0.085	0.1	2

Fig. E11.3

Solución

Los estimados iniciales de f están basados en la ecuación 11.2.6. Los cálculos preliminares dan lo siguiente:

Tubo	*e/D*	f *(Eq. 11.2.6)*	L_e *(Eq. 11.3.6)*	$\overline{R}$ *(Eq. 11.3.8)*
1	0.002	0.023	21.7	7.40×10^5
2	0.0027	0.025	9.0	1.38×10^5
3	0.0012	0.021	8.1	8.14×10^4

Aplique la ecuación 11.3.11, y el primer estimado de W es

$$W = \left[\frac{0.020}{(7.40 \times 10^5)^{-1/2} + (1.38 \times 10^5)^{-1/2} + (8.14 \times 10^4)^{-1/2}} \right]^2$$
$$= 7.39 \text{ m}$$

Entonces con la ecuación 11.3.9, los estimados de Q_i son:

$$Q_1 = \left(\frac{7.39}{7.40 \times 10^5} \right)^{1/2} = 0.00316 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_2 = \left(\frac{7.39}{1.38 \times 10^5} \right)^{1/2} = 0.00732 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_3 = \left(\frac{7.39}{8.14 \times 10^4} \right)^{1/2} = 0.00953 \text{ m}^3/\text{s}$$

Se hace una revisión de continuidad usando la ecuación 11.3.4:

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i = 0.00316 + 0.00732 + 0.00953 = 0.0200 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aun cuando la suma satisface la solución, se realiza otra iteración para estudiar la convergencia de la técnica de solución. Primero, los valores $\overline{R}$ se actualizan usando la ecuación 11.2.3 para evaluar los factores de fricción.

(*continúa*)

Tubo	$\text{Re} = \dfrac{4Q}{\pi D\nu}$	f (Ec. 11.2.3)	$\overline{R}$ (Ec. 11.3.8)
1	8.05×10^4	0.026	8.20×10^5
2	1.24×10^5	0.027	1.49×10^5
3	1.43×10^5	0.022	8.51×10^4

La evaluación de W usando la ecuación 11.3.11 da $W = 7.88$ m, y la aplicación de la ecuación 11.3.9 da los nuevos estimados de Q_i:

$$Q_1 = 0.00310 \text{ m}^3/\text{s} \qquad Q_2 = 0.00727 \text{ m}^3/\text{s} \qquad Q_3 = 0.00962 \text{ m}^3/\text{s}$$

Una verificación de continuidad muestra que

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i = 0.0200 \text{ m}^3/\text{s}$$

lo cual es lo mismo que en la primera iteración.

Una solución del ejemplo 11.3 usando Mathcad se ilustra en el apéndice F, figura F1.

11.3.3 Tuberías ramales

La red ramal, ilustrada en la figura 11.5a, está formada por tres elementos conectados en una sola unión. En contraste con el sistema en paralelo que se muestra en la figura 11.4, no existen bucles cerrados. En el análisis, uno supone la dirección del flujo en cada elemento; entonces la ecuación de energía para cada elemento se escribe usando una longitud equivalente para considerar las pérdidas menores:

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\text{A}} - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\text{B}} = \overline{R}_1 Q_1^2 \tag{11.3.12}$$

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\text{B}} - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\text{C}} = \overline{R}_2 Q_2^2 \tag{11.3.13}$$

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\text{B}} - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\text{D}} = \overline{R}_3 Q_3^2 \tag{11.3.14}$$

Las cargas hidráulicas en las ubicaciones A, C y D se consideran conocidas. Las incógnitas son la carga hidráulica en B y las descargas Q_1, Q_2 y Q_3. La relación adicional es el equilibrio de continuidad en la ubicación B, que es

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \tag{11.3.15}$$

Entonces hay cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Un método específico y conveniente de solución se resume a continuación y se ilustra en el ejemplo 11.4:

1. Suponga una descarga Q_1 en el elemento 1 (con o sin una bomba). Establezca la carga hidráulica H en la unión al resolver la ecuación 11.3.12 (un problema de categoría 1).

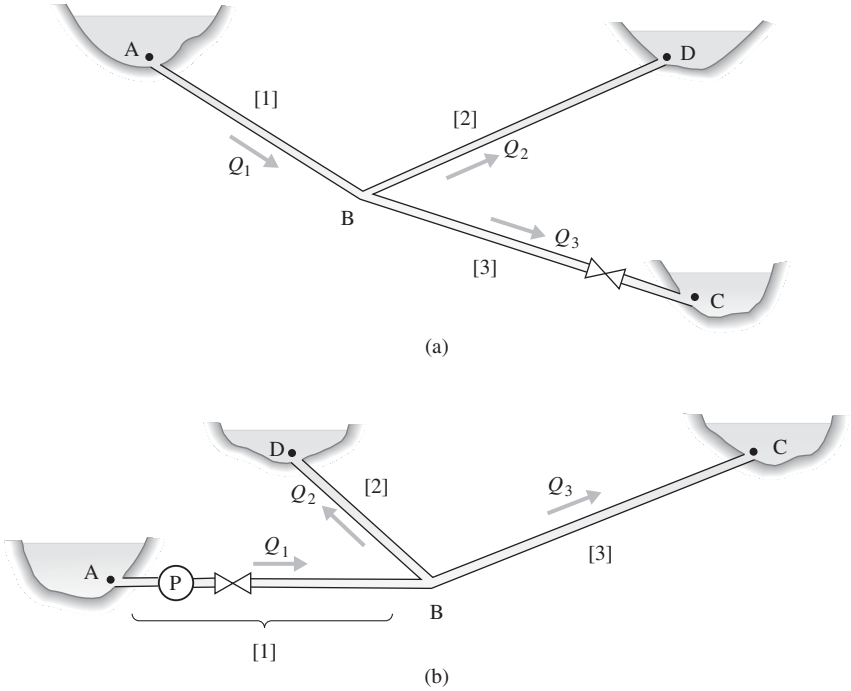


Fig. 11.5 Sistemas de tuberías ramales: (a) flujo por gravedad; (b) flujo propulsado por bomba.

2. Calcule la descarga Q_i en las ramas restantes usando las ecuaciones 11.3.13 y 11.3.14 (problema de categoría 2).
3. Sustituya las Q_i en la ecuación 11.3.15 para verificar el equilibrio de continuidad. Generalmente, el desequilibrio del flujo en la unión ΔQ será diferente de cero. En la ecuación 11.3.15, $\Delta Q = Q_1 - Q_2 - Q_3$.
4. Ajuste el flujo Q_1 en el elemento 1 y repita los pasos 2 y 3 hasta que ΔQ se encuentre dentro de los límites deseados.

Si existe una bomba en la tubería 1 (vea la figura 11.5b), la ecuación 11.3.12 se altera en la siguiente forma

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\mathrm{A}} - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{\mathrm{B}} + H_P = \overline{R}_1 Q_1^2 \tag{11.3.16}$$

Se introduce una incógnita adicional, es decir, la carga de la bomba H_P. La relación adicional necesaria es la curva carga-descarga para la bomba; vea, por ejemplo, la figura 7.18. La solución puede proseguir en una forma semejante a la descrita en el ejemplo 11.5. Puede ser conveniente seguir la solución gráficamente si se grafica la supuesta descarga en la línea 1 contra ya sea la carga hidráulica en B o el desequilibrio del flujo en B. Dicho paso es útil para determinar en qué forma la descarga en la línea 1 debe ser alterada para la siguiente iteración.

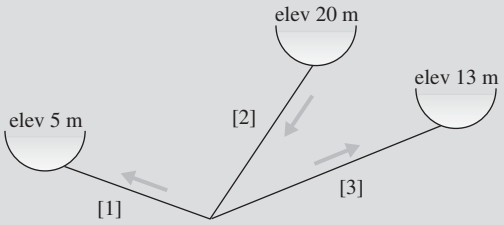
Un método alternativo de solución para un solo sistema ramal es eliminar todas las variables excepto la carga hidráulica $H = (p/\gamma + z)$ en la unión, ubicación B en la figura 11.5. A continuación puede utilizarse una técnica de solución numérica. Un requisito adicional es suponer la dirección del flujo en cada tubería. Puede ser ne-

cesario corregir el signo en una o más de las ecuaciones si durante la solución, H se mueve de debajo de una de las elevaciones del depósito a arriba de éste, o viceversa. El ejemplo 11.4 ilustra el procedimiento.

Los ejemplos 11.4 y 11.5 representan un nivel de complejidad que uno no quisiera sobrepasar si se emplea una solución basada en una calculadora. Para incluir bombas adicionales, los depósitos o tubos harían demasiado engorrosos los métodos específicos o los numéricos simplificados. Para tales sistemas, se recomienda el análisis de redes más generalizado que se describe en la sección 11.4.

Ejemplo 11.4

Para el sistema de tuberías de tres ramales que se ilustra en la figura E11.4 tenemos los datos siguientes:



Tubo	L(m)	D (m)	f	ΣK
1	500	0.10	0.025	3
2	750	0.15	0.020	2
3	1000	0.13	0.018	7

Fig. E11.4

Determine los gastos Q_i y la carga hidráulica H en la unión. Suponga factores de fricción constantes.

Solución

Las longitudes y los coeficientes de resistencia equivalentes son

$$(L_e)_1 = \frac{0.10}{0.025} \times 3 = 12 \text{ m} \qquad \overline{R}_1 = \frac{8 \times 0.025 \times 512}{9.81 \times \pi^2 \times (0.10)^5} = 1.06 \times 10^5 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$(L_e)_2 = \frac{0.15}{0.020} \times 2 = 15 \text{ m} \qquad \overline{R}_2 = \frac{8 \times 0.020 \times 765}{9.81 \times \pi^2 \times (0.15)^5} = 1.66 \times 10^4 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$(L_e)_3 = \frac{0.13}{0.018} \times 7 = 51 \text{ m} \qquad \overline{R}_3 = \frac{8 \times 0.018 \times 1051}{9.81 \times \pi^2 \times (0.13)^5} = 4.21 \times 10^4 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

Con las direcciones de flujo supuestas como se ilustra, se escribe la ecuación de energía para cada tubería y se despeja la descarga desconocida:

$$Q_1 = \left(\frac{H-5}{\overline{R}_1}\right)^{1/2} \qquad Q_2 = \left(\frac{20-H}{\overline{R}_2}\right)^{1/2} \qquad Q_3 = \left(\frac{H-13}{\overline{R}_3}\right)^{1/2}$$

La ecuación de continuidad es $-Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0$. Eliminando Q_1, Q_2 y Q_3 con las relaciones de energía en una ecuación algebraica en términos de H:

$$w(H) = -\left(\frac{H-5}{1.06 \times 10^5}\right)^{1/2} + \left(\frac{20-H}{1.66 \times 10^4}\right)^{1/2} - \left(\frac{H-13}{4.21 \times 10^4}\right)^{1/2} = 0$$

Aun cuando ésta puede resolverse como una ecuación cuadrática, se elige el método de la posición falsa para calcular H, que se requiriría si variaran los factores de fricción. El procedimiento se presenta en el ejemplo 10.11. En este ejemplo la fórmula de recurrencia es

$$H_r = \frac{H_l\, w(H_u) - H_u\, w(H_l)}{w(H_u) - w(H_l)}$$

La solución se muestra en la tabla siguiente. Observe que con las suposiciones iniciales de H_l y H_u, las convenciones de signos en ω requieren que $20 > H > 13$. La iteración continúa hasta que el criterio de convergencia que se muestra en la última columna sea menor que el valor arbitrario de 0.005.

Iteración	H_u	H_l	$w(H_u)$	$w(H_l)$	H_r	$w(H_r)$	*Signo de* $w(H_l) \times w(H_r)$	$\varepsilon = \left\lvert \frac{H_r^{\text{nuevo}} - H_r^{\text{anterior}}}{H_r^{\text{anterior}}} \right\rvert$
1	18	13	−0.01100	0.01185	15.59	−0.00154	+	
2	15.59	13	−0.00154	0.01185	15.29	−0.000384	+	0.019
3	15.29	13	−0.000384	0.01185	15.22	−0.000112	+	0.0046

Por lo tanto, $H \simeq 15.2$ m. Ahora se calculan las descargas:

$$Q_1 = \left(\frac{15.2 - 5}{1.06 \times 10^5}\right)^{1/2} = 0.0098 \text{ m}^3/\text{s}$$

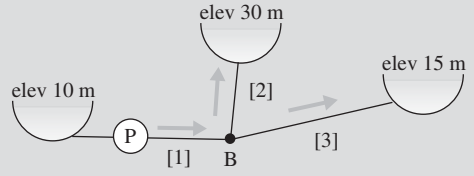
$$Q_2 = \left(\frac{20 - 15.2}{1.66 \times 10^4}\right)^{1/2} = 0.0170 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = \left(\frac{15.2 - 13}{4.21 \times 10^4}\right)^{1/2} = 0.0072 \text{ m}^3/\text{s}$$

Observe que se satisface la continuidad.

Ejemplo 11.5

Para el sistema que se muestra en la figura E11.5, determine la distribución del flujo Q_i de agua y la carga hidráulica H en la unión. La entrada de potencia suministrada al fluido por la bomba es constante, igual a $\gamma\, Q H_P = 20$ kW. Suponga factores de fricción constantes.



Tubo	L(m)	D (m)	f	ΣK
1	50	0.15	0.02	2
2	100	0.10	0.015	1
3	300	0.10	0.025	1

Fig. E11.5

Solución

Las longitudes y los coeficientes de resistencia equivalentes se calculan con las ecuaciones 11.3.6 y 11.3.8 como sigue

(*continúa*)

$$(L_e)_1 = \frac{0.15}{0.02} \times 2 = 15 \text{ m} \qquad \overline{R}_1 = \frac{8 \times 0.02 \times 65}{9.81 \times \pi^2 \times (0.15)^5} = 1.42 \times 10^3 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$(L_e)_2 = \frac{0.10}{0.015} \times 1 = 6.7 \text{ m} \qquad \overline{R}_2 = \frac{8 \times 0.015 \times 106.7}{9.81 \times \pi^2 \times (0.10)^5} = 1.32 \times 10^4 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$(L_e)_3 = \frac{0.10}{0.025} \times 1 = 4 \text{ m} \qquad \overline{R}_3 = \frac{8 \times 0.025 \times 304}{9.81 \times \pi^2 \times (0.10)^5} = 6.28 \times 10^4 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

Suponga las direcciones del flujo como se muestran. La ecuación de energía para la tubería 1 desde el depósito hasta la unión B es

$$z_1 + H_P = H + \overline{R}_1 Q_1^2$$

en la que H es la carga hidráulica en B. Sustituyendo los parámetros conocidos y despejando H resulta en

$$H = 10 + \frac{20 \times 10^3}{9800 Q_1} - 1.42 \times 10^3 Q_1^2$$

$$= 10 + \frac{2.04}{Q_1} - 1420 Q_1^2$$

En la tabla siguiente se muestra una solución iterativa. Para cada iteración, se estima un valor de Q_1. Entonces H se calcula y Q_2 y Q_3 se evalúan de las relaciones

$$Q_2 = \left(\frac{H - z_2}{\overline{R}_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{H - 30}{1.32 \times 10^4}\right)^{1/2}$$

$$Q_3 = \left(\frac{H - z_3}{\overline{R}_3}\right)^{1/2} = \left(\frac{H - 15}{6.28 \times 10^4}\right)^{1/2}$$

En la última columna de la tabla, se emplea un equilibrio de continuidad para verificar la precisión de la estimación de Q_1. La tercera estimación de Q_1 está basada en una interpolación lineal al hacer $\Sigma Q = 0$ y usar los valores de Q_1 y ΔQ de las dos primeras iteraciones.

Iteración	Q_1	H	Q_2	Q_3	$\Delta Q = Q_1 - Q_2 - Q_3$
1	0.050	47.25	0.0362	0.0227	−0.0089
2	0.055	42.80	0.0311	0.0210	+0.0029
3	0.054	43.64	0.0322	0.0214	+0.0004

La solución aproximada es H = 43.6 m, Q_1 = 54 L/s, Q_2 = 32 L/s y Q_3 = 21 L/s. Si se desea mayor precisión, debe emplearse una solución similar a la mostrada en el ejemplo 11.4.

Las soluciones para los ejemplos 11.4 y 11.5 usando Mathcad y MATLAB se dan en el apéndice F, figuras F2 a F5. En esas soluciones obsérvese que el término $\overline{R}Q^2$ se sustituye por $\overline{R}Q|Q|$, lo que automáticamente toma en cuenta los cambios en la dirección del flujo. Además de las soluciones con programas de cómputo en el apéndice F, las soluciones de redes de tuberías más generalizadas que se describen en la sección 11.4 pueden aplicarse a los problemas descritos en esta sección.

11.4 ANÁLISIS DE REDES DE TUBERÍAS

Los sistemas de tuberías más complicados que los considerados en la sección 11.3 se analizan mejor al formular la solución para una red. Antes de considerar un conjunto generalizado de ecuaciones para redes, merece la pena examinar un ejemplo específico de una red de tuberías para observar el grado de complejidad que interviene.

La figura 11.6a muestra una red relativamente simple formada por siete tubos, dos depósitos y una bomba. Las líneas de referencia hidráulica en A y F se suponen conocidas; estos lugares se denominan *nodos de nivel fijo.* Las demandas de descarga están presentes en los nodos C y D. Los nodos C y D, junto con los B y E reciben

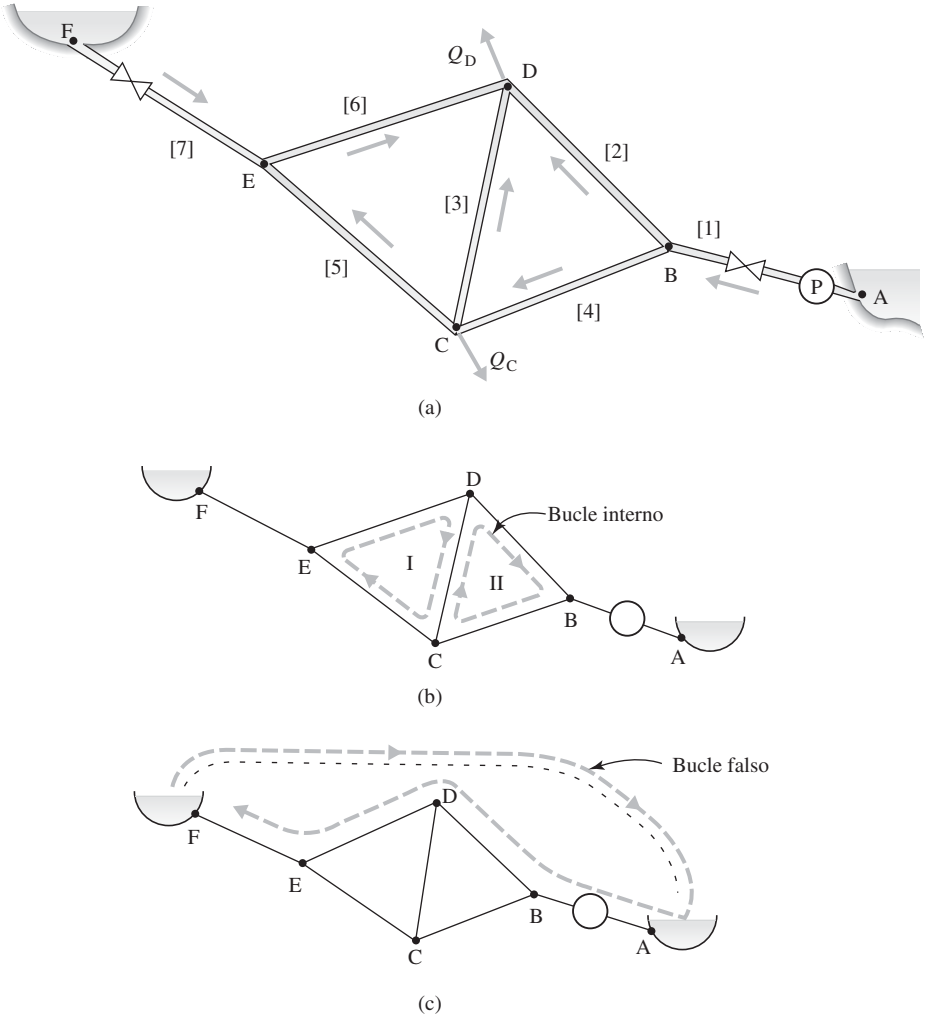


Fig. 11.6 Red de tubería representativa: (a) direcciones del flujo supuestas y esquema de numeración; (b) bucles internos designados; (c) trayectoria entre dos nodos de nivel fijo.

el nombre de *nodos internos* o *uniones*. Las direcciones del flujo, aun cuando no se conocen inicialmente, se suponen que son en las direcciones mostradas. Las ecuaciones del sistema se dan como sigue:

1. Equilibrio de energía para cada tubo (siete ecuaciones):

$$\begin{aligned} H_A - H_B + H_P(Q_1) &= \overline{R}_1 Q_1^2 & H_C - H_E &= \overline{R}_5 Q_5^2 \\ H_B - H_D &= \overline{R}_2 Q_2^2 & H_E - H_D &= \overline{R}_6 Q_6^2 \\ H_C - H_D &= \overline{R}_3 Q_3^2 & H_F - H_E &= \overline{R}_7 Q_7^2 \\ H_B - H_C &= \overline{R}_4 Q_4^2 \end{aligned} \tag{11.4.1}$$

2. Equilibrio de continuidad para cada nodo interno (cuatro ecuaciones):

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_2 - Q_4 &= 0 \\ Q_2 + Q_3 + Q_6 &= Q_D \\ Q_4 - Q_3 - Q_5 &= Q_C \\ Q_5 - Q_6 + Q_7 &= 0 \end{aligned} \tag{11.4.2}$$

3. Aproximación de la curva de bomba (una ecuación):

$$H_P(Q_1) = a_0 + a_1 Q_1 + a_2 Q_1^2 \tag{11.4.3}$$

en la que a_0, a_1 y a_2 son constantes conocidas.

Las incógnitas son $Q_1, \ldots, Q_7$, H_B, H_C, H_D, H_E y H_P. Entonces hay 12 incógnitas y 12 ecuaciones para resolver simultáneamente. Como las ecuaciones de energía y la ecuación para la bomba no son lineales, es necesario recurrir a algún tipo de solución numérica aproximada. Las 12 ecuaciones pueden reducirse en número si se combinan las ecuaciones de energía a lo largo de trayectorias especiales. Desígnese como W_i la caída de la línea de referencia hidráulica para cualquier elemento de tubería i. Entonces

$$W_i = \overline{R}_i Q_1^2 \tag{11.4.4}$$

Para el sistema en consideración, dos trayectorias cerradas, o *bucles internos*, pueden identificarse (vea la figura 11.6b). El flujo se considera positivo en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de cada bucle. Los equilibrios de energía, escritos alrededor de los bucles I y II, son

$$\begin{aligned} W_6 - W_3 + W_5 &= 0 \\ W_3 - W_2 + W_4 &= 0 \end{aligned} \tag{11.4.5}$$

Para incluir el flujo por las tuberías 1 y 7, puede definirse una trayectoria a lo largo de los nodos A, B, D, E y F en la figura 11.6c. Entonces con la adición de la carga de la bomba, el equilibrio de energía de A a F es

$$H_A + H_P - W_1 - W_2 + W_6 + W_7 = H_F \tag{11.4.6}$$

Observe que la ecuación de energía para la trayectoria conecta dos nodos de nivel fijo. Dicha trayectoria se conoce a veces como *bucle falso,* puesto que un tubo imaginario con resistencia infinita, o sin flujo, puede ser considerado como que conecta los dos depósitos. El tubo imaginario está ilustrado por una línea discontinua en la figura 11.6c. Sustituyendo la ecuación para la bomba y la ecuación de fricción en las relaciones de energía previas, resulta en el siguiente conjunto de ecuaciones reducido:

$$\begin{aligned}
-\overline{R}_3Q_3^2 + \overline{R}_5Q_5^2 + \overline{R}_6Q_6^2 &= 0\\
-\overline{R}_2Q_2^2 + \overline{R}_3Q_3^2 + \overline{R}_4Q_4^2 &= 0\\
-\overline{R}_1Q_1^2 + (a_0 + a_1Q_1 + a_2Q_1^2) - \overline{R}_2Q_2^2 + \overline{R}_6Q_6^2 + \overline{R}_7Q_7^2 + H_A - H_F &= 0\\
Q_1 - Q_2 - Q_4 &= 0\\
Q_2 + Q_3 + Q_6 &= Q_D\\
Q_4 - Q_3 - Q_5 &= Q_C\\
Q_5 - Q_6 + Q_7 &= 0
\end{aligned} \tag{11.4.7}$$

Hay ahora nueve incógnitas ($Q_1, \ldots, Q_7$) y siete ecuaciones a resolver. Las relaciones de energía son no lineales porque los términos de pérdida y la carga de la bomba están representados como polinomios respecto a las descargas.

11.4.1 Ecuaciones para redes generalizadas

Las redes de tuberías, como las mostradas en la figura 11.6, pueden estar representadas por las siguientes ecuaciones.

1. Continuidad en el nodo interno *j*-ésimo:

$$\Sigma(\pm)_j Q_j - Q_e = 0 \tag{11.4.8}$$

   en la que el subíndice *j* se refiere a las tuberías conectadas a un nodo, y Q_e es la demanda externa. La convención de signo algebraico más o menos está relacionada con la dirección del flujo supuesta: use el signo positivo para el flujo hacia la unión, y el signo negativo para el flujo que sale de la unión.

2. Equilibrio de energía alrededor de un bucle interno:

$$\Sigma(\pm)_i W_i = 0 \tag{11.4.9}$$

   en la que el subíndice *i* está relacionado con las tuberías que forman el bucle. Habrá una relación para cada uno de los bucles. Aquí se supone que no hay

bombas instaladas en el interior de la red. El signo más se usa si el flujo en el elemento es positivo en el sentido de las manecillas del reloj; de otro modo, se utiliza el signo menos.

3. Equilibrio de energía a lo largo de una trayectoria única o bucle falso que conecte dos nodos de nivel fijo:

$$\Sigma(\pm)_i[W_i - (H_P)_i] + \Delta H = 0 \tag{11.4.10}$$

donde ΔH es la diferencia en magnitud de los dos nodos de nivel fijo en la trayectoria ordenada en el sentido de las manecillas del reloj en toda la tubería imaginaria del bucle falso. El término $(H_p)_i$ es la carga hidráulica a través de una bomba que podría existir en el i-ésimo elemento de tubería. Si F es el número de nodos de nivel fijo, habrá $(F-1)$ ecuaciones de trayectoria única. Los signos más y menos de la ecuación 11.4.10 siguen el mismo argumento dado para la ecuación 11.4.9.

Sea P el número de elementos de tubería en la red, J el número de nodos internos y L el número de bucles internos. Entonces se cumplirá la siguiente relación si la red está apropiadamente definida:

$$P = J + L + F - 1 \tag{11.4.11}$$

En la figura 11.6 del ejemplo de introducción, $J = 4$, $L = 2$, $F = 2$, tal que $P = 4 + 2 + 2 - 1 = 7$.

Una formulación adicional necesaria es la relación entre la descarga y la pérdida en cada tubería; es

$$W = RQ^{\beta} + \frac{\Sigma K}{2gA^2}Q^2 \tag{11.4.12}$$

Si las pérdidas menores pueden definirse en términos de una longitud equivalente, la ecuación 11.4.12 puede ser sustituida por[2]

$$W = \overline{R}Q^{\beta} \tag{11.4.13}$$

Una representación aproximada de la carga de bomba-descarga está dada por el polinomio

$$H_P(Q) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 \tag{11.4.14}$$

[2]En la ecuación 11.4.13, se utiliza el exponente β, dado que en el análisis de redes de tuberías es frecuente que se utilice la fórmula de Hazen-Williams. La longitud equivalente en la formulación de Hazen-Williams está dada por

$$L_e = 0.8106\frac{\Sigma K}{K_1}D^{0.87}C^{1.85}Q^{0.15}$$

Observe que es necesario estimar la descarga cuando se utiliza esta ecuación. Se recomienda la ecuación de Darcy-Weisbach con $\beta = 2$. Una alternativa de utilizar el concepto de longitud equivalente es considerar la fricción en la tubería y las pérdidas menores por separado en cada línea, utilizando la ecuación 11.4.12.

Los coeficientes a_0, a_1 y a_2 se suponen conocidos; comúnmente, pueden hallarse sustituyendo tres puntos de datos conocidos de una curva de bomba especificada y resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones resultantes. En lugar de definir la curva de carga de bomba-descarga, un medio alternativo de incluir una bomba en una línea es especificar la potencia útil que la bomba suministra en el sistema. La potencia $\dot{W}_f$ útil, o real, se supone constante y permite que H_P sea representada en la forma

$$H_P(Q) = \frac{\dot{W}_f}{\gamma Q} \tag{11.4.15}$$

Esta ecuación es particularmente útil cuando se desconocen las características de operación específicas de una bomba.

11.4.2 Linearización de las ecuaciones de energía para un sistema

La ecuación 11.4.10 es una relación general que puede aplicarse a cualquier trayectoria o bucle cerrado en una red. Si se aplica a un bucle cerrado, ΔH se iguala a cero, y si no hay una bomba en la trayectoria o bucle, $(H_P)_i$ es igual a cero. Observe que la ecuación 11.4.9 puede considerarse que es un subconjunto de la ecuación 11.4.10. En el siguiente desarrollo puede usarse la ecuación 11.4.10 para representar cualquier bucle o trayectoria de la red.

Defina la función $\phi(Q)$ para que contenga los términos no lineales $W(Q)$ y $H_P(Q)$ en la forma

$$\begin{aligned}\phi(Q) &= W(Q) - H_P(Q)\\ &= \overline{R}Q^{\beta} - H_P(Q)\end{aligned} \tag{11.4.16}$$

La ecuación 11.4.16 puede expandirse en una serie de Taylor como

$$\phi(Q) = \phi(Q_0) + \left.\frac{d\phi}{dQ}\right|_{Q_0}(Q - Q_0) + \left.\frac{d^2\phi}{dQ^2}\right|_{Q_0}\frac{(Q - Q_0)^2}{2} + \cdots \tag{11.4.17}$$

en la que Q_0 es una estimación de Q. Para aproximar $\phi(Q)$ con precisión, Q_0 debe elegirse de modo que la diferencia $(Q - Q_0)$ sea numéricamente pequeña. Reteniendo los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación 11.4.17, y usando la ecuación 11.4.16, tendremos

$$\phi(Q) \simeq \overline{R}Q_0^{\beta} - H_P(Q_0) + \left[\beta\overline{R}Q_0^{\beta-1} - \left.\frac{dH_P}{dQ}\right|_{Q_0}\right](Q - Q_0) \tag{11.4.18}$$

Observe que la aproximación de $\phi(Q)$ ahora es lineal respecto a Q.

El parámetro G se introduce como

$$G = \beta\overline{R}Q_0^{\beta-1} - \left.\frac{dH_P}{dQ}\right|_{Q_0} \tag{11.4.19}$$

Usando la ecuación 11.4.14 para representar la carga de una bomba, la ecuación 11.4.19 se convierte en

$$G = \beta \overline{R} Q_0^{\beta-1} - (a_1 + 2a_2 Q_0) \tag{11.4.20}$$

Alternativamente, con la ecuación 11.4.15 sustituida en la ecuación 11.4.19, tenemos

$$G = \beta \overline{R} Q_0^{\beta-1} + \frac{\dot{W}_f}{\gamma Q_0^2} \tag{11.4.21}$$

Sustituyendo la ecuación 11.4.19 en la ecuación 11.4.18 da

CONCEPTO CLAVE *Los sistemas de tuberías complejos requieren técnicas especiales para calcular descargas y cargas hidráulicas. Una de ellas es el método de solución de Hardy Cross.*

$$\begin{aligned} \phi(Q) &= \overline{R} Q_0^{\beta} - H_P(Q_0) + (Q - Q_0)G \\ &= W_0 - H_{P0} + (Q - Q_0)G \end{aligned} \tag{11.4.22}$$

en la que $W_0 = W(Q_0)$ y $H_{P0} = H_P(Q_0)$. Por último, la ecuación 11.4.22 se sustituye en la ecuación 11.4.10 para producir el bucle linearizado o la ecuación de energía a lo largo de una trayectoria

$$\Sigma(\pm)_i[(W_0)_i - (H_{P0})_i] + \Sigma[Q_i - (Q_0)_i]G_i + \Delta H = 0 \tag{11.4.23}$$

El segundo término no contiene el signo más o menos porque G_i es una función monotónicamente creciente de la corrección del flujo. Como Q en las relaciones previas puede tomar valores positivos o negativos, es frecuente que Q_0^{β} y $Q_0^{\beta-1}$ sean sustituidas por $Q_0|Q_0|^{\beta-1}$ y $|Q_0|^{\beta-1}$, respectivamente, en algoritmos de solución. Esto se hace, por ejemplo, en la ecuación 11.4.23, que forma la base para la solución de Hardy Cross que se describe a continuación.

11.4.3 Método de Hardy Cross

En la ecuación 11.4.23, sean $(Q_0)_i$ las estimaciones de descarga de la iteración previa, y sean Q_i las nuevas estimaciones de la descarga. Defina un ajuste del flujo ΔQ para cada bucle como

$$\Delta Q = Q_i - (Q_0)_i \tag{11.4.24}$$

El ajuste se aplica independientemente a todos las tuberías en un bucle determinado. En consecuencia, la ecuación 11.4.23 puede escribirse como

$$\Sigma(\pm)_i[(W_0)_i - (H_{P0})_i] + \Delta Q \Sigma G_i + \Delta H = 0 \tag{11.4.25}$$

Al despejar ΔQ tendremos

$$\Delta Q = \frac{-\Sigma(\pm)_i[(W_0)_i - (H_{P0})_i] - \Delta H}{\Sigma G_i} \tag{11.4.26}$$

Es necesario que el signo algebraico de Q sea positivo en la dirección de operación normal de una bomba; de otro modo, la curva de la bomba no estará representada correctamente y la ecuación 11.4.26 será inválida. Además, es importante que la

descarga Q a través de la bomba permanezca dentro de los límites de los datos empleados para generar la curva.

Para un bucle cerrado en el que no haya bombas o nodos de nivel fijo, la ecuación 11.4.26 se reduce simplemente a la forma

$$\Delta Q = \frac{-\Sigma(\pm)_i(W_0)_i}{\Sigma\, G_i} \tag{11.4.27}$$

La solución iterativa de Hardy Cross se resume en los pasos siguientes:

1. Suponga una estimación inicial de la distribución del flujo en la red que satisfaga la continuidad, ecuación 11.4.8. Cuanto más cercanas sean las estimaciones iniciales a los valores correctos, menos serán las iteraciones requeridas para tener una convergencia. Una directriz a seguir es que en un elemento de tubería, cuando $\overline{R}$ aumenta, Q disminuye.
2. Para cada bucle o trayectoria, evalúe ΔQ con la ecuación 11.4.26 o la 11.4.27. Los numeradores deben aproximarse a cero cuando se equilibren los bucles o trayectorias.
3. Actualice los flujos en cada tubería en todos los bucles y trayectorias, es decir, de la ecuación 11.4.24.

$$Q_i = (Q_0)_i + \Sigma\Delta Q \tag{11.4.28}$$

   Se utiliza el término $\Sigma\Delta Q$, ya que una tubería determinada puede pertenecer a más de un bucle; por tanto, la corrección será la suma de correcciones de todos los bucles a los que la tubería sea común.
4. Repita los pasos 2 y 3 hasta alcanzar una precisión deseada. Un posible criterio a usar es

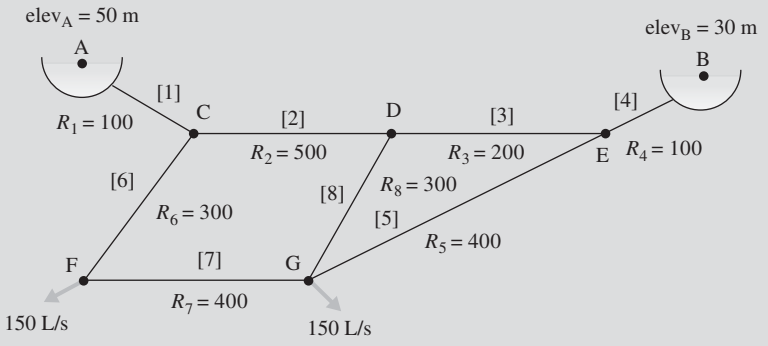
$$\frac{\Sigma|Q_i - (Q_0)_i|}{\Sigma|Q_i|} \leq \varepsilon \tag{11.4.29}$$

   en la que ε es un número arbitrariamente pequeño. Por lo general, $0.001 < \varepsilon < 0.005$.

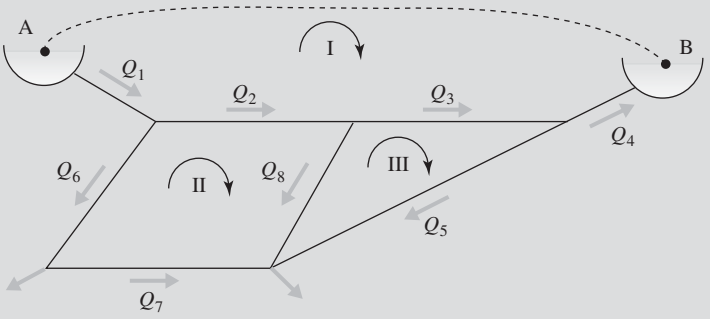
El método de análisis de Hardy Cross es una versión simplificada del método de aproximaciones sucesivas aplicado a un conjunto de ecuaciones linearizadas. No requiere la inversión de una matriz, por lo cual puede usarse para resolver redes relativamente pequeñas usando ya sea una calculadora o un algoritmo de hoja de cálculo en una computadora personal. Las relaciones de continuidad, ecuaciones 11.4.8, están en cierto sentido "desacopladas" de la solución de las relaciones de energía, ecuación 11.4.26. La continuidad se satisface inicialmente con flujos supuestos y permanece satisfecha en todo el proceso de solución. En esencia, se calcula por separado una corrección ΔQ para los flujos Q_i en cada bucle cerrado y, a continuación se aplica ΔQ a toda la red para llevar el flujo a través de los bucles a un equilibrio más cerrado. En efecto, éste es un tipo de solución por superposición. Como las correcciones de flujo ΔQ se aplican independientemente a cada bucle cerrado, la convergencia puede no ser rápida.

Ejemplo 11.6

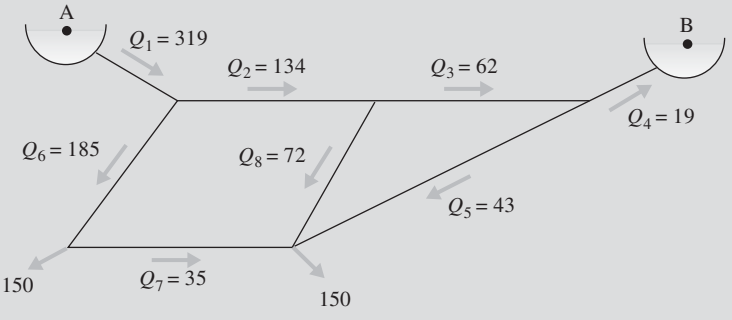
Para el sistema de tuberías que se muestra en la figura E11.6a, determine la distribución del flujo y las cargas hidráulicas en las uniones usando el método de solución de Hardy Cross. Suponga que las pérdidas son proporcionales a Q^2.



(a)



(b)



(c)

Fig. E11.6

Solución

Hay cinco uniones ($J = 5$), ocho tubos ($P = 8$) y dos nodos de nivel fijo ($F = 2$). Por tanto, el número de bucles cerrados es $L = 8 - 5 - 2 + 1 = 2$, más un bucle falso. Los tres bucles y las direcciones del flujo supuestas se muestran en la figura E11.6b. La ecuación 11.4.26 se aplica al bucle I:

$$\Delta Q_{\mathrm{I}} = \frac{-(\pm W_4 \pm W_3 \pm W_2 \pm W_1) - (z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})}{G_4 + G_3 + G_2 + G_1}$$

Aplique la ecuación 11.4.27 a los bucles II y III:

$$\Delta Q_{\mathrm{II}} = \frac{-(\pm W_2 \pm W_8 \pm W_7 \pm W_6)}{G_2 + G_8 + G_7 + G_6}$$

$$\Delta Q_{\mathrm{III}} = \frac{-(\pm W_3 \pm W_5 \pm W_8)}{G_3 + G_5 + G_8}$$

El problema se resuelve usando una hoja de cálculo Excel, y la solución se muestra en la tabla E11.6. El formato de la hoja de cálculo que muestra las ecuaciones que se usan en la solución se encuentra en el apéndice F, figura F.6. En las ecuaciones de los bucles observe que W y G tienen el signo correcto atribuido automáticamente usando las relaciones $\pm W = \overline{R}Q|Q|$ y $G = 2\overline{R}|Q|$. Además, los valores iniciales de cada Q toman un signo positivo o negativo dependiendo de la dirección del flujo supuesta respecto a la dirección positiva en el sentido de las manecillas de un reloj para cada bucle. Las estimaciones del flujo iniciales, mostradas bajo el encabezado "Iteración 1," se eligen para satisfacer la continuidad. Observe que los ajustes del flujo para cada elemento de tubería se hacen después que todas las ΔQ han sido calculadas; por ejemplo, respecto al bucle I, $Q_2 = (Q_0)_2 + \Delta Q_1 - \Delta Q_{\mathrm{II}}$. Después de cuatro iteraciones, la magnitud absoluta de las ΔQ son todas menores que 0.001, y el lado izquierdo de la ecuación 11.4.29 es 0.0051.

Los valores de Q_i después de cuatro iteraciones se muestran en la figura E11.6c, junto con las direcciones finales del flujo. Los gastos están en litros por segundo. Las cargas hidráulicas se evalúan al calcular la caída de energía a lo largo de trayectorias designadas, iniciando en un nodo de nivel fijo conocido, en este caso el nodo A:

$$H_{\mathrm{C}} = H_{\mathrm{A}} - R_1 Q_1^2 = 50 - 100(0.319)^2 = 39.8 \text{ m}$$

$$H_{\mathrm{D}} = H_{\mathrm{C}} - R_2 Q_2^2 = 39.8 - 500(0.134)^2 = 30.8 \text{ m}$$

$$H_{\mathrm{E}} = H_{\mathrm{D}} - R_3 Q_3^2 = 30.8 - 200(0.062)^2 = 30.0 \text{ m}$$

$$H_{\mathrm{F}} = H_{\mathrm{C}} - R_6 Q_6^2 = 39.8 - 300(0.185)^2 = 29.5 \text{ m}$$

$$H_{\mathrm{G}} = H_{\mathrm{D}} - R_8 Q_8^2 = 30.8 - 300(0.072)^2 = 29.2 \text{ m}$$

Observe que hay una pérdida insignificante en el elemento cuatro.

(*continúa*)

			Iteración 1			Iteración 2			Iteración 3			Iteración 4		
		R	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q
	ΔH			20.000			20.000			20.000			20.000			
	Tubería4	100	−0.020	−0.040	4.000	−0.022	−0.051	4.495	−0.019	−0.038	3.899	−0.020	−0.039	3.968	−0.019
Bucle 1	Tubería3	200	−0.060	−0.720	24.000	−0.064	−0.809	25.440	−0.062	−0.770	24.817	−0.063	−0.787	25.098	−0.062
	Tubería2	500	−0.130	−8.450	130.000	−0.137	−9.433	137.352	−0.133	−8.907	133.466	−0.135	−9.150	135.276	−0.134
	Tubería1	100	−0.320	−10.240	64.000	−0.322	−10.399	64.495	−0.319	−10.208	63.899	−0.320	−10.230	63.968	−0.319
				0.550	222.000		−0.691	231.783		0.078	226.081		−0.206	228.309	
				ΔQ = −2.48E-03			**ΔQ** = 2.98E-03			**ΔQ** = −3.44E-04			**ΔQ** = 9.03E-04	
	Tubería2	500	0.130	8.450	130.000	0.137	9.433	137.352	0.113	8.907	133.466	0.135	9.150	135.276	0.134
Bucle 2	Tubería8	300	0.070	1.470	42.000	0.074	1.632	44.251	0.071	1.530	42.853	0.073	1.578	43.519	0.072
	Tubería7	400	−0.040	−0.640	32.000	−0.035	−0.494	28.101	−0.036	−0.519	28.823	−0.035	−0.478	27.650	−0.035
	Tubería6	300	−0.190	−10.830	114.000	−0.185	−10.281	111.075	−0.186	−10.382	111.617	−0.185	−10.219	110.738	−0.185
				−1.550	318.000		0.290	320.779		−0.464	316.759		0.031	317.183	
				ΔQ = 4.87E-03			**ΔQ** = −9.03E-04			**ΔQ** = 1.47E-03			**ΔQ** = −9.83E-05	
	Tubería3	200	0.060	0.720	24.000	0.064	0.809	25.440	0.062	0.770	24.817	0.063	0.787	25.098	0.062
Bucle 3	Tubería5	400	0.040	0.640	32.000	0.041	0.676	32.898	0.043	0.724	34.039	0.043	0.736	34.325	0.043
	Tubería8	300	−0.070	−1.470	42.000	−0.074	−1.632	44.251	−0.071	−1.530	42.853	−0.073	−1.578	43.519	−0.072
				−0.110	98.000		−0.146	102.589		−0.036	101.710		−0.054	102.941	
				ΔQ = 1.12E-03			**ΔQ** = 1.43E-03			**ΔQ** = 3.57E-04			**ΔQ** = 52.29E-04	

Una solución con Mathcad para el ejemplo 11.6 se da en el apéndice F, figura F.7.

11.4.4 Análisis de redes con programas de computadora generalizados

Las hojas de cálculo y los programas computacionales como Mathcad o MATLAB pueden usarse para determinar la distribución del flujo en redes pequeñas, como se ilustra en el ejemplo 11.6. No obstante, para redes más grandes que contienen más de varios bucles, el trabajo de programación se hace engorroso, en especial porque se requiere de una descripción única para cada sistema, acompañada de un gran número de ecuaciones por resolver. Una ventaja de usar estos métodos de solución es que el usuario aplica relaciones fundamentales directamente y con facilidad puede percibir la convergencia de la solución. Por otra parte, los códigos de computadora generalizados cuentan con algoritmos de solución robustos que permiten analizar una amplia variedad de sistemas de redes, y proporcionan esquemas de entrada/salida fáciles de utilizar por el usuario. Se han convertido en una herramienta indispensable, para muchos ingenieros y practicantes en la industria del abastecimiento de agua, y han encontrado uso en otras aplicaciones industriales. Sin embargo, el usuario debe estar familiarizado con el código para asegurar que la solución sea la correcta.

Con el avance en el desarrollo de programas y el aumento de memoria en computadoras personales, así como de rapidez computacional, ahora es posible analizar con relativa facilidad grandes redes altamente complejas. Además del método de Hardy Cross resumido en la sección 11.4.3, se han utilizado otros métodos linearizados en códigos de computadoras. Aquí se describe brevemente el uso del programa EPANET desarrollado por la United States Environmental Protection Agency.

EPANET es un programa muy completo que simula el flujo hidráulico y la calidad del agua en redes de tuberías presurizadas. Para el análisis hidráulico, utiliza un algoritmo híbrido de nodo-bucle denominado *método de gradiente* para determinar las cargas y descargas hidráulicas desconocidas. La red puede contener tubos, uniones de tubos, bombas y diversos tipos de válvulas, depósitos y tanques de almacenamiento de agua. La pérdida de carga por fricción se calcula usando las fórmulas de Darcy-Weisbach, de Hazen-Williams o la de Chezy-Manning. Pueden utilizarse datos de la curva de la bomba o de la potencia útil. Otras funciones del programa, una descripción completa, y detalles de ejecución del código se dan en el Manual del usuario de EPANET (Rossman, 2000). El código fuente y el manual del usuario están disponibles en el sitio Web de la EPA *www.epa.gov*.

Ejemplo 11.7

Resuelva otra vez el ejemplo 11.6 usando EPANET.

Solución

El mapa de la red definido por el usuario se muestra en la figura E11.7, y una lista parcial de los resultados calculados se dan en la tabla E11.7. Para ver los detalles de la codificación consulte el Manual del usuario de EPANET.

(*continúa*)

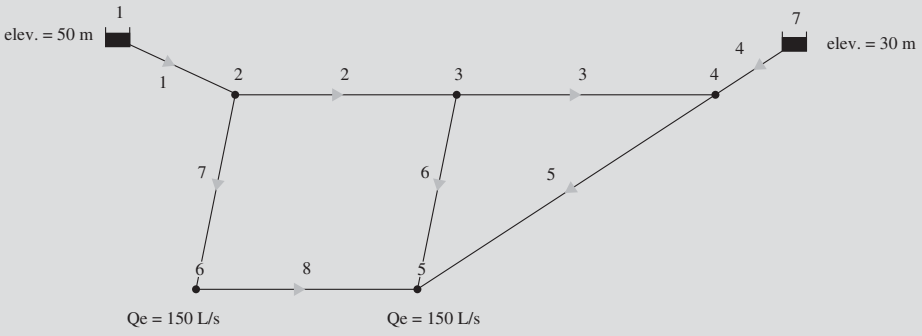


Fig. E11.7

Tabla E11.7

Tabla Enlace - Nodo:

Identificación del enlace	Nodo inicial	Nodo final	Longitud m	Diámetro mm
1	1	2	66	250
2	2	3	330	250
3	3	4	130	250
4	4	7	66	250
5	4	5	260	250
6	3	5	200	250
7	2	6	200	250
8	6	5	260	250

Resultados de nodos:

Identificación del nodo	Demanda LPS	Carga hidráulica m	Presión m	Calidad	
2	0.00	40.45	40.45	0.00	
3	0.00	30.96	30.96	0.00	
4	0.00	30.05	30.05	0.00	
5	150.00	29.16	29.16	0.00	
6	150.00	29.82	29.82	0.00	
1	−319.72	50.00	0.00	0.00	Depósito
7	19.72	30.00	0.00	0.00	Depósito

Resultados de enlaces:

Identificación del enlace	LPS Flujo	Velocidad m/s	Pérdida de carga m/km	Estado
1	319.72	6.52	144.71	Abierto
2	133.59	2.72	28.75	Abierto
3	62.19	1.27	6.98	Abierto
4	19.72	0.40	0.83	Abierto
5	42.47	0.87	3.44	Abierto
6	71.40	1.46	9.01	Abierto
7	186.12	3.79	53.13	Abierto
8	36.12	0.74	2.55	Abierto

Además del ejemplo 11.7, las soluciones para las dos redes que se muestran en la figura 11.7 se encuentran en el apéndice F, figuras F.8 y F.9. Para el sistema ramal o en forma de árbol ilustrado en la figura 11.7a, se usa la fórmula de fricción de Hazen-Williams con el coeficiente $C = 130$. La potencia de entrada útil de la bomba

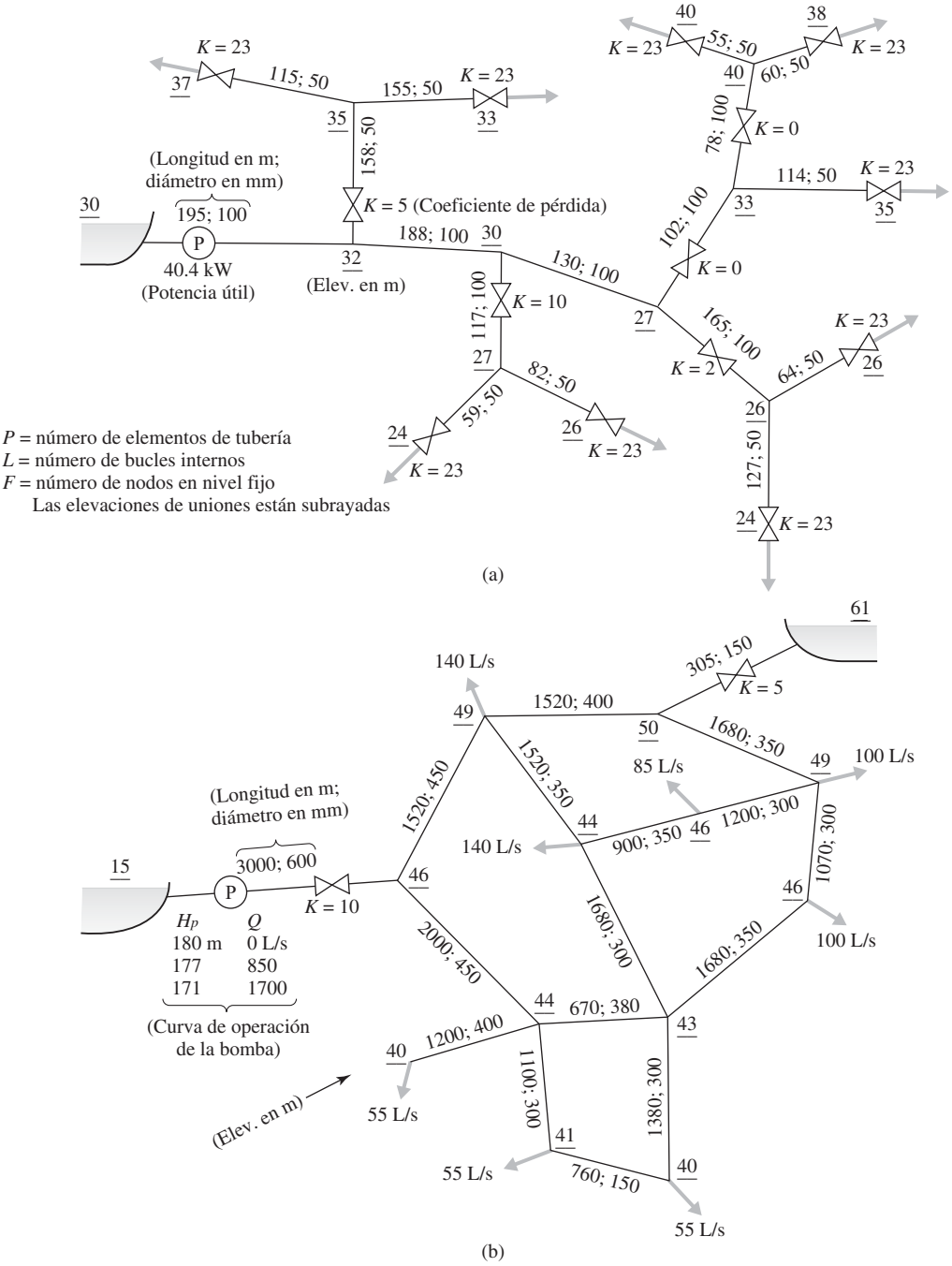


Fig. 11.7 Dos redes de tuberías: (a) sistema de suministro de agua en forma de árbol: $P = 17$, $L = 0$, $J = 8$, $F = 10$; (b) Sistema de distribución de agua: $P = 17$, $L = 4$, $J = 12$, $F = 2$. (Wood, D. J. Algorithms for Pipe Network Analysis and Their Reliability, Research Report 127, Water Resources Research Institute, University of Kentucky, Lexington, KY., 1981)

es 40.4 kW. Para la red de bucles que se muestra en la figura 11.7b, las pérdidas por fricción están basadas en la relación de Darcy-Weisbach con una rugosidad absoluta de 0.15 mm para todos los tubos y una viscosidad cinemática de 10^{-6} m^2/s. La curva de operación de la bomba está definida por tres valores de carga hidráulica y descarga de la bomba.

11.5 FLUJO NO PERMANENTE EN TUBERÍAS

CONCEPTO CLAVE *Para que haya flujo no permanente en una tubería, se requiere de una excitación en el sistema (por ejemplo, el cierre repentino de una válvula).*

Tradicionalmente, los flujos no permanentes o transitorios, en tuberías, han estado asociados con tuberías de plantas de energía hidroeléctrica y con sistemas largos de suministro de agua y oleoductos que transportan petróleo. No obstante, la aplicación se ha ampliado en años recientes para incluir la operación de sistemas de control hidráulico, los eventos que tienen lugar en redes de tuberías de plantas generadoras de energía eléctrica, la interacción estructura-fluido en tuberías llenas de líquido, así como el flujo de sangre pulsátil. Para que ocurra el estado no permanente, es necesario algún tipo de excitación en el sistema. Las excitaciones representativas son la apertura o cierre de una válvula, operaciones de bombas o turbinas, fracturas o grietas o rupturas de tubos, así como eventos de cavitación. En esta sección examinamos sólo los aspectos fundamentales del flujo no permanente en tuberías. En primer término estudiamos un flujo no permanente en un solo tubo de diámetro constante suponiendo que haya condiciones inelásticas e incompresibles; esto es seguido por un análisis de un sistema en el que la elasticidad y la compresibilidad desempeñan una importante función en la respuesta de la presión y la velocidad a una excitación. La primera suposición resulta en el fenómeno llamado *pulsación,* en tanto que la segunda conduce al fenómeno denominado *ariete hidráulico*.

11.5.1 Flujo incompresible en un tubo inelástico

Considere un solo tubo horizontal de longitud L y diámetro D (figura 11.8). El extremo corriente arriba del tubo está conectado a un depósito y una válvula está situada en el extremo corriente abajo. La carga hidráulica corriente arriba es H_1, y corriente abajo de la válvula la carga hidráulica es H_3. Observe que H_1 y H_3 son elevaciones constantes del depósito, independientes del tiempo. Se supone que el factor de fricción f es constante, y que el coeficiente de pérdida para la válvula es K. Existen varias excitaciones posibles que podrían ser consideradas, pero sólo analizaremos la situación donde inicialmente existe una velocidad permanente V_0, luego la válvula se abre instantáneamente a una nueva posición y, posteriormente

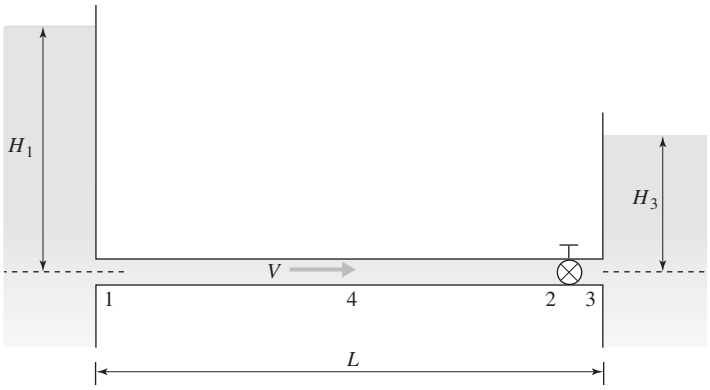


Fig. 11.8 Tubo horizontal con una válvula en el extremo corriente abajo.

CONCEPTO CLAVE *La velocidad no varía con la posición, sólo con el tiempo.*

el flujo acelera, aumentando a una nueva velocidad V_{ss} en estado permanente. Para situaciones en las que se cierre la válvula, ya sea parcial o completamente, se debe considerar la posibilidad de que se presente un ariete hidráulico; esto se trata en la siguiente sección. Aquí, suponemos que la velocidad no varía con la posición, sólo con el tiempo.

En la figura 11.8 se define un volumen de control para el líquido en el tubo entre las ubicaciones 1 y 2, cuya masa es ρAL. Observe que la ubicación 2 está corriente arriba de la válvula. En los dos extremos del volumen de control las presiones son p_1 y p_2, respectivamente, y en la superficie el esfuerzo cortante en la pared es τ_0. La conservación de la cantidad de movimiento para ese volumen de líquido está dada por

$$A(p_1 - p_2) - \tau_0 \pi D L = \rho A L \frac{dV}{dt} \tag{11.5.1}$$

Sin consecuencias serias podemos suponer condiciones de flujo permanente a través de la válvula de la ubicación 2 a la 3, y utilizamos la ecuación de la energía para obtener

$$p_2 = p_3 + K \frac{\rho V^2}{2} \tag{11.5.2}$$

Es razonable suponer que el factor de fricción de Darcy-Weisbach basado en flujo en estado permanente puede utilizarse sin incurrir en un error excesivo. Entonces, de la sección 7.3.3, ecuación 7.3.19, tenemos la relación

$$\tau_0 = \frac{\rho f V^2}{8} \tag{11.5.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones 11.5.2 y 11.5.3 en la ecuación 11.5.1, dividiendo entre la masa de la columna de líquido, y reconociendo que $p_1 - p_3 = \rho g(H_1 - H_3)$, puesto que se supone que son insignificantes las cargas de velocidad, resulta

$$\frac{dV}{dt} + \left(\frac{f}{D} + \frac{K}{L}\right)\frac{V^2}{2} - g\frac{H_1 - H_3}{L} = 0 \tag{11.5.4}$$

La ecuación 11.5.4 es la relación que representa el flujo incompresible no permanente en el tubo. La condición inicial en $t = 0$ es una velocidad dada $V = V_0$. Cuando se alcanza la condición final de estado permanente, $dV/dt = 0$, y esa velocidad de estado permanente, designada como V_{ss}, puede obtenerse al igualar a cero la derivada de la ecuación 11.5.4:

$$V_{ss} = \sqrt{\frac{2g(H_1 - H_3)}{fL/D + K}} \tag{11.5.5}$$

Sustituyendo la ecuación 11.5.5 en la ecuación 11.5.4, separando variables y expresando el resultado en forma de integral, tenemos

$$\int_0^t dt = \frac{V_{ss}^2 L}{g(H_1 - H_3)} \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V_{ss}^2 - V^2} \tag{11.5.6}$$

Una vez integrada, la relación resultante define la velocidad V respecto al tiempo t después de la excitación producida por la válvula:

$$t = \frac{V_{ss}L}{2g(H_1 - H_3)} \ln \frac{(V_{ss} + V)(V_{ss} - V_0)}{(V_{ss} - V)(V_{ss} + V_0)} \tag{11.5.7}$$

Existen algunas características significativas de la solución. Primero, si estudiamos la ecuación 11.5.7 concluimos que se requiere de un tiempo infinito para alcanzar la velocidad de estado permanente V_{ss}. En realidad, V_{ss} se alcanzará más pronto, porque las pérdidas no han sido tomadas en cuenta por completo. No obstante, es posible determinar el tiempo cuando se haya alcanzado un porcentaje de V_{ss}, digamos 99%, que sería adecuado para fines de ingeniería. Además, es posible que el fluido se encuentre inicialmente en reposo, es decir, $V_0 = 0$. Por último, recuerde que la solución está basada en las suposiciones de que se ignoran la compresibilidad del líquido y la elasticidad de la tubería; la siguiente sección aborda la situación cuando son inválidas esas suposiciones.

Ejemplo 11.10

Un tubo horizontal de 1000 m de longitud, con diámetro de 500 mm, y una velocidad de estado permanente de 0.5 m/s, se somete repentinamente a un nuevo diferencial de carga hidráulica de 20 m cuando la válvula corriente abajo se abre de pronto y cambia su coeficiente a $K = 0.2$. Suponiendo un factor de fricción de $f = 0.02$, determine la velocidad final de estado permanente, y el tiempo cuando la velocidad real sea 75% del valor final.

Solución

Los valores dados son $L = 1000$ m, $D = 0.5$ m, $V_0 = 0.5$ m/s, $f = 0.02$ y $K = 0.2$. Haciendo $H_1 - H_3 = 20$ m, la velocidad de estado permanente final V_{ss} se encuentra por sustitución directa en la ecuación 11.5.5:

$$V_{ss} = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 20}{0.02 \times 1000/0.5 + 0.2}} = 3.12 \text{ m/s}$$

La velocidad que es el 75% de V_{ss} es $V = 0.75 \times 3.12 = 2.34$ m/s. Entonces, usando la ecuación 11.5.7, el tiempo correspondiente a esa velocidad es

$$t = \frac{3.12 \times 1000}{2 \times 9.81 \times 20} \ln \frac{(3.12 + 2.34) \times (3.12 - 0.5)}{(3.12 - 2.34) \times (3.12 + 0.5)} = 12.9 \text{ s}$$

En consecuencia, la velocidad de estado permanente final es 3.12 m/s, y el tiempo cuando se alcanza el 75% de esa velocidad es aproximadamente 13 s.

11.5.2 Flujo compresible en un tubo elástico

En contraste con los desarrollos de la sección 11.5.1, existen situaciones donde el líquido no es incompresible y la tubería no es rígida. En lugar de ello, la iteración entre los cambios en la cantidad de movimiento y las fuerzas aplicadas hacen que el líquido se comprima ligeramente y que el material del tubo experimente defor-

maciones muy pequeñas. Cuando esto ocurre, tienen lugar cambios importantes en la presión, y el fenómeno recibe el nombre de ariete hidráulico. Un ariete hidráulico es acompañado por perturbaciones de presión y velocidad que se desplazan a velocidades muy altas, cercanas a la velocidad del sonido en el líquido. La acción resultante de la onda se presenta a frecuencias relativamente altas. Consideraremos la situación en la que una válvula en el extremo corriente abajo de un tubo se cierra o se abre de pronto, ya sea parcial o completamente, para iniciar una respuesta de ariete hidráulico.

CONCEPTO CLAVE *Un ariete hidráulico es acompañado por perturbaciones de presión y velocidad que se desplazan a altas velocidades.*

Desarrollemos primero las ecuaciones fundamentales. Considere de nuevo el tubo horizontal que se ilustra en la figura 11.8, donde ahora la válvula se cerrará tan rápidamente que los efectos elásticos hacen que ocurra un ariete hidráulico. El movimiento de la válvula hará que una onda acústica, o de presión, con velocidad a se propague corriente arriba. En la figura 11.9a se ilustra un volumen de control de una sección incremental de líquido contenido en el tubo, donde se encuentra la onda de presión en un instante determinado. La presencia de la onda implica que un flujo no permanente está teniendo lugar dentro del volumen de control; a la entrada la velocidad es V, y a la salida es $V + \Delta V$. Las leyes de conservación de estado permanente pueden aplicarse si se hace que el frente de ondas parezca estacionario para un observador que se mueva con la velocidad de la onda (figura 11.9b). (Consulte la sección 4.5.3 para ver el desarrollo de los marcos de referencia inerciales que se mueven con una velocidad constante.) En contraste con la figura 11.9a, la velocidad de entrada es ahora $V + a$, y a la salida es $V + \Delta V + a$. La presión, el área del tubo y la densidad a la entrada son p, A y r, respectivamente. Debido al paso de la onda de presión, a la salida la presión, el área de tubo, y la densidad del líquido se

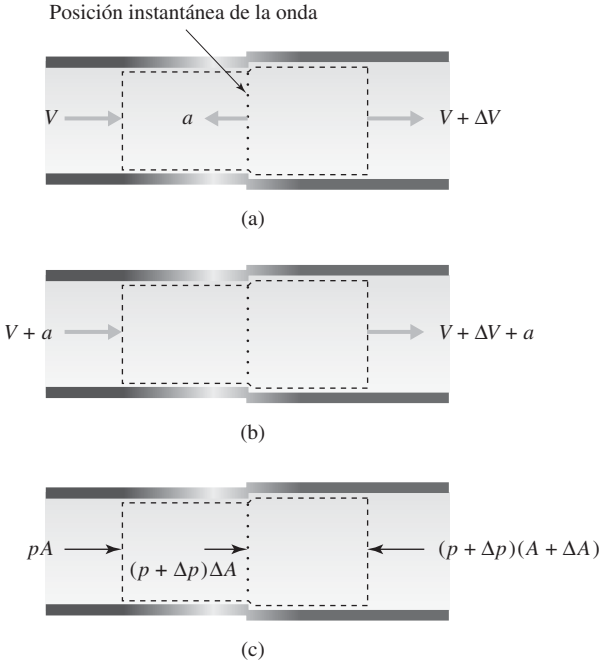


Fig. 11.9 Onda de presión que se mueve a través de un segmento de tubo horizontal: (a) onda de presión moviéndose hacia la izquierda a una velocidad a; (b) onda de presión que parece estacionaria usando el principio de superposición; (c) fuerzas de presión actuando sobre el volumen de control.

alteran a $p + \Delta p, A + \Delta A$ y $\rho + \Delta\rho$, donde $\Delta p, \Delta A$ y $\Delta\rho$ son los cambios respectivos en presión, área y densidad.

Aplicando la conservación de masa a través del volumen de control en la figura 11.9b, encontramos que

$$0 = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V + a)(A + \Delta A) - \rho(V + a)A \tag{11.5.8}$$

Despreciando las fuerzas de fricción y gravitacionales, sólo fuerzas de presión actúan sobre el volumen de control en la dirección del flujo, como se muestra en la figura 11.9c. La conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control es

$$pA + (p + \Delta p)\,\Delta A - (p + \Delta p)(A + \Delta A) = \rho A(V + a)[V + \Delta V + a - (V + a)] \tag{11.5.9}$$

Las ecuaciones 11.5.8 y 11.5.9 se desarrollan, y los términos que contienen factores de Δ^2 y Δ^3 se eliminan puesto que son mucho menores en magnitud que los restantes. Entonces las ecuaciones 11.5.8 y 11.5.9 se convierten en

$$\rho A\Delta V + (V + a)(A\Delta\rho + \rho\Delta A) = 0 \tag{11.5.10}$$

y

$$-A\Delta p = \rho A(V + a)\,\Delta V \tag{11.5.11}$$

En casi todas las situaciones $V \ll a$, de modo que la ecuación 11.5.11 se convierte en

$$\Delta p = -\rho a\Delta V \tag{11.5.12}$$

Ecuación de Joukowsky: *Relaciona el cambio de presión con la velocidad de la onda de presión y el cambio de velocidad.*

La ecuación 11.5.12, llamada **ecuación de Joukowsky**, relaciona el cambio de presión con la velocidad de la onda de presión y el cambio de velocidad. Observe que una reducción de la velocidad (un ΔV negativo) produce un aumento de presión (un Δp positivo), y un ΔV positivo da un Δp negativo.

Una vez que la onda haya pasado a través del volumen de control, las condiciones alteradas $p + \Delta p, V + \Delta V, A + \Delta A$ y $\rho + \Delta\rho$ persistirán hasta que la onda se refleje del límite corriente arriba; esta acción de la onda se analizará más adelante. Primero, es útil examinar la naturaleza de la velocidad a de la onda del pulso de presión. Las ecuaciones 11.5.10 y 11.5.11 se combinan, otra vez reconociendo que $V \ll a$, para eliminar ΔV, con el resultado de que

$$\frac{\Delta p}{\rho a^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta A}{A} \tag{11.5.13}$$

De la definición del módulo de elasticidad de volumen B para un fluido, ecuación 1.5.11, podemos relacionar el cambio en densidad con el cambio en presión como $\Delta\rho/\rho = \Delta p/B$. El cambio en el área del tubo se puede relacionar con el cambio en presión si se considera una respuesta elástica instantánea de la pared del tubo a cambios de presión. Suponiendo una sección transversal circular del tubo de radio r, tenemos $\Delta A/A = 2\Delta r/r$ y el cambio en deformación circunferencial ε de la pared del tubo es $\Delta\varepsilon = \Delta r/r$. Para un tubo de pared delgada cuyo espesor e es mucho menor que el radio, es decir, $e \ll r$, el esfuerzo circunferencial está dado por $\sigma = pr/e$. Para pequeños cambios en r y e, $\Delta\sigma \approx (r/e)\Delta p$. El módulo de elasticidad para el material de la pared del tubo es el cambio en esfuerzo dividido entre el cambio en deformación, o sea

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \approx \frac{(r/e)\Delta p}{\Delta r/r} = \frac{(2r/e)\Delta p}{\Delta A/A} \tag{11.5.14}$$

Despejando $\Delta A/A$, y sustituyendo el resultado en la ecuación 11.5.13, junto con el cambio relativo en densidad relacionado con el cambio en presión y el módulo de volumen, resulta

$$\frac{\Delta\rho}{\rho a^2} = \frac{\Delta p}{B} + \frac{2r\Delta p}{E} \tag{11.5.15}$$

El parámetro Δp puede eliminarse en la ecuación 11.5.15, el diámetro sustituirse por el radio, y despejar a de la relación:

$$a = \sqrt{\frac{B/\rho}{1 + (D/e)(B/E)}} \tag{11.5.16}$$

Por tanto, la velocidad de la onda del pulso de presión se muestra que está relacionada con las propiedades del líquido (ρ y B) y con las de la pared del tubo (D, e y E). Si el tubo es muy rígido, o duro, entonces el término $DB/eE \ll 1$, la ecuación 11.5.16 se convierte en $a = \sqrt{B/\rho}$, que es la velocidad del sonido en un líquido no confinado (vea la ecuación 1.5.12). Observe que el efecto de la elasticidad del tubo es reducir la velocidad de la onda de presión.

El uso de las ecuaciones 11.5.12 y 11.5.16 dará sólo la magnitud de la excitación del ariete hidráulico. Además, es necesario entender la naturaleza de la onda del pulso de presión conforme se desplaza por todo el tubo y se refleja de los límites. Consistente con el desarrollo de las ecuaciones 11.5.12 y 11.5.16, no prestamos atención a la fricción para simplificar el análisis. Considere la situación en la que la válvula se cierra de pronto y el tubo es rígido. Estudiemos en detalle la secuencia de eventos en todo un ciclo de movimiento, como se ilustra en la figura 11.10.

En la figura 11.10a existe una condición permanente inicial, la velocidad es V_0, y la válvula se cierra de pronto en $t = 0$. Observe que cuando no se toma en cuenta la fricción, la línea de referencia hidráulica aparece horizontal. Después que se cierra la válvula, la onda se desplaza corriente arriba (figura 11.10b). Detrás de la onda, la velocidad se reduce a cero, la presión se eleva en una cantidad Δp, el líquido se ha comprimido y el tubo se ha expandido ligeramente. En el tiempo L/a la onda llega

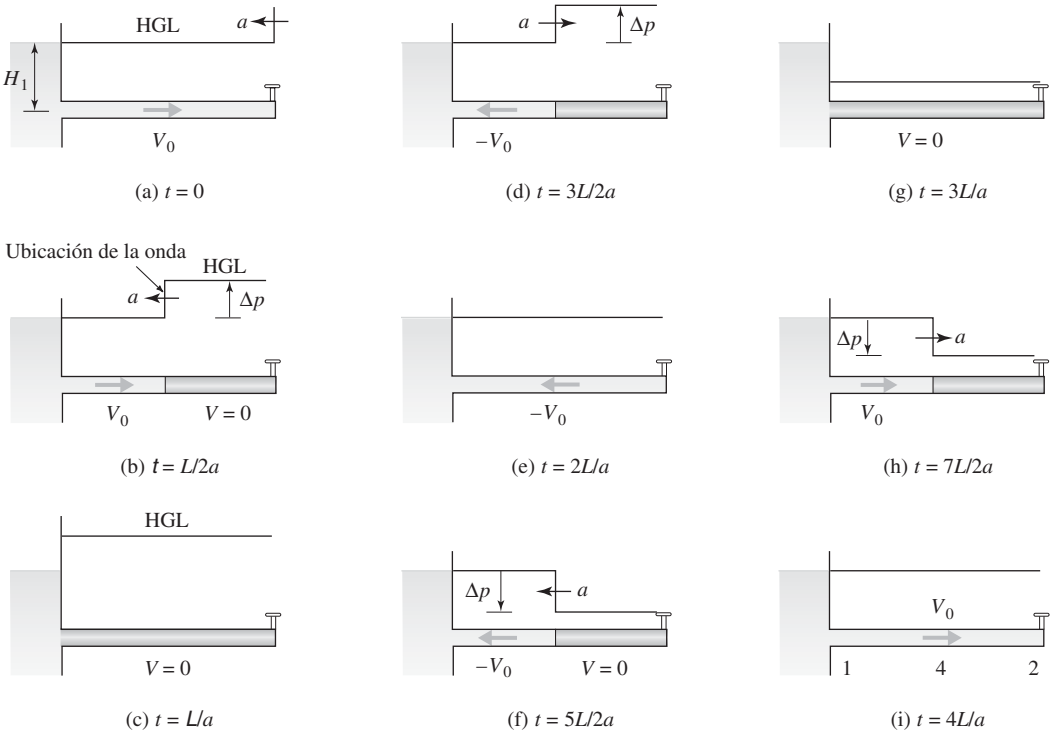


Fig. 11.10 Un ciclo de movimiento de una onda en un tubo debido al cierre repentino de una válvula.

al depósito, y se presenta una fuerza desbalanceada a la entrada del tubo (figura 11.10c). En el tubo la presión se reduce a la presión en el depósito, y la velocidad de pronto invierte su dirección; este proceso se inicia en el extremo corriente arriba y se propaga corriente abajo a la velocidad de la onda a (figura 11.10d).

Cuando la onda llega a la válvula en el tiempo $2L/a$, la velocidad tiene magnitud $-V_0$ en todo el tubo (figura 11.10e). Adyacente a la válvula, que ahora está cerrada, la velocidad se reduce a cero y la presión se reduce en la cantidad Δp (figura 11.10f). La onda de baja presión se desplaza corriente arriba a una velocidad a y detrás de la onda el líquido se expande y la pared del tubo se contrae. Observe que si la presión detrás de la onda se reduce a la presión de vapor, ocurrirá cavitación y parte del líquido se vaporizará. Cuando la onda de presión llega al depósito en el tiempo $3L/a$, de nuevo se presenta una condición desbalanceada, opuesta en magnitud a la del tiempo $L/$a (figura 11.10g). Un equilibrio de fuerzas hará que ahora la onda se desplace corriente abajo, con la presión aumentada en una cantidad Δp y la velocidad igual a $+V_0$ detrás del frente (figura 11.10h). Cuando la onda llega a la válvula en el tiempo $4L/$a, una vez más prevalecen las condiciones iniciales de estado permanente en todo el tubo (figura 11.10i).

El proceso se repite a sí mismo cada $4L/a$ segundos. Para la situación ideal sin fricción que aquí se muestra, el movimiento se hace perpetuo. La forma de la onda de presión en la válvula y en el punto medio del tubo y la velocidad a la entrada del tubo se muestran en la figura 11.11. Para un sistema real de tuberías, la fricción, el movimiento de la tubería y el comportamiento inelástico del material de la tubería harán que la oscilación en última instancia desaparezca y cese (vea la figura 11.12).

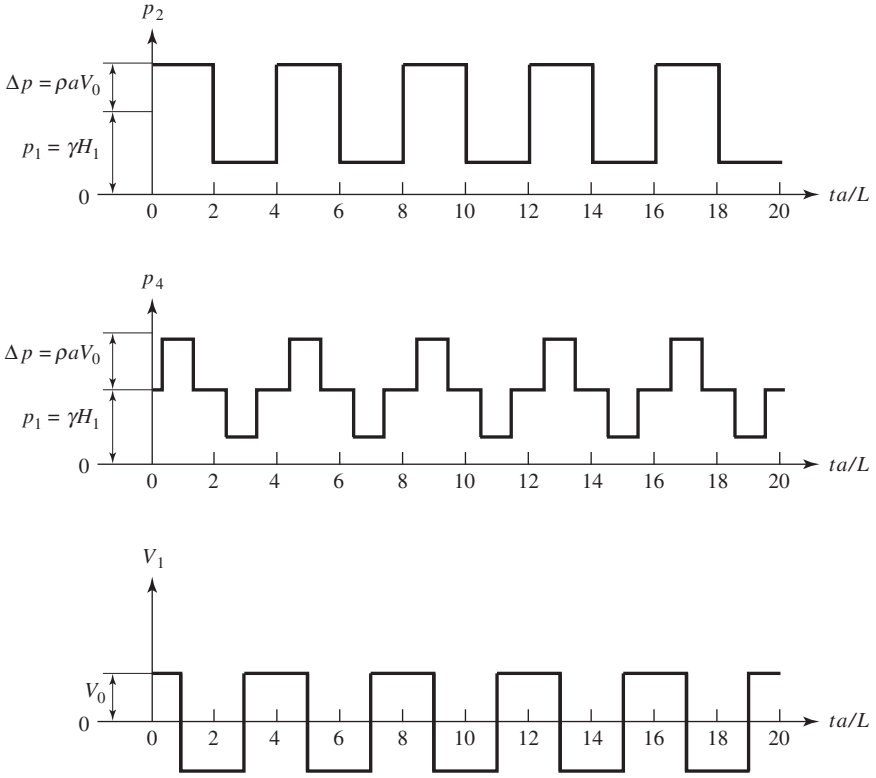


Fig. 11.11 Formas de ondas de presión en la válvula (p_2), punto medio del tubo (p_4), y forma de onda de la velocidad a la entrada del tubo (V_1).

El aumento de presión Δp pronosticado por la ecuación 11.5.13 está basado en la suposición de que la válvula se cierra instantáneamente. En realidad, puede usarse para pronosticar el aumento máximo de presión cuando la válvula se cierra en cualquier tiempo menor que $2L/a$, el tiempo que tarda la onda de presión en desplazarse de la válvula al depósito y regresar otra vez. Para tiempos de cierre de la válvula mayores que $2L/a$, se requiere un análisis más completo (Wylie y Streeter,

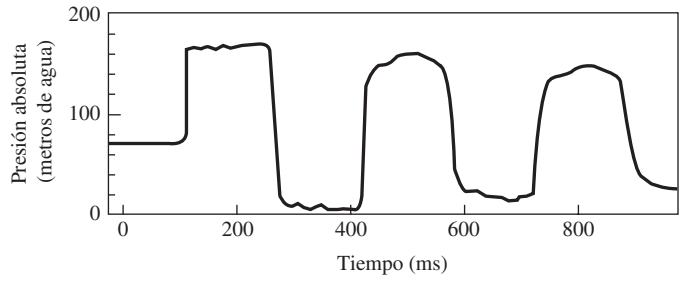


Fig. 11.12 Forma de onda de presión en la válvula para un sistema de tuberías real después de un rápido cierre de la válvula. (Según Martin, 1983.) (Martin, C. D., Experimental Investigation of Column Separation with Rapid Valve Closure, Proceedings, 4th International Conference on Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, England, 1983, pp. 77-88. Reproducida con permiso.)

1993). Recuerde que el análisis previo corresponde sólo a un tubo horizontal único, con un depósito en el extremo corriente arriba y a una válvula que se cierra en forma instantánea en el extremo corriente abajo, y un tubo que contiene un líquido sin fricción. La mayor parte del análisis de un ariete hidráulico, realizado por ingenieros hoy en día, hace uso de métodos numéricos basados en una computadora para sistemas de tuberías complejos, que incorporan una variedad de mecanismos de excitación como bombas, supresores de oleaje y varios tipos de válvulas (Wylei y Streeter, 1993).

Ejemplo 11.11

Un tubo de acero ($E = 207$ MPa, $L = 1500$ m, $D = 300$ mm, $e = 10$ mm) transporta agua a 20 ºC. La velocidad inicial es $V_0 = 1$ m/s. Una válvula en el extremo corriente abajo se cierra en forma tan rápida que el movimiento se considera instantáneo, reduciendo la velocidad a cero. Determine la velocidad de la onda del pulso de presión en el tubo, la velocidad del sonido en un medio acuoso no confinado, el aumento de presión en la válvula, el tiempo que le toma a la onda en desplazarse de la válvula al depósito en el extremo corriente arriba, y el periodo de oscilación.

Solución

La densidad y el módulo de volumen del agua a 20 ºC se encuentran en la tabla B.1: $\rho = 998$ kg/m^3 y $B = 220 \times 10^7$ Pa. La velocidad de la onda de presión, a, está dada por la ecuación 11.15.16:

$$a = \sqrt{\frac{220 \times 10^7/998}{1 + \dfrac{0.3}{0.01} \times \dfrac{220 \times 10^7}{207 \times 10^9}}} = 1290 \text{ m/s}$$

La velocidad del sonido en un medio acuoso no confinado se encuentra, aplicando la ecuación 1.5.12, que es

$$a = \sqrt{\frac{220 \times 10^7}{998}} = 1485 \text{ m/s}$$

Observe que la velocidad del sonido es alrededor de 15% mayor que la velocidad de la onda de presión. Para calcular el aumento de presión en la válvula, reconocemos que la reducción en velocidad es $-V_0 = -1$ m/s. Usando la ecuación 11.15.12, el aumento en presión corriente arriba de la válvula es

$$\Delta p = -998 \times 1290 \times (-1) = 1.29 \times 10^6 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 1290 \text{ kPa}$$

El tiempo de desplazamiento de la onda de la válvula al depósito es $L/a = 1500/1290 = 1.16$ s y el periodo de oscilación es $4L/a = 4 \times 1.16 = 4.65$ s.

11.6 RESUMEN

Una metodología para considerar las pérdidas en tuberías se explica en la sección 11.2, usando el coeficiente de resistencia como término generalizado que puede incluir pérdidas menores junto con una pérdida por fricción empírica elegida. Para una representación precisa de las pérdidas, se recomienda la pérdida por fricción de Darcy-Weisbach, con pérdidas proporcionales al cuadrado de la velocidad (o descarga). La ecuación 11.2.3 es útil para estimar el factor de fricción de Darcy-

Weisbach en una solución iterativa, o de prueba. En la sección 11.3 se han definido sistemas de tuberías simples como los que contienen de uno a varios tubos dispuestos ya sea individualmente, en serie, en paralelo o en ramal. Por lo general, un problema consiste en hallar la distribución del flujo en la tubería; junto con las descargas, la carga hidroeléctrica suele ser desconocida. Las soluciones basadas en calculadora o en programas de computadoras son útiles para analizar estos sistemas.

Para redes de tuberías más complejas, en la sección 11.4 se ha presentado un método de solución sistemático. Primero se linearizan las ecuaciones de la red y, a continuación, se aplica el método de Hardy Cross para despejar los flujos de la red y las cargas hidráulicas. Se aplicó la solución con una hoja de cálculo a una red usando la solución de Hardy Cross; ésta nos permite aplicar correctamente las ecuaciones de energía y de continuidad así como rastrear la convergencia de la solución. Observe que incluso los sistemas de tuberías simples presentados en la sección 11.3 pueden resolverse usando el método de Hardy Cross. El programa de computadora EPANET también se introdujo en la sección 11.4. Este programa es útil para sistemas grandes en los que la programación con una hoja de cálculo se hace engorrosa.

Por último, en la sección 11.5 se introdujo el análisis de flujos no permanentes en tubos. Nos hemos concentrado en un flujo que se comporta ya sea de una forma incompresible como compresible; este último comportamiento se denomina "ariete hidráulico." Un ariete hidráulico es un resultado de las ondas acústicas que se propagan en un tubo. Las ondas se desplazan a la velocidad del sonido en el líquido confinado y producen una respuesta periódica de presiones y velocidades en todo el tubo. La relación de Joukowsky, ecuación 11.5.12, da la magnitud de la onda de presión.

PROBLEMAS

Flujos permanentes

11.1 Usando los resultados del ejemplo 11.2, tabule y grafique, a la correcta escala vertical, las líneas de referencia hidráulica y de energía. Suponga una longitud de 10 m entre los dos codos.

11.2 Una bomba está instalada entre dos secciones en una tubería horizontal. El diámetro D_1 y la presión p_1 se dan en la sección corriente arriba, y D_2 y p_2 se dan en la sección corriente abajo. Determine la potencia requerida de la bomba para el fluido para las siguientes condiciones:

(a) $D_1 = 50$ mm, $p_1 = 350$ kPa, $D_2 = 80$ mm, $p_2 = 760$ kPa, $Q = 95$ L/min, $h_L = 6.6$ m y agua fluyendo a 20 °C.

(b) $D_1 = 2$ in, $p_1 = 50$ lb/in^2, $D_2 = 3$ in, $p_2 = 110$ lb/in^2, $Q = 25$ gal/min, $h_L = 20$ ft y agua fluyendo a 70 °F.

11.3 Cierta cantidad de petróleo ($S = 0.82$) se bombea entre dos tanques de almacenamiento a través de una tubería con las siguientes características: $L = 2440$ m, $D = 200$ mm, $f = 0.02$, $\Sigma K = 12.5$. El tanque superior está a 32 m más arriba que el inferior. Usando los datos de la bomba proporcionados, determine:

(a) La descarga de petróleo en la tubería.

(b) La potencia requerida de la bomba.

Q (L/s)	0	15	30	45	60	75	100
H_P (m)	55	54	53	52	49	44	35
η	0	0.4	0.6	0.7	0.75	0.7	0.5

11.4 Considere el sistema de bombeo simple que se ilustra en la figura P11.4. Suponga que se conocen los siguientes parámetros:

Elevaciones de los depósitos, z_1, z_2
Longitud de la tubería, L
Rugosidad de la tubería, e
Suma de los coeficientes de pérdidas menores, ΣK
Viscosidad cinemática, ν
Descarga, Q

Desarrolle una solución numérica para hallar el diámetro requerido. Use una longitud equivalente para representar las pérdidas menores. Determine el diámetro para los datos siguientes:

(a) $z_2 - z_1 = 120$ ft, $L = 1500$ ft, $e = 0.003$ ft, $\Sigma K = 2.5$, agua a 50 °F, $Q = 15{,}000$ gal/min, curva característica de la bomba:

H_P (ft)	490	486	473	453	423	406
Q (gal/min)	0	4000	8000	12,000	16,000	18,000

(b) $z_2 - z_1 = 40$ m, $L = 500$ m, $e = 1$ mm, $\Sigma K = 2.5$, agua a 20 °C, $Q = 1.1$ m^3/s, curva característica de la bomba:

H_P (m)	160	158	154	148	138
Q (L/s)	0	400	800	1200	1600

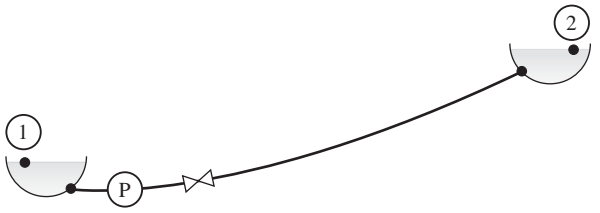


Fig. P11.4

11.5 Se bombea gasolina a 400 L/s a través de una tubería de la ubicación A a la B, como se muestra en la figura P11.5. La tubería sigue la topografía como se muestra, con la elevación más alta mostrada en la ubicación C. Las únicas aportaciones a las pérdidas menores son las dos válvulas localizadas en los extremos de la tubería. Si $S = 0.81$, $\nu = 4.26 \times 10^{-7}$ m^2/s, $p_v = 55.2$ kPa absoluta, y $p_{atm} = 100$ kPa,

(a) Determine la potencia necesaria que se debe suministrar al sistema para satisfacer el requerimiento del flujo.

(b) ¿Cuál es la máxima elevación posible en la ubicación C sin hacer que existan condiciones de presión de vapor?

(c) Haga un bosquejo de la línea de referencia hidráulica.

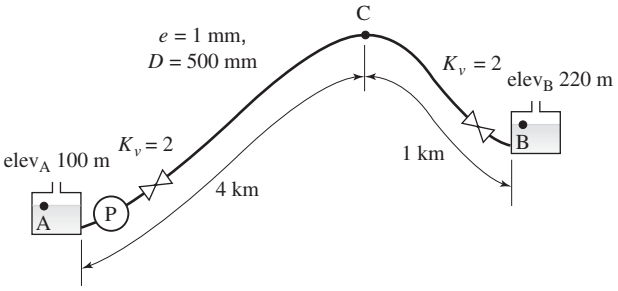


Fig. P11.5

11.6 Para los tres tubos en serie que se muestran en la figura P11.6, las pérdidas menores son proporcionales al cuadrado de la descarga y se usa la fórmula de Hazen-Williams para tomar en cuenta las pérdidas por fricción. Con los datos dados, use el método de Newton para determinar la descarga. Observe que las pérdidas menores pueden ignorarse para estimar inicialmente Q.

(a) $(p/\gamma + z)_A = 250$ m y $(p/\gamma + z)_B = 107$ m.

Tubo	L (m)	D (mm)	ΣK	*C (Hazen–Williams)*
1	200	200	2	100
2	150	250	3	120
3	300	300	0	90

(b) $(p/\gamma + z)_A = 820$ ft y $(p/\gamma + z)_B = 351$ ft.

Tubo	L (ft)	D (in.)	ΣK	*C (Hazen–Williams)*
1	600	8	2	100
2	300	10	3	120
3	900	12	0	90

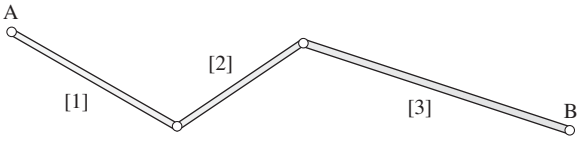


Fig. P11.6

11.7 Un largo oleoducto está formado por los tres segmentos que se ilustran en la figura P11.7. Cada uno de los segmentos tiene una bomba auxiliar que se usa principalmente para superar la fricción en el tubo. Los dos depósitos están a la misma elevación.

(a) Deduzca una ecuación para determinar la descarga en el sistema, si se conocen los factores de resistencia $\overline{R}_i$ para cada tubo y la potencia útil $\dot{W}_{fi}$ para cada bomba.

(b) Determine la descarga para los datos dados en la figura. El peso unitario del petróleo es $\gamma = 8830\ \text{N/m}^3$.

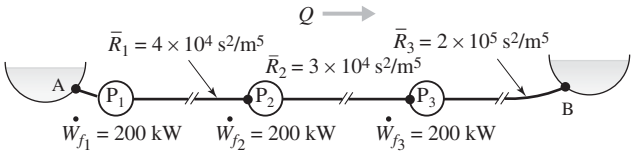


Fig. P11.7

11.8 Un líquido con una gravedad específica de 0.68 se bombea de un tanque de almacenamiento a una descarga de chorro libre, a través de una tubería de longitud L y diámetro D (figura P11.8). La bomba suministra al fluido una cantidad conocida de potencia $\dot{W}_f$. Suponiendo un factor de fricción constante de 0.015, determine la descarga para las siguientes condiciones:

(a) $z_1 = 24$ m, $p_1 = 110$ kPa, $z_2 = 18$ m, $L = 450$ m, $D = 300$ mm, $\dot{W}_f = 10$ kW.

(b) $z_1 = 75$ ft, $p_1 = 15\ \text{lb/in}^2$, $z_2 = 60$ ft, $L = 1500$ ft, $D = 8$ in, $\dot{W}_f = 15$ hp.

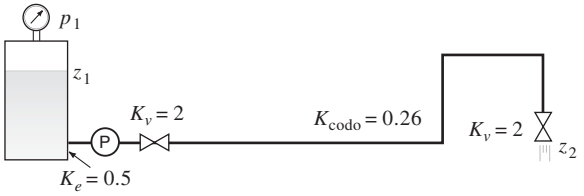


Fig. P11.8

11.9 Se bombea agua a 20 ºC a través de los tres tubos en serie como se muestra en la figura P11.9. La potencia suministrada a la bomba es 1920 kW, y la eficiencia de la bomba es 0.82. Calcule la descarga.

Tubo	L (m)	D (mm)	e (mm)	ΣK
1	200	1500	1	2
2	300	1000	1	0
3	120	1200	1	10

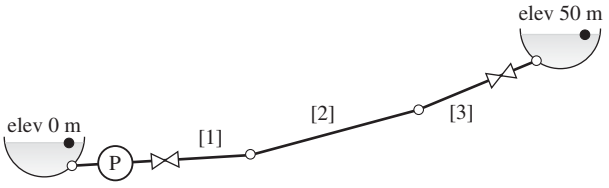


Fig. P11.9

11.10 Encuentre la distribución del flujo de agua en el sistema paralelo que se muestra en la figura P11.10, y la potencia de bombeo requerida si la descarga a través de la bombas es $Q_1 = 3\ \text{m}^3/\text{s}$. La eficiencia de la bomba es 0.75. Suponga factores de fricción constantes.

Tubo	L (m)	D (mm)	f	ΣK
1	100	1200	0.015	2
2	1000	1000	0.020	3
3	1500	500	0.018	2
4	800	750	0.021	4

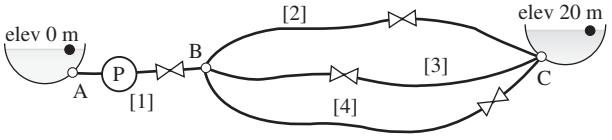


Fig. P11.10

11.11 Para el sistema que se muestra en la figura P11.11, determine la distribución del flujo de agua y la carga hidráulica en la unión usando un método específico. Suponga factores de fricción constantes. La curva característica de la bomba es $H_P = a - bQ^2$.

(a) $a = 20$ m, $b = 30\ \text{s}^2/\text{m}^5$, $z_1 = 10$ m, $z_2 = 20$ m, $z_3 = 18$ m.

Tubo	L (m)	D (cm)	f	K
1	30	24	0.020	2
2	60	20	0.015	0
3	90	16	0.025	0

(b) $a = 55$ ft, $b = 0.1\ \text{s}^2/\text{ft}^5$, $z_1 = 20$ ft, $z_2 = 50$ ft, $z_3 = 45$ ft.

Tubo	L (ft)	D (in.)	f	K
1	100	10	0.020	2
2	200	8	0.015	0
3	300	6	0.025	0

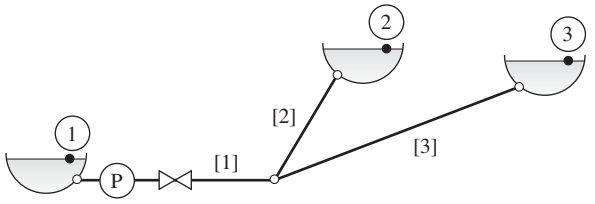


Fig. P11.11

11.12 Resuelva el problema 11.11 usando un método numérico:
- **(a)** Método de Newton
- **(b)** Método de la posición falsa

11.13 Encuentre la distribución del flujo en la red paralela que se muestra en la figura P11.13. Suponga factores de fricción constantes. El cambio en la línea de referencia hidráulica entre A y B es $(p/\gamma + z)_A - (p/\gamma + z)_B = 50$ m.

Tubo	L (m)	D (mm)	e (mm)	ΣK
1	600	1000	0.1	2
2	1000	1200	0.15	0
3	550	850	0.2	4
4	800	1000	0.1	1

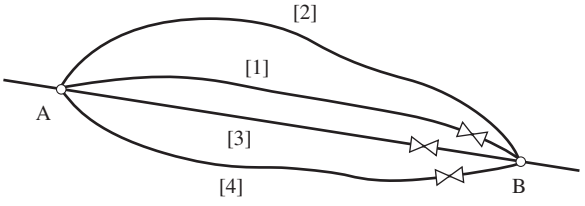


Fig. P11.13

11.14 El sistema aspersor de agua mostrado en la figura P11.14 se aplica desde un tubo de diámetro grande con presión interna constante $p_0 = 300$ kPa. El sistema está colocado en un plano horizontal. Determine la distribución del flujo Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 para los datos dados. Las pérdidas por las válvulas están incluidas en los valores $\overline{R}$. (*Sugerencia:* Si uno es inteligente, ¡no necesita una solución de prueba y error!)

Tubo	$\overline{R}$ (s^2/m^5)
1	1.6×10^4
2	5.3×10^5
3	1.0×10^6
4	1.8×10^6

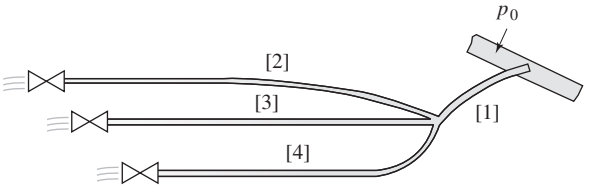


Fig. P11.14

11.15 Para el sistema mostrado en la figura P11.15, un fluido fluye de A a B. Determine en cuál tubo se tiene la velocidad más alta.

Tubo	L (m)	D (mm)	f
1	2000	450	0.012
2	650	150	0.020
3	1650	300	0.015

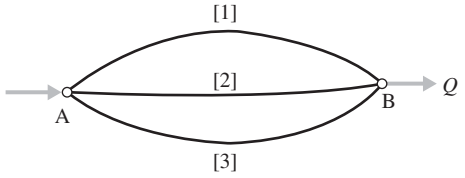
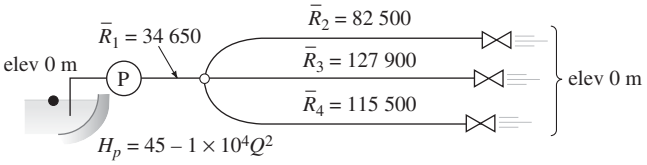


Fig. P11.15

11.16 Un sistema de irrigación de agua propuesto está formado por una tubería principal con una bomba y tres ramales de tuberías (figura P11.16). Cada ramal está terminado en un orificio y cada orificio tiene la misma elevación. Es evidente que la distribución del flujo puede resolverse si se trata la configuración de las tuberías como un sistema ramal. No obstante, las tuberías también pueden tratarse como un sistema paralelo para determinar los flujos.
- **(a)** Identifique las ecuaciones e incógnitas para satisfacer la solución para un sistema paralelo. ¿Por qué es posible tratar el sistema de irrigación como un problema de una tubería en paralelo?
- **(b)** ¿Por qué se preferiría la solución para un sistema paralelo a la de un sistema ramal?
- **(c)** Determine la distribución del flujo y haga un bosquejo de la línea de referencia hidráulica.
- **(d)** ¿Qué parte de la tubería cambiaría para aproximadamente duplicar la descarga, suponiendo que las longitudes individuales y la curva de la bomba no pudieran alterarse?



(H_p en m; Q en m^3/s; $\bar{R}$ en s^2/m^5, pérdida en el orificio incluida en $\bar{R}$)

Fig. P11.16

11.17 Determine la carga requerida (H_P) y la descarga (Q_1) de agua a ser manejada por la bomba para el sistema que se ilustra en la figura P11.17. La descarga en el tubo 2 es Q_2=35 L/s en la dirección mostrada.

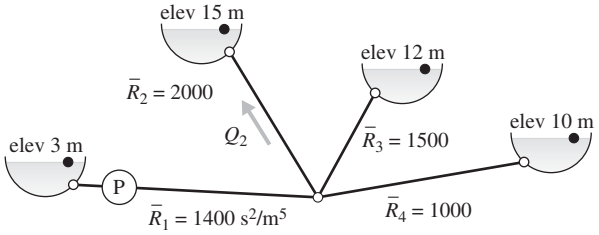


Fig. P11.17

11.18 Determine la distribución del flujo de agua en el sistema de tuberías en paralelo que se muestra en la figura P11.18.

(a) Q_{ent} = 600 L/min

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	*f*	Σ *K*
1	30	50	0.020	3
2	40	75	0.025	5
3	60	60	0.022	1

(b) Q_{ent} = 0.35 ft^3/s

Tubo	*L* (ft)	*D* (in.)	*f*	Σ *K*
1	90	2	0.020	3
2	120	3	0.025	5
3	180	2.5	0.022	1

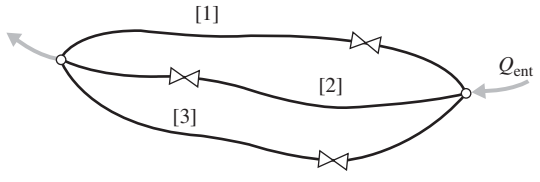


Fig. P11.18

11.19 Se bombea agua en el sistema de tuberías de la figura P11.19. La curva de la bomba es aproximada por la relación $H_P = 150 - 5Q_1^2$, con H_p en metros y Q_1 en m^3/s. La eficiencia de la bomba es $\eta = 0.75$. Calcule la distribución del flujo y encuentre la potencia requerida de la bomba.

Tubo	$\bar{R}$ (s^2/m^5)
1	400
2	1000
3	1500

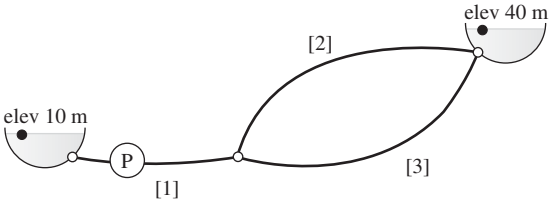


Fig. P11.19

11.20 Un acueducto consta de dos segmentos de tuberías en serie (figura P11.20). La gravedad específica del fluido es 0.81. Si la bomba A tiene una entrada de potencia constante de 1 MW, encuentre la descarga, la carga hidráulica en las bombas A y B, y la potencia requerida para la bomba B. La presión mínima permisible en el lado de succión de la bomba B es 150 kPa, y ambas bombas tienen una eficiencia de 0.76.

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	Σ *K*	*f*
1	5000	750	2	0.023
2	7500	750	10	0.023

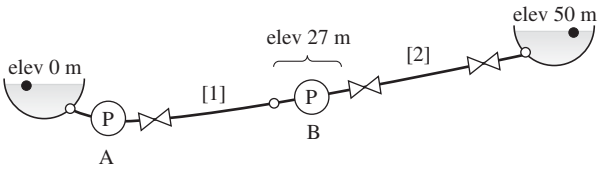


Fig. P11.20

11.21 Determine la distribución del flujo de agua en el sistema mostrado en la figura P11.21. La rugosidad equivalente para todos los elementos es 0.1 mm.

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	Σ *K*
1	1000	200	3
2	200	25	0
3	250	25	0
4	340	30	2
5	420	40	0
6	500	175	5

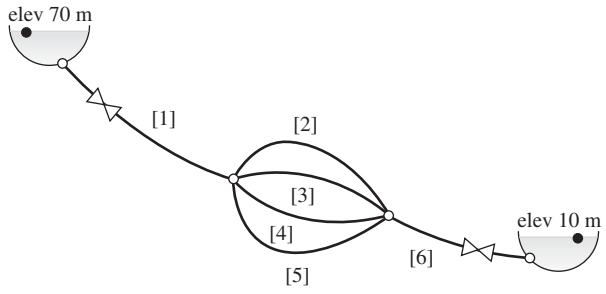


Fig. P11.21

11.22 Determine la distribución del flujo de agua en el sistema ramal mostrado en la figura P11.22:

(a) Sin una bomba en la línea 1.

(b) Incluya una bomba ubicada en la línea 1 adyacente al depósito inferior. La curva característica de la bomba está dada por $H_P = 250 - 0.4Q - 0.1Q^2$, con H_P en metros y Q en m³/s.

El coeficiente de Hazen-Williams es $C = 130$ para todos los tubos.

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)
1	200	500
2	600	300
3	1500	300
4	1500	400

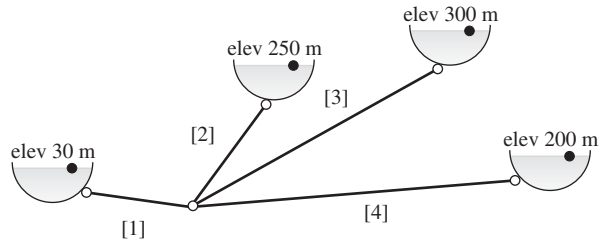


Fig. P11.22

11.23 Determine la distribución del flujo de agua en el sistema mostrado en la figura P11.23. Suponga factores de fricción constantes, con $f = 0.02$. La relación carga hidráulica-descarga para la bomba es $H_P = 60 - 10Q^2$ donde H_P está en metros y la descarga está en metros cúbicos por segundo.

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	Σ *K*
1	100	350	2
2	750	200	0
3	850	200	0
4	500	200	2
5	350	250	2

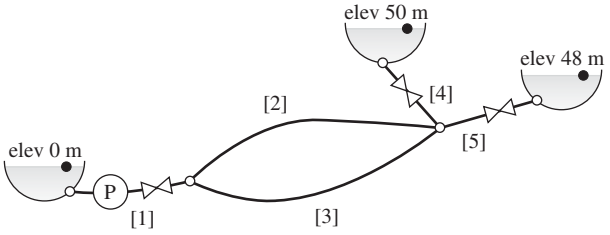


Fig. P11.23

11.24 Una bomba, cuyas curvas de operación y de eficiencia se dan en la figura P11.24a, se ha seleccionado para suministrar agua en un sistema de tubería. La tubería está formada por cuatro tubos dispuestos como se muestra en la figura P11.24b. Se bombea agua a 60 °F de un depósito A y sale ya sea en el depósito B o en la ubicación D, dependiendo de si las válvulas en esos lugares están abiertas o cerradas. Las características de los tubos se muestran en la tabla siguiente. Todos los diámetros de los tubos son de 4 pulgadas, y el factor de fricción en cada tubo se supone que es $f = 0.04$.

(a) Si la descarga a través de la bomba es 5000 gal/hr, ¿cuál es la pérdida de carga hidráulica a través del tubo 2?

(b) Calcule la descarga del sistema, suponiendo que la válvula en la ubicación 2 está cerrada.

(c) Si la válvula en la ubicación D está abierta y la descarga a través de la bomba es de 11000 gal/hr, determine la descarga en el tubo 4.

Tubo	*L* (ft)	Σ *K*
1	10	1
2	500	2
3	2000	2
4	750	4

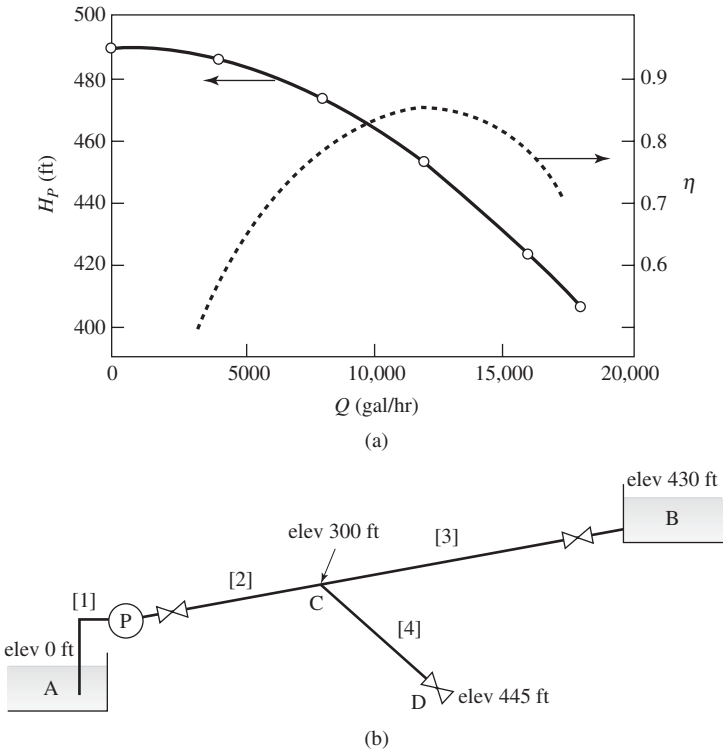


Fig. P11.24

11.25 Consulte el sistema y las curvas de la bomba asociadas con el problema 11.24. Suponga que la descarga a través de la bomba es de 12000 gal/hr.

- **(a)** ¿Cuál es la potencia requerida para la bomba?
- **(b)** Determine la presión en la ubicación C.
- **(c)** Si la válvula en la ubicación D está cerrada, ¿cuál es la presión manométrica en esa ubicación?

11.26 Consulte el sistema y las curvas de la bomba asociadas con el problema 11.24.

- **(a)** Suponiendo que la válvula en la ubicación D está abierta y el aumento en la carga hidráulica a través de la bomba es de 460 ft, determine la descarga en el tubo 3.
- **(b)** Si la válvula en la ubicación B está cerrada y la válvula en la ubicación D está abierta, ¿cuál es el aumento en la carga hidráulica a través de la bomba?

11.27 Para la red mostrada en la figura P11.27, realice lo siguiente:

(a) Identifique todos los parámetros desconocidos y escriba las ecuaciones requeridas para el sistema. Posteriormente, redúzcalas a una ecuación con una incógnita. Suponga $\beta = 2$.

(b) Prepare la red para un análisis de Hardy Cross haciendo para ello un bosquejo, identificando los bucles y las trayectorias necesarias, y escribiendo las ecuaciones apropiadas.

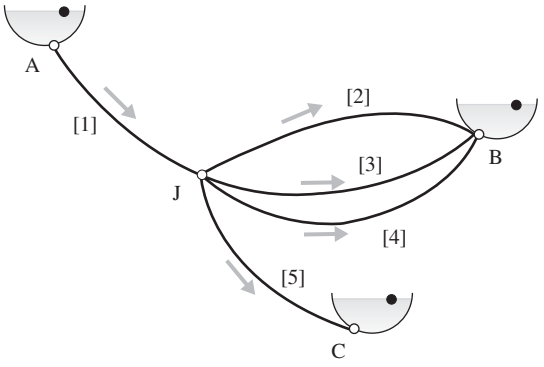


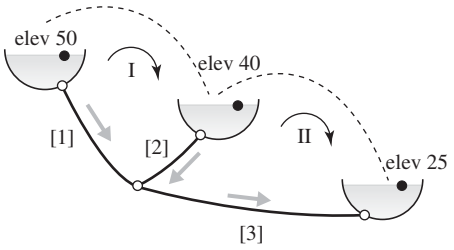
Fig. P11.27

11.28 Resuelva el sistema ramal mostrado en la figura P11.28a usando el método de Hardy Cross.

(a) Escriba las ecuaciones para ΔQ_{I}, ΔQ_{II}, W y G.

(b) Realice dos iteraciones llenando los espacios en blanco de la tabla mostrada en la figura P11.28b.

Después de dos iteraciones, haga un bosquejo de la línea de referencia hidráulica.



(a)

Bucle	Tubo	$\bar{R}$	$2\bar{R}$	Q	W	G	Q	W	G	Q
I	1	2	4	–3.5						
	2	2	4	0						
				$\Delta Q_{\mathrm{I}} =$			$\Delta Q_{\mathrm{I}} =$			
II	2	2	4	0						
	3	2	4	–3.5						
				$\Delta Q_{\mathrm{II}} =$			$\Delta Q_{\mathrm{II}} =$			

(b)

Fig. P11.28

11.29 Determine el flujo y la línea de referencia hidráulica en el sistema que se muestra en la figura P11.29 usando el método de análisis de Hardy Cross. Use $\gamma = 9800\ \mathrm{N/m^3}$.

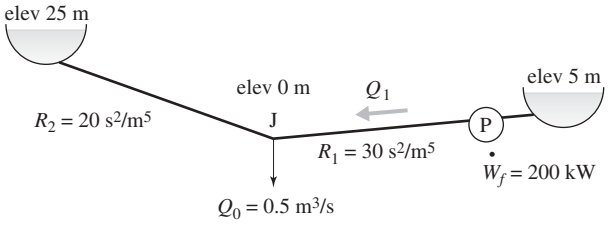


Fig. P11.29

11.30 La solución del flujo de agua en una red de tuberías se muestra en la figura P11.30. Calcule:

(a) La línea de referencia hidráulica en todo el sistema.

(b) La presión en cada nodo.

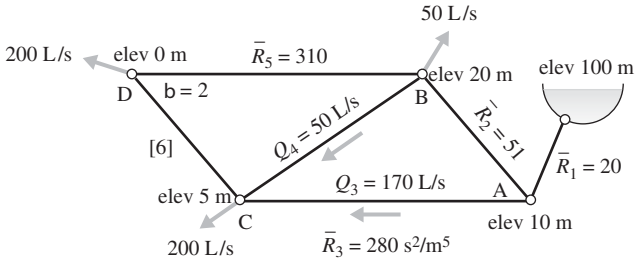


Fig. P11.30

11.31 Para la configuración mostrada en el problema 11.27, determine la distribución del flujo de agua y la línea de referencia hidráulica en J. Los datos del sistema están tabulados a continuación.

Depósito	*Elevación* (ft)	*Línea*	*L* (ft)	*D* (in.)	*f*	Σ *K*
A	650	1	800	8	0.015	0
B	575	2	600	3	0.020	2
C	180	3	650	3	0.020	2
		4	425	3	0.025	3
		5	1000	4	0.015	4

11.32 A través del sistema de tuberías mostrado en la figura P11.32 fluye agua. Determine la distribución del flujo usando el método de Hardy Cross:

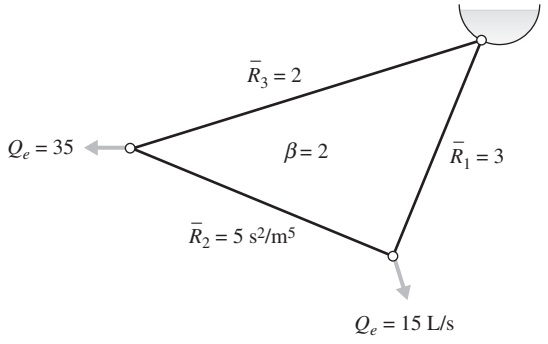


Fig. P11.32

11.33 Determine la distribución del flujo de agua en el sistema de tuberías mostrado en la figura P11.33, y las presiones en los nodos internos, empleando el método de solución de Hardy Cross.

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	*e* (mm)	Σ *K*
1	500	300	0.15	0
2	600	250	0.15	0
3	50	150	0.15	10
4	200	250	0.15	2
5	200	300	0.15	2

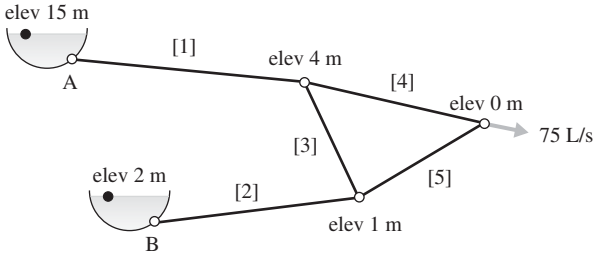


Fig. P11.33

11.34 Resuelva el problema 11.9 empleando para ello el método de Hardy Cross. Use la ecuación 11.2.6 para calcular los factores de fricción.

11.35 Determine la descarga en el sistema de tuberías mostrado en la figura P11.35:

(a) Con una solución exacta.

(b) Usando el método de Hardy Cross.

Agua es el líquido que fluye y las pérdidas son proporcionales al cuadrado de la velocidad ($\beta = 2$). La curva característica de la bomba es $H_P = 100 - 826Q^2$ (H_P está en metros y Q en m³/s).

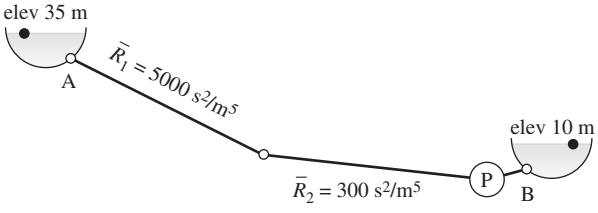


Fig. P11.35

11.36 El sistema de tuberías que se muestra en la figura P11.36 suministra agua a dos aspersores laterales (C y E) y a un depósito situado más abajo (F). El agua es suministrada por un depósito superior (A). Los aspersores están representados hidráulicamente como orificios con valores de K relativamente altos. Determine la distribución del flujo usando el método de Hardy Cross.

Línea	L (m)	D (mm)	e (mm)	ΣK
1	200	100	0.1	2
2	150	50	0.1	30
3	500	100	0.1	0
4	35	50	0.1	35
5	120	100	0.1	2

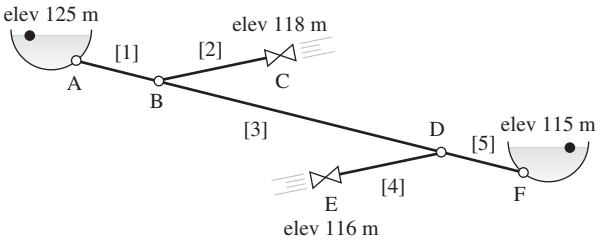


Fig. P11.36

11.37 En el problema 11.36, si una bomba que suministra 10 kW de potencia útil se inserta cerca de A, ¿qué cambios ocurrirían en el flujo y la presión?

11.38 En la figura P11.38 se ilustra un sistema de flujo de un condensador de agua de enfriamiento para una planta generadora de energía termoeléctrica. Se bombea agua desde un depósito situado en A a través de un tubo de gran diámetro [1], pasando por el condensador [2], y descargando por otro tubo de gran diámetro [3] hacia un estanque receptor, ubicación B. El condensador está construido con un gran número de tubos elevados, de diámetro pequeño y conectados en paralelo; en ambos extremos del condensador hay una caja grande llena de agua que recibe el nombre de colector, C y C'. Se conocen las elevaciones de la superficie del agua en A y B, al igual que las longitudes y los diámetros de los tubos 1 y 3. El condensador tiene N tubos idénticos, cada uno con el mismo diámetro D_2 y longitud L_2 conocidos. El factor de fricción para todos los tubos es el mismo valor constante, y la curva de la bomba es aproximada por la relación $H_P = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3$. Las pérdidas menores pueden considerarse insignificantes.

(a) Deduzca un coeficiente de resistencia equivalente para un tubo único R_2 para los tubos del condensador.

(b) Escriba la ecuación de energía para todo el sistema, usando las variables requeridas dadas y expresando la resistencia al flujo en términos de los coeficientes de resistencia para los tubos 1 y 3, y el coeficiente de resistencia equivalente para el tubo 2.

(c) Elabore un algoritmo de Hardy Cross para determinar la descarga a través del sistema.

(d) Si $z_A = 2$ m, $z_B = 0$ m, $L_1 = 100$ m, $D_1 = 2$ m, $L_2 = 15$ m, $D_2 = 0.025$ m, $N = 1000$, $L_3 = 200$ m, $D_3 = 2$ m y $f = 0.02$, calcule la descarga y la línea de referencia hidráulica. Los coeficientes para la curva de la bomba son $a_0 = 30.4$, $a_1 = -31.8$, $a_2 = 18.6$ y $a_3 = -4.0$, donde Q está en metros cúbicos por segundo.

(e) Si la parte superior del condensador está situada a una elevación de 6 m, ¿cuáles son las presiones en la parte superior de los colectores corriente arriba y corriente abajo?

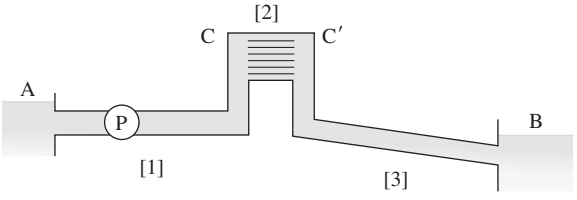


Fig. P11.38

11.39 Determine la distribución del flujo en la red ramal o en forma de "árbol" mostrada en la figura P11.39. El líquido que fluye es agua: $\gamma = 62.4$ lb/ft^3. La fuente del flujo es una tubería grande (ubicación A) mantenida a una presión constante de 60 psi. Cada uno de los ramales termina en un lugar donde se conoce la línea de referencia hidráulica. (Cortesía de D. Wood.)

11.40 El sistema de 12 tuberías que se ilustra en la figura P11.40 representa una región de baja presión que está conectada a un sistema de alta presión mediante reguladores de presión ajustados a 50 psi. Determine la presión y la distribución del flujo de agua para las demandas que se muestra. Suponga un coeficiente de Hazen-Williams $C = 120$ para todos los tubos. (Cortesía de D. Wood.)

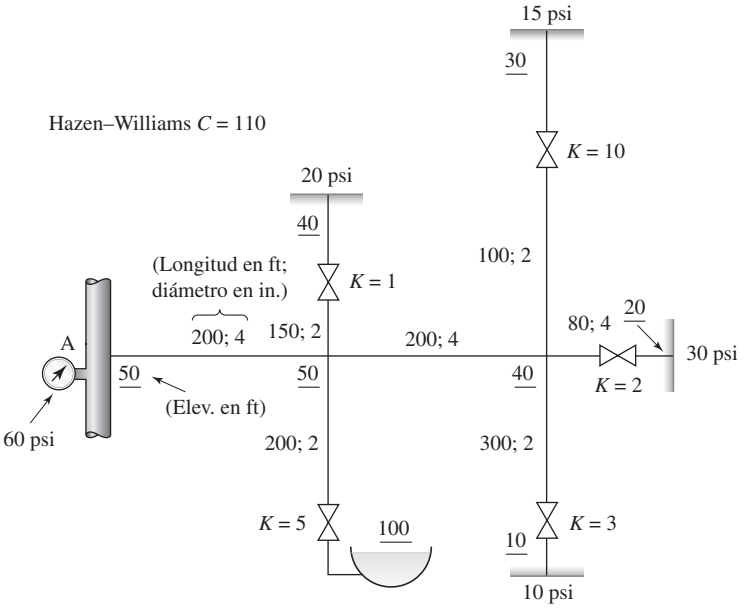


Fig. P11.39

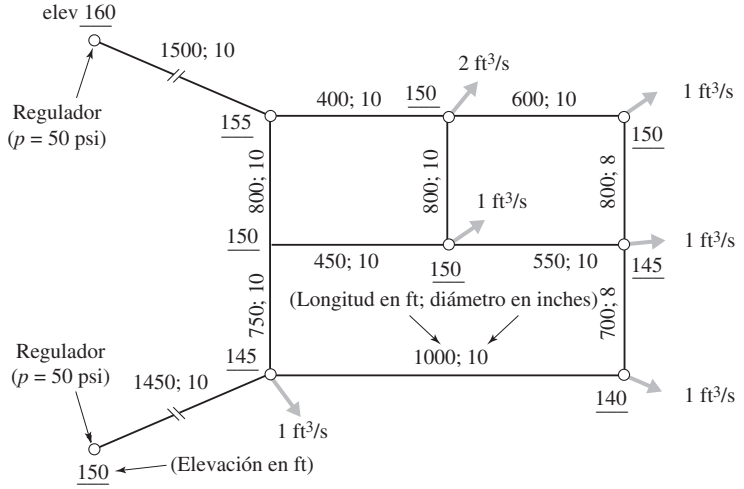


Fig. P11.40

11.41 Determine la distribución del flujo para el sistema de 14 tuberías para suministro de agua, que se muestra en la figura P11.41. La curva característica para la bomba está representada por los siguientes datos (cortesía de D. Wood):

H_P(m)	166	132	18
Q (L/s)	0	600	1000

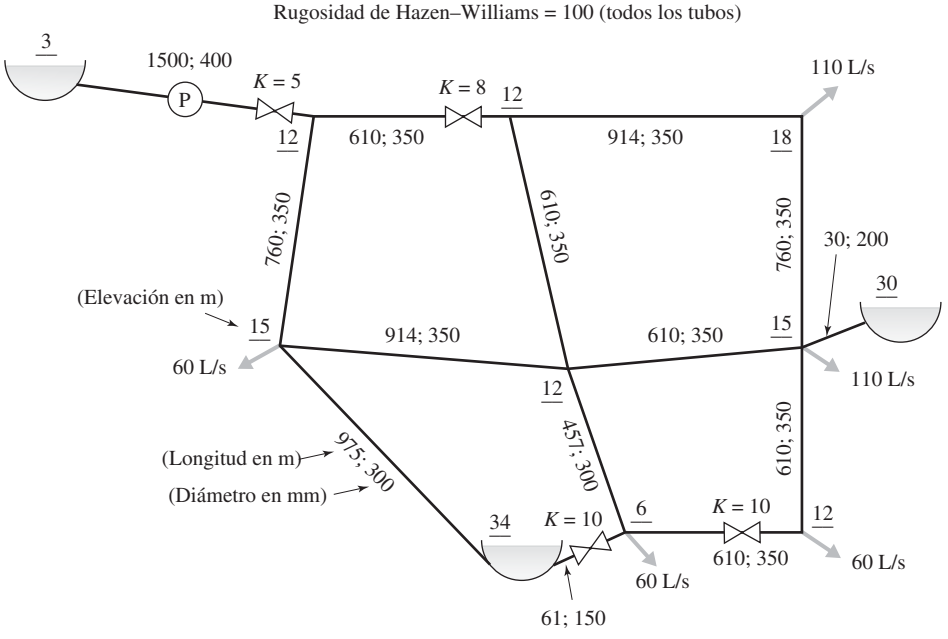


Fig. P11.41

11.42 El esquema de las demandas de agua requeridas para un complejo industrial propuesto se ilustran en la figura P11.42. Diseñe una red apropiada y determine la potencia útil adecuada para una bomba que satisfaga las necesidades de la demanda. Los criterios de diseño son como sigue:

1. El depósito inferior suministra agua al sistema. El depósito superior suministra agua sólo para usos en situaciones de emergencia, por ejemplo, incendios, roturas de tuberías, etc., en condiciones normales, no hay flujo hacia dentro ni hacia fuera de él.
2. En condiciones normales de operación, las presiones en la red pueden variar entre 80 y 120 psi.
3. Dos válvulas de compuerta se van a colocar en cada línea (una en cada extremo) para aislarla en caso de una rotura o por necesidades de mantenimiento.
4. Todas las demandas deben satisfacerse en caso de que se rompa una sola línea, con presiones permisibles mínimas de 20 psi.
5. Los tubos son de hierro colado, con los siguientes diámetros disponibles: 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 30, 36, 42 y 48 pulgadas. Los tubos pueden colocarse en cualquier parte dentro de la región.

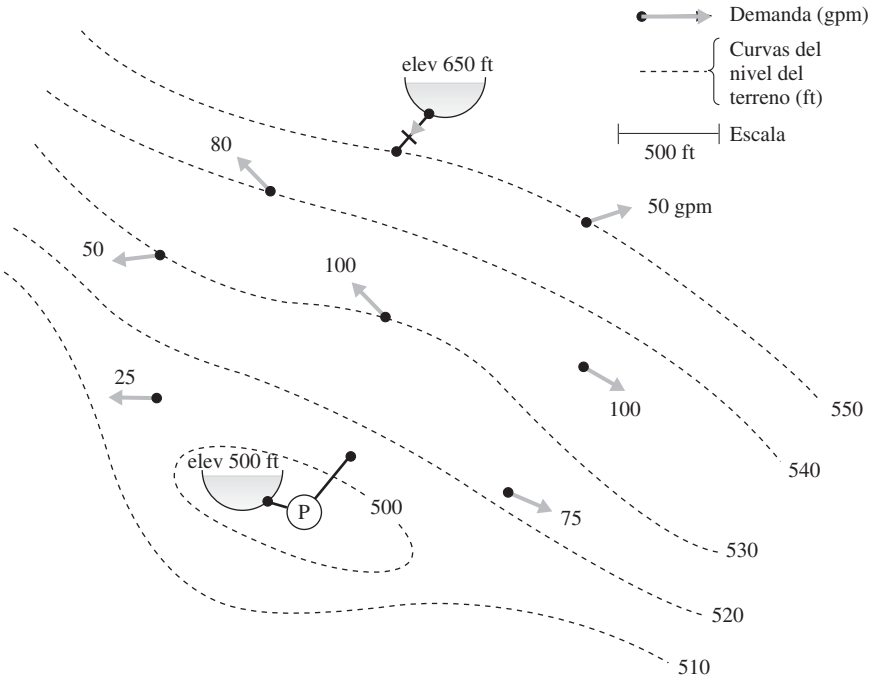


Fig. P11.42

11.43 Diseñe un sistema de irrigación para parte o todo el campo de golf de 18 hoyos que se ilustra en la figura P11.43. Los requerimientos son como sigue:

1. Colocar los acoplamientos para aspersores a intervalos aproximados de 100 ft a lo largo de la línea centro de la calle. El gasto de cada aspersor debe ser de 40 galones/minuto. Un máximo de dos aspersores en cada calle deben estar en operación en cualquier momento.

2. Colocar cuatro aspersores en la periferia de cada *green* (césped bajo y muy cuidado situado alrededor de cada hoyo). El gasto de cada aspersor debe ser de 40 galones/minuto. Un máximo de tres aspersores en cada *green* deben estar en operación en cualquier momento. Como alternativa para especificar el gasto del aspersor, especifique el coeficiente de pérdida a través de cada aspersor (p. ej. pruebe $K_v = 35$), y con pruebas sucesivas, ajústelo hasta alcanzar el gasto deseado.

3. El agua debe bombearse desde el pozo que se muestra. El flujo máximo posible desde el pozo es 2000 galones/minuto. Trabaje con potencia útil para satisfacer la demanda del sistema.

4. La presión del sistema debe ser de 80 ± 10 psi en todas las ubicaciones, y la velocidad de diseño en cada tubo no debe exceder 5 ft/s. Use tubería y accesorios de plástico liso en todo el sistema.

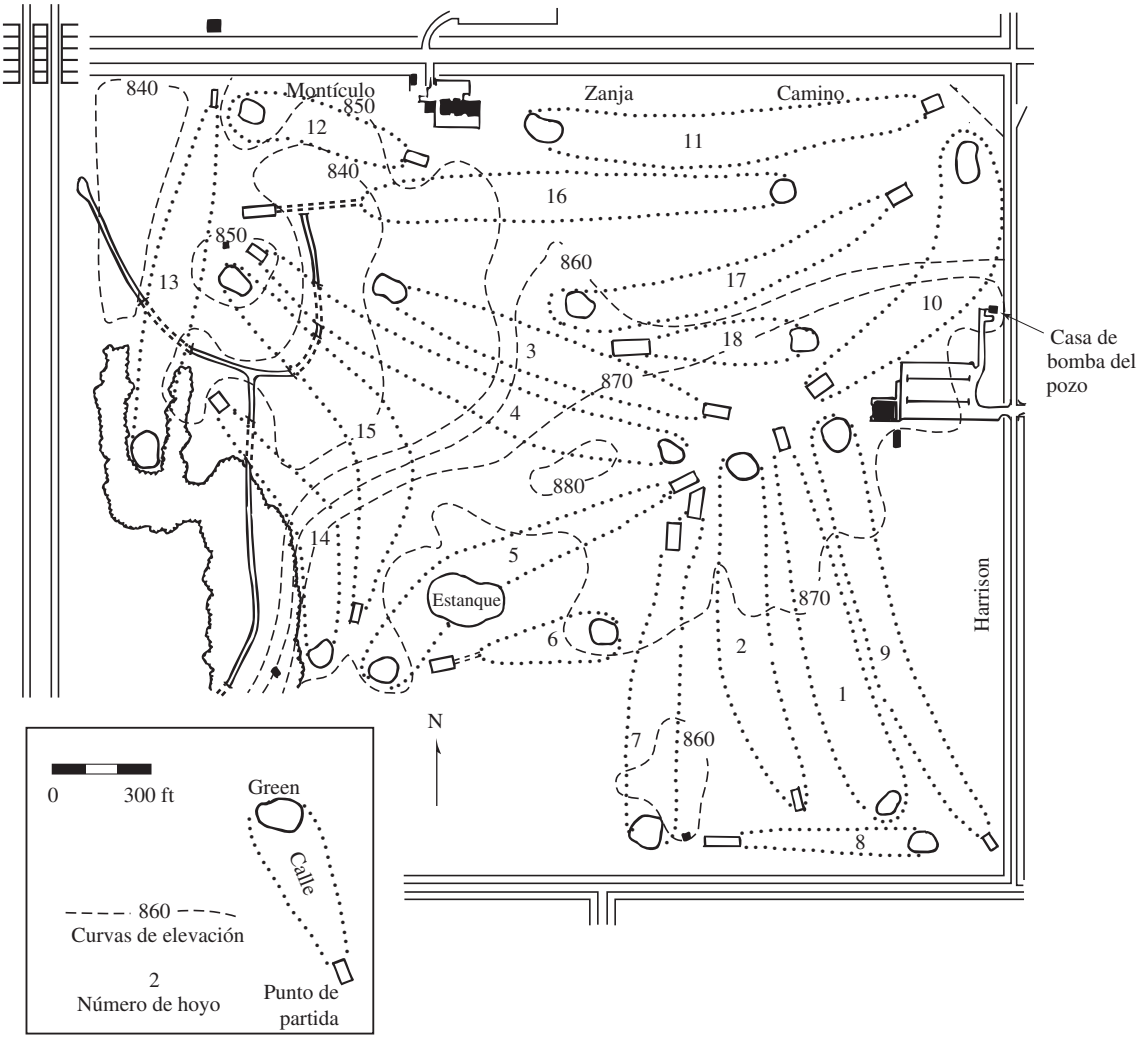


Fig. P11.43

Flujo inestable

11.44 Un sistema de irrigación tiene un tubo de abastecimiento casi horizontal que está conectado a un tanque en un extremo y a una válvula de apertura rápida en el otro. La longitud del tubo es de 2500 m, y su diámetro es 100 mm. Si la elevación del agua en el tanque es 3 m, ¿cuánto tardará el flujo en alcanzar el 99% de la condición de estado permanente si la válvula se abre de pronto desde una posición cerrada? Suponga que el agua es incompresible, que el tubo es inelástico, $f = 0.025$ y $K = 0.15$ una vez que se abra la válvula.

11.45 En el problema 11.44 grafique la velocidad en el tubo como función del tiempo.

11.46 Se suministra gasolina por gravedad a un camión cisterna, sin bombeo, desde un tanque de almacenamiento, a través de un tubo de 800 m de largo y 50 mm de diámetro casi horizontal. Hay una válvula de acción rápida en el extremo del tubo. La diferencia en elevaciones de la gasolina entre el depósito y el camión cisterna es 8 metros. Inicialmente, la válvula está cerrada en forma parcial de modo que $K = 275$. Entonces el operador decide aumentar la descarga al abrir la válvula rápidamente a la posición donde $K = 5$. Suponiendo un fluido incompresible y un sistema de tubería inelástica, determine la nueva descarga de estado permanente y el tiempo que toma alcanzar el 95% de ese valor. Suponga que $f = 0.015$.

11.47 A través de una tubería de 200 mm de diámetro y con una longitud de 800 m fluye agua. La tubería es de hierro colado ($E = 150$ GPa) con un grosor de 12 mm. Se tiene un depósito en el extremo corriente arriba de la tubería y una válvula en el extremo corriente abajo. En condiciones de estado permanente, la descarga es $Q = 0.05$ m^3/s, cuando una válvula en el extremo de la tubería es accionada muy rápidamente de modo que ocurre un ariete hidráulico.

(a) ¿Cuánto tiempo tarda una onda acústica en desplazarse de la válvula al depósito y regresar a la válvula?

(b) Determine el cambio en presión en la válvula si ésta se abre de modo que se duplica la descarga.

(c) Determine el cambio en presión en la válvula si ésta se cierra de modo que la descarga se reduzca a la mitad.

11.48 Cuando opera el sistema descrito en el problema 11.46, el operador decide cerrar repentinamente la válvula una vez que se alcance el flujo de estado permanente. Suponiendo que la gasolina es ligeramente compresible y que la tubería es elástica, determine:

(a) La velocidad de la onda acústica.

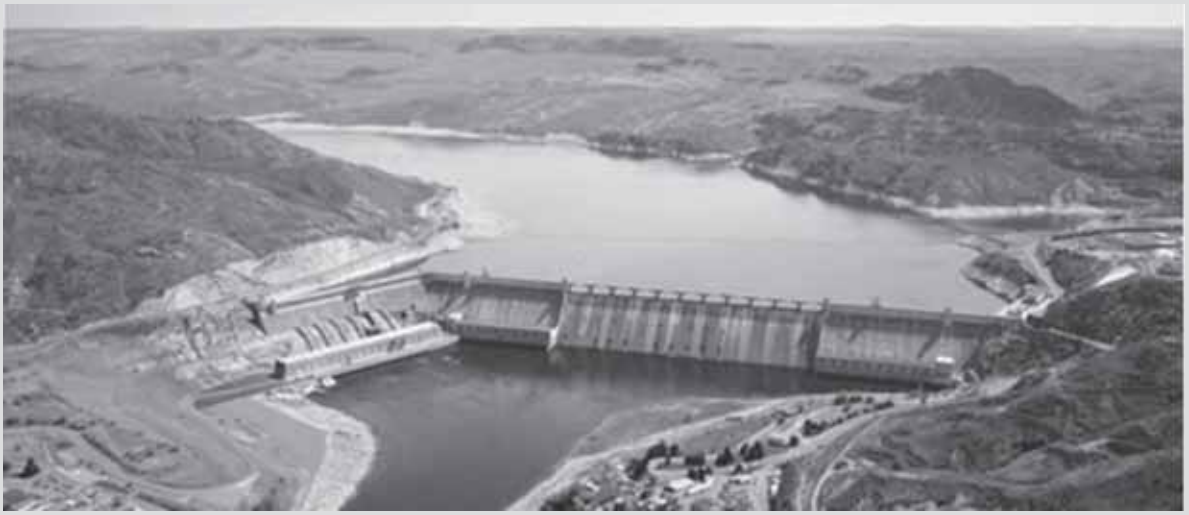
(b) El aumento de presión en la válvula una vez que la válvula sea cerrada repentinamente, de modo que se origine un ariete hidráulico.

(c) Si la presión máxima permisible en el tubo es de 250 kPa, ¿qué se puede concluir acerca del resultado de la actividad del ariete hidráulico (gasolina)? El tubo está hecho de aluminio, $E =$ 70 GPaA, con pared de 2.5 mm de grueso, y el módulo de elasticidad de volumen de la gasolina es $B = 1.05$ GPa.

11.49 Petróleo con una gravedad específica de $S = 0.90$ está fluyendo a 20 ft^3/s por una tubería de 20 pulgadas de diámetro y de 13000 ft de largo. El módulo de elasticidad de la tubería de acero es $E = 29 \times 10^6$ lb/in^2, su grosor es de 0.40 in y el módulo de elasticidad de volumen del petróleo es $B = 217{,}000$ lb/in^2. Una válvula en el extremo corriente abajo de la tubería es cerrada parcialmente en forma muy rápida de modo que se inicia un evento de ariete hidráulico y se propaga una onda de presión corriente arriba. Si la magnitud de la onda no debe pasar de 90 lb/in^2, determine:

(a) El porcentaje de reducción del gasto tolerable durante el cierre de la válvula.

(b) El tiempo que tarda la onda de presión en llegar al extremo corriente arriba del tubo.



La presa Grand Coulee es la mayor productora de energía hidroeléctrica en Estados Unidos, con una capacidad de generación total de 6809 MW. También es parte del Proyecto de la Cuenca del Río Columbia, irrigando más de 242 800 hectáreas, y es la piedra angular para el control del agua en el Río Columbia en Estados Unidos. La tercera fase, que se muestra a la izquierda, se terminó en 1978, cuenta con turbinas Francis con diámetros del rotor de 9.7 m, operando a una carga de 87 metros y con una potencia de salida de 820 MW. (Cortesía de Voith Hydro)

12

Turbomaquinaria

Esquema

12.1 Introducción
12.2 Turbobombas
  12.2.1 Bombas de flujo radial
  12.2.2 Bombas de flujo axial y mixto
  12.2.3 Cavitación en turbomáquinas
12.3 Análisis y similitud dimensional para turbomaquinaria
  12.3.1 Coeficientes adimensionales
  12.3.2 Reglas de similitud
  12.3.3 Velocidad específica
12.4 Uso de turbobombas en sistemas de tuberías
  12.4.1 Adaptación de bombas a la demanda de un sistema
  12.4.2 Bombas en paralelo y en serie
  12.4.3 Bombas de etapas múltiples
12.5 Turbinas
  12.5.1 Turbinas de reacción
  12.5.2 Turbinas de impulso
  12.5.3 Selección y operación de turbinas
12.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Desarrollar la teoría fundamental de las bombas usando el principio del momento de la cantidad de movimiento
- Describir el flujo radial, el flujo mixto y las bombas de flujo axial, incluyendo la presentación de datos prototipo y la desviación de las condiciones ideales
- Introducir coeficientes adimensionales de bombas y mostrar cómo se usan en conjunto con las reglas de similitud, para desarrollar datos para el diseño y análisis de turbomaquinaria
- Demostrar cómo se incorporan las bombas en el diseño y análisis de tuberías
- Presentar material introductorio sobre turbinas: teoría básica, tipos de turbinas y su selección y operación en conjunto con sistemas de tuberías

12.1 INTRODUCCIÓN

Las turbomáquinas son dispositivos que por lo general suministran o extraen energía de un fluido en movimiento por medio de hélices o álabes giratorios. Una turbobomba, más comúnmente llamada bomba, agrega energía a un sistema, con el resultado de que incrementa la presión; también hace que haya flujo o que se aumente el caudal. Una turbina extrae energía de un sistema y la convierte en alguna otra forma útil, generalmente en energía eléctrica. Las bombas son componentes esenciales de sistemas de tuberías que están diseñados para transportar líquidos. Del mismo modo, las turbomáquinas reciben el nombre de sopladores, ventiladores o compresores cuando realizan trabajo en aire u otros gases en conductos. Una hidroturbina, o simplemente una turbina, es una máquina que genera energía eléctrica a partir de agua a alta presión; conductos o túneles relativamente grandes suministran fluido a turbinas cerradas para generar energía eléctrica. Las turbinas de vapor y aire también son de considerable importancia en la ingeniería, pero estos equipos se estudian en otros cursos, por ejemplo en termodinámica.

Los ejemplos aquí citados son los de turbomáquinas diseñados para facilitar o utilizar flujos internos. Una turbina eólica, por otra parte, hace uso del flujo externo circundante para convertir la energía contenida en el movimiento natural del aire atmosférico en energía eléctrica útil. Como se ilustra en la sección 4.5.4, una hélice realiza trabajo en el fluido circundante para proporcionar empuje e impulsar un objeto a lo largo de una trayectoria deseada, mientras que un ventilador estacionario realiza trabajo para hacer circular aire. Todas las turbomáquinas se caracterizan por ser capaces ya sea de agregar o de sustraer energía del fluido por medio de hélices o álabes giratorios. No hay volumen contenido de fluido que se transporte, como en una bomba de pistón de desplazamiento positivo.

La mayor parte de este capítulo está dedicada a las bombas, en particular a aquellas que transportan líquidos como agua o gasolina. La bomba centrífuga o de flujo radial se presenta en detalle y, en menor grado, se estudian las bombas de flujo mixto y de flujo axial. A continuación se presenta el análisis dimensional, una importante herramienta para la selección y diseño de turbomáquinas, seguido de una exposición de la correcta selección e implementación de bombas en sistemas de tuberías. Por último, introducimos las turbinas al considerar sus características fundamentales.

12.2 TURBOBOMBAS

Turbobomba: *Bomba consistente en dos partes principales que son el impulsor y la caja de la bomba.*

CONCEPTO CLAVE *Los tipos comunes de bombas son las de flujo radial, flujo mixto y flujo axial.*

Una **turbobomba** consta de dos partes principales: un *impulsor*, que imparte un movimiento rotatorio al líquido, y la *carcasa* o *caja*, que dirige el líquido hacia la región del impulsor y lo transporta a través del sistema a una presión mayor. La figura 12.1 muestra una *bomba de flujo radial* de succión simple común. El impulsor está montado en un eje y con frecuencia es propulsado por un motor eléctrico. La caja incluye las toberas de succión y descarga y alberga el conjunto del impulsor. La parte de la caja que rodea al impulsor se denomina *voluta*. A través de la tobera de succión entra líquido al ojo del impulsor y se mueve a lo largo de la *tolva*, desarrollando un movimiento rotatorio debido a los álabes del impulsor. Sale de la caja de la voluta periféricamente a una presión mayor a través de la tobera de descarga. Algunos impulsores de aspiración simple están abiertos, ya que se les ha quitado la tolva del frente. A los impulsores de aspiración doble les entra líquido desde ambos lados.

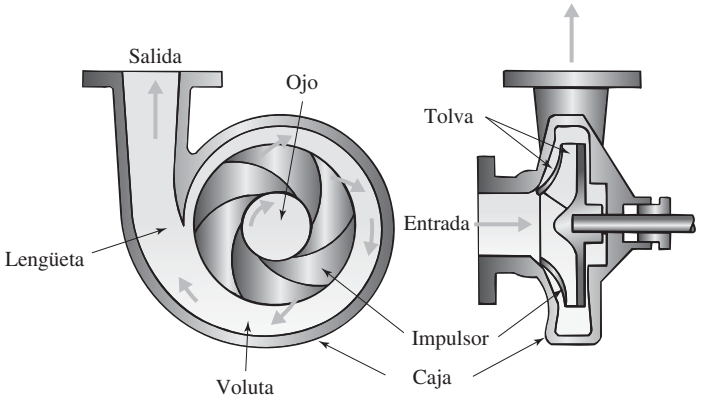


Fig. 12.1 Bomba de succión simple.

En una bomba de flujo radial, los álabes del impulsor están curvados hacia atrás y el impulsor es relativamente angosto. Conforme el impulsor se ensancha, los álabes tienen una doble curvatura, torciéndose en el extremo de succión. Estas bombas impulsan líquidos con una elevación de presión menor que las bombas de flujo radial y se denominan *bombas de flujo mixto.* En el extremo opuesto de la bomba de flujo radial está la *bomba de flujo axial,* caracterizada por el flujo que entra y sale axialmente de la región del impulsor, paralelo a la línea centro del eje. Por lo general, una bomba de flujo axial suministra líquido con un aumento de presión relativamente bajo. En las bombas de flujo axial, y en algunas de flujo mixto, los impulsores están abiertos; esto es, no hay tolva que los cubra. En la figura 12.2 se ilustran varios tipos de impulsores.

12.2.1 Bombas de flujo radial

CONCEPTO CLAVE *Una bomba de flujo radial, o centrífuga, está diseñada para suministrar una descarga relativamente baja a una carga alta.*

Una bomba de flujo radial representativa se ilustra en la figura 12.1; este tipo de bomba suele recibir el nombre de *bomba centrífuga* y es la bomba de uso más generalizado hoy en día. Haremos un análisis elemental de una bomba de flujo radial, que dará una relación teórica entre la descarga y el aumento de carga desarrollado. Además, expondremos una mejor idea de la forma en que tiene lugar el intercambio de la cantidad de movimiento en una turbomáquina. Las bombas reales operan a eficiencias menores que la unidad, es decir, no operan en las condiciones teóricas idealizadas. Es necesario, por tanto, realizar experimentos para que puedan determinarse las verdaderas características de operación de una turbobomba.

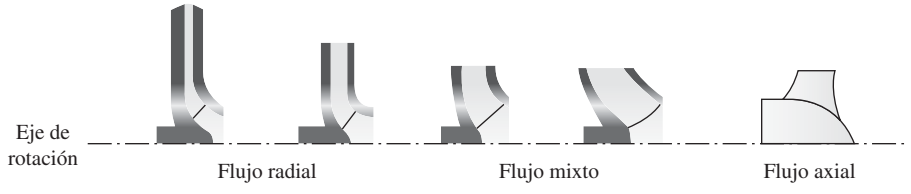


Fig. 12.2 Varios tipos de impulsores de bombas.

Teoría elemental. Los patrones de flujo reales en una turbobomba son altamente tridimensionales teniendo lugar importantes efectos viscosos y patrones de separación. Para elaborar una teoría simplificada para una bomba de flujo radial, es necesario hacer caso omiso de la viscosidad y suponer un flujo bidimensional idealizado en toda la región del impulsor. La figura 12.3a define un volumen de control que comprende la región del impulsor. El flujo entra a través de la superficie de control de entrada y sale a través de la superficie de salida. Observe que existe una serie de álabes dentro del volumen de control, y que están girando alrededor del eje con una velocidad angular ω.

Una parte del volumen de control se muestra en un cierto instante en la figura 12.3b. Los vectores velocidad idealizados están diagramados a la entrada, ubicación 1, y a la salida, ubicación 2. En los diagramas de velocidad, V es la velocidad absoluta del fluido, V_t es la componente tangencial de V, y V_n es la componente radial, o normal, de V. La velocidad periférica o circunferencial del álabe es $u = \omega r$, donde r es el radio de la superficie de control. El ángulo entre V y u es α. La velocidad del fluido, medida respecto al álabe es v.

Se supone que la velocidad relativa es siempre tangente al álabe; esto es, el fluido es guiado perfectamente a través del volumen de control. El ángulo entre v y u se designa como β; puesto que se supone una guía perfecta a lo largo del álabe, β designa también el ángulo del álabe.

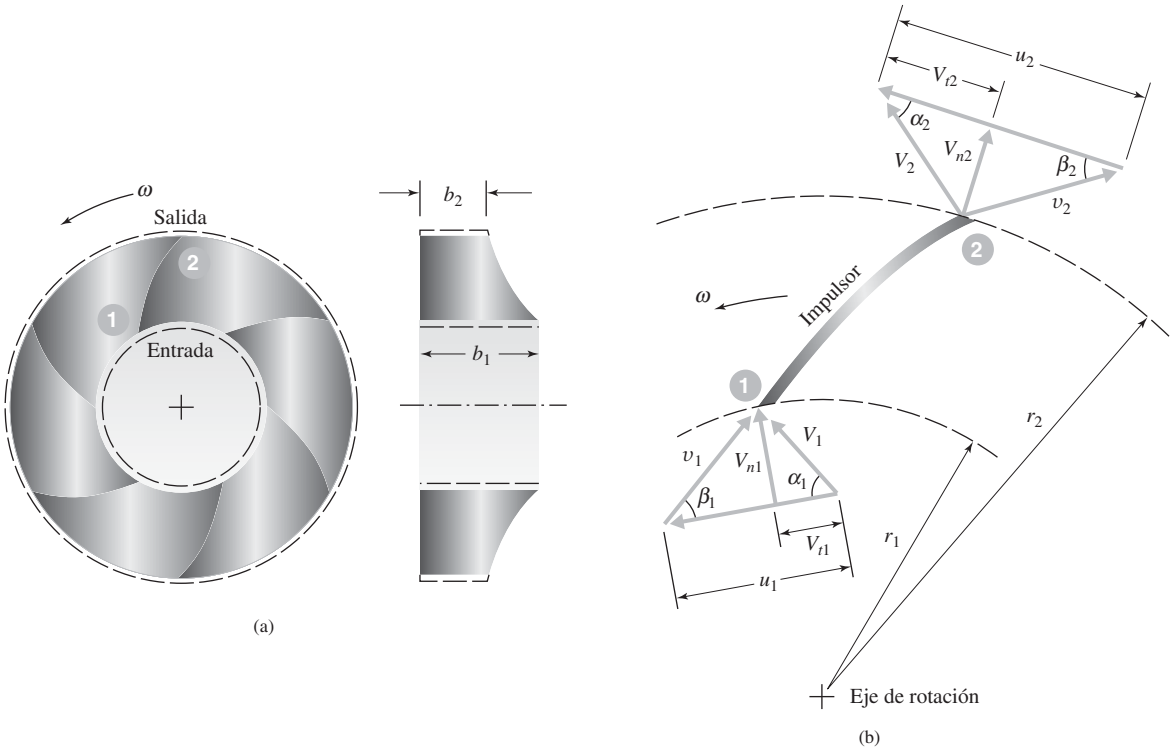


Fig. 12.3 Impulsor de flujo radial idealizado: (a) volumen de control del impulsor; (b) diagramas de velocidad en las superficies de control.

La relación del momento de la cantidad de movimiento, ecuación 4.6.3, puede escribirse para un flujo permanente en la forma

$$\Sigma \mathbf{M} = \int_{\text{s.c.}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \hat{n})\, dA \tag{12.2.1}$$

Aplicada al volumen de control de la figura 12.3, esto se convierte en

$$T = \rho Q(r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \tag{12.2.2}$$

en la que T es el par de torsión actuando sobre el fluido en el volumen de control, y el lado derecho representa el flujo de la cantidad de movimiento angular a través del volumen de control.

La potencia suministrada al fluido es el producto de ω y T:

$$\omega T = \rho Q(u_2 V_{t2} - u_1 V_{t1}) \tag{12.2.3}$$

De los diagramas del vector velocidad en la figura 12.3b, $V_{t1} = V_1 \cos \alpha_1$ y $V_{t2} = V_2 \cos \alpha_2$, de modo que la ecuación 12.2.3 puede escribirse como

$$\omega T = \rho Q(u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1) \tag{12.2.4}$$

Para la situación idealizada en la que no hay pérdidas, la potencia distribuida debe ser igual a $\gamma Q H_t$, en la que H_t es el aumento teórico de la carga de presión a través de la bomba (vea la ecuación 4.5.26). Entonces resulta la relación para turbomáquina de Euler,

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{\omega T}{\gamma Q} \\ &= \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1}{g} \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

Puede obtenerse un conocimiento profundo de la naturaleza del flujo a través de la región del impulsor, usando para ello la ecuación 12.2.5. De la ley de cosenos podemos escribir

$$v_1^2 = u_1^2 + V_1^2 - 2u_1 V_1 \cos \alpha_1$$
$$v_2^2 = u_2^2 + V_2^2 - 2u_2 V_2 \cos \alpha_2$$

Éstas pueden sustituirse en la ecuación 12.2.5 para obtener la relación

$$H_t = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{(u_2^2 - u_1^2) - (v_2^2 - v_1^2)}{2g} \tag{12.2.6}$$

El primer término del lado derecho representa la ganancia en energía cinética conforme el fluido pasa a través del impulsor; el segundo término es el aumento en presión a través del impulsor. Esto puede verse si se aplica la ecuación de energía a través del impulsor y se despeja H_t:

$$H_t = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \tag{12.2.7}$$

Si se elimina H_t entre las ecuación 12.2.6 y 12.2.7 resulta la expresión

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2 - u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2 - u_2^2}{2g} = \text{const} \tag{12.2.8}$$

Históricamente esta relación se ha denominado ecuación de Bernoulli en coordenadas rotatorias. Como $z_2 - z_1$ es por lo general mucho menor que $(p_2 - p_1)/\gamma$, puede ser eliminada, y entonces la diferencia de presión es

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\left[(v_1^2 - u_1^2) - (v_2^2 - u_2^2)\right] \tag{12.2.9}$$

Regresando a la ecuación 12.2.5, vemos que un "mejor diseño" para una bomba sería aquel en el que la cantidad de movimiento angular que entra al impulsor es cero, de modo que pueda tener lugar el aumento máximo de presión. Entonces en la figura 12.3b, $\alpha_1 = 90°$, $V_{n1} = V_1$, y la ecuación 12.2.5 se convierte en

$$H_t = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} \tag{12.2.10}$$

De la geometría del triángulo de la figura 12.3, $V_2 \cos \alpha_2 = u_2 - V_{n2} \cot \beta_2$, de modo que la ecuación 12.2.10 toma la forma

$$H_t = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 V_{n2} \cot \beta_2}{g} \tag{12.2.11}$$

Aplicando el principio de continuidad en la región de salida al volumen de control se obtiene la relación

$$V_{n2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \tag{12.2.12}$$

en la que b_2 es el ancho del impulsor en la ubicación 2. Introduciendo la ecuación 12.2.12 en la ecuación 12.2.11, y recordando que $u_2 = \omega r_2$, tenemos la relación

$$H_t = \frac{\omega^2 r_2^2}{g} - \frac{\omega \cot \beta_2}{2\pi b_2 g} Q \tag{12.2.13}$$

Para una bomba que opera a velocidad constante, la ecuación 12.2.13 toma la forma

$$H_t = a_0 - a_1 Q \tag{12.2.14}$$

en la que a_0 y a1 son constantes. La ecuación 12.2.13 es la *curva de carga teórica* y se ve que es una recta con pendiente de $-a_1$, como se muestra en la figura 12.4a. El efecto del ángulo de álabe β_2 se muestra en la figura 12.4b. Un álabe que se curva hacia adelante ($\beta_2 > 90°$) puede ser inestable y causar pulsaciones, donde la bomba oscila en un intento por establecer un punto de operación. Generalmente se prefieren los álabes que se curvan hacia atrás ($\beta_2 < 90°$).

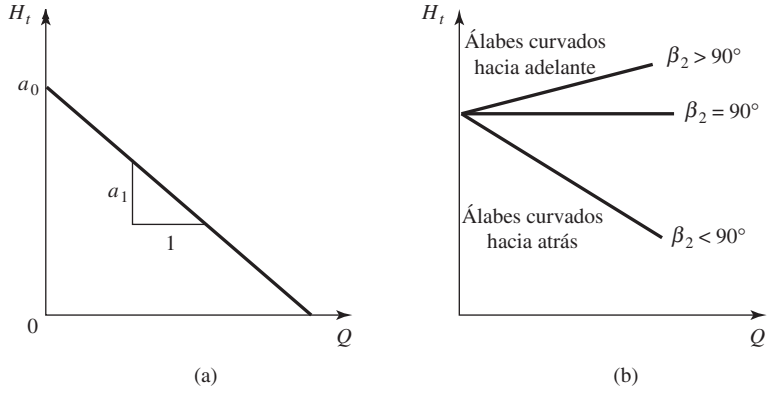


Fig. 12.4 Curvas de operación ideal de una bomba.

Ejemplo 12.1

Una bomba de flujo radial tiene las siguientes dimensiones:

$$\beta_1 = 44° \qquad r_1 = 21 \text{ mm} \qquad b_1 = 11 \text{ mm}$$
$$\beta_2 = 30° \qquad r_2 = 66 \text{ mm} \qquad b_2 = 5 \text{ mm}$$

Para una velocidad rotacional de 2500 rev/min, suponiendo condiciones ideales (flujo sin fricción, espesor insignificante de los álabes, guía perfecta), con $\alpha_1 = 90°$ (sin rotación previa), determine (a) la descarga, la carga teórica, la potencia requerida y el aumento de presión a través del impulsor, y (b) la curva carga-descarga teórica. Use agua como fluido.

Solución

(a) Construya el diagrama de velocidad en la ubicación 1, como se muestra en la figura E12.1a. La velocidad rotacional se expresa en las unidades apropiadas como

$$\omega = 2500 \frac{2\pi}{60} = 261.8 \text{ rad/s}$$

La velocidad del impulsor en r_1 es entonces

$$u_1 = \omega r_1 = 261.8 \times 0.021 = 5.50 \text{ m/s}$$

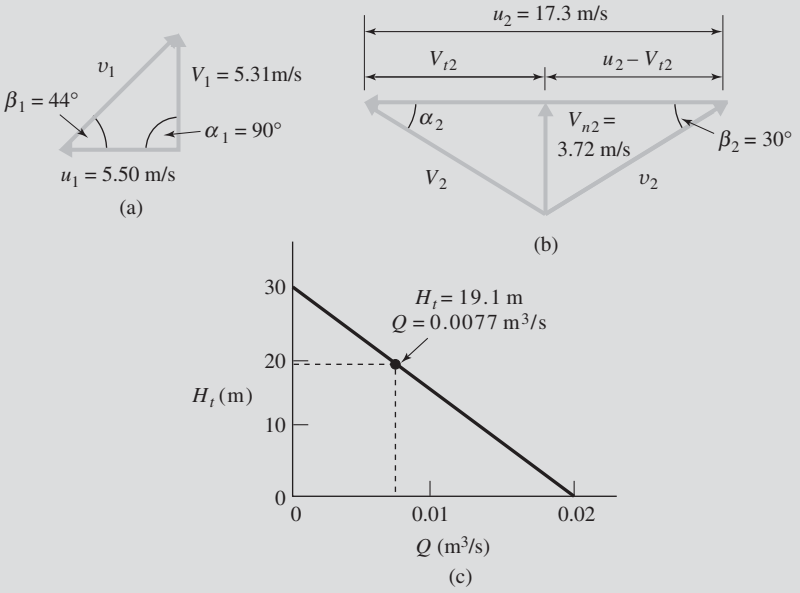


Fig. E12.1

Del diagrama de velocidad vemos que

$$V_1 = u_1 \tan \beta_1 = 5.50 \tan 44° = 5.31 \text{ m/s}$$

y como $\alpha_1 = 90°$, $V_1 = V_{n1}$, o $V_{n1} = 5.31$ m/s. Se calcula que la descarga es

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi r_1 b_1 V_{n1} \\ &= 2\pi \times 0.021 \times 0.011 \times 5.31 = 7.71 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

La componente normal de la velocidad en la ubicación 2 es

$$V_{n2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = \frac{7.71 \times 10^{-3}}{2\pi \times 0.066 \times 0.005} = 3.72 \text{ m/s}$$

y la velocidad del impulsor a la salida es

$$u_2 = \omega r_2 = 261.8 \times 0.066 = 17.28 \text{ m/s}$$

El diagrama de velocidad en la ubicación 2 se traza ahora como se muestra en la figura E12.1b. Del diagrama de velocidad vemos que

$$u_2 - V_{t2} = \frac{V_{n2}}{\tan \beta_2} = \frac{3.72}{\tan 30^\circ} = 6.44 \text{ m/s}$$

Por lo tanto

$$V_{t2} = u_2 - 6.44 = 17.28 - 6.44 = 10.84 \text{ m/s}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \frac{V_{n2}}{V_{t2}} = \tan^{-1} \frac{3.72}{10.84} = 18.9^\circ$$

$$V_2 = \frac{V_{t2}}{\cos \alpha_2} = \frac{10.84}{\cos 18.9^\circ} = 11.46 \text{ m/s}$$

La carga teórica se calcula con la ecuación 12.2.10:

$$H_t = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} = \frac{17.28 \times 11.46 \times \cos 18.9^\circ}{9.81} = 19.1 \text{ m}$$

Por tanto, la potencia eléctrica teórica requerida es

$$\dot{W}_p = \gamma Q H_t = 9810 \times (7.71 \times 10^{-3}) \times 19.1 = 1440 \text{ W}$$

El aumento de presión se determina a partir de la ecuación de energía como sigue:

$$p_2 - p_1 = \left(H_t + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \right) \gamma$$

$$= \left[19.1 + \frac{(5.31)^2 - (11.46)^2}{2 \times 9.81} \right] \times 9810 = 1.36 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(b) La curva carga-descarga teórica es la ecuación 12.2.13. Para el presente ejemplo tenemos

$$H_t = \frac{(\omega r_2)^2}{g} - \frac{\omega \cot \beta_2}{2\pi b_2 g} Q$$

$$= \frac{(261.8 \times 0.066)^2}{9.81} - \frac{261.8 \cot 30^\circ}{2\pi \times 0.005 \times 9.81} Q$$

$$= 30.4 - 1471Q$$

La curva se muestra en la figura E12.1c.

Relaciones de carga-descarga: Curvas de operación. Para un flujo de fluido real, la curva de carga teórica no puede alcanzarse en la práctica, y es necesario recurrir a experimentación para determinar la curva carga-descarga real. La ecuación de energía escrita a través de una bomba desde el lado de succión (ubicación 1, figura 12.3) hasta el lado de la descarga (ubicación 2) es

$$H_P = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_2 - \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_1 = H_t - h_L \tag{12.2.15}$$

en la que H_P es la carga real a través de la bomba, y h_L representa las pérdidas a través de la bomba. La potencia real suministrada al fluido, designada como $\dot{W}_f$ es

$$\dot{W}_f = \gamma Q H_P \tag{12.2.16}$$

Potencia al freno: *Potencia suministrada al impulsor.*

en tanto que la potencia suministrada al impulsor es $\dot{W}_P$, que con frecuencia se denomina **potencia al freno** y está dada por

$$\dot{W}_P = \omega T \tag{12.2.17}$$

Si no hubiera pérdidas, $\dot{W}_f$ sería igual a $\dot{W}_P$. Dado que en realidad $\dot{W}_f < \dot{W}_P$, la *eficiencia de la bomba*[1] η_P se define como

$$\eta_P = \frac{\dot{W}_f}{\dot{W}_P} = \frac{\gamma Q H_P}{\omega T} \tag{12.2.18}$$

Un objetivo del diseño de bombas es hacer que la eficiencia sea tan alta como sea posible. La curva de la carga teórica se compara con la curva de la carga real en la figura 12.5. La diferencia entre las dos puede atribuirse a los siguientes efectos: (1) rotación previa del fluido antes de entrar a la región del impulsor, (2) separación debida a una guía imperfecta del fluido cuando éste entra a la región del impulsor, y (3) separación debida a la expansión en los pasajes de flujo. Fugas y altas velocidades de cortante creadas por las diferencias en velocidad entre partículas de fluido en la voluta y el impulsor contribuyen aún más a las pérdidas. Por último, los álabes del impulsor están diseñados para ser más eficientes en la llamada descarga de diseño; en cualquier otra descarga, es decir, "fuera de diseño", el rendimiento se deteriora.

[1]Con más precisión, η_P definida por la ecuación 12.2.18 se denomina *eficiencia global*. Es posible definir tres eficiencias adicionales para las bombas como sigue:

Eficiencia hidráulica: $\eta_H = \dfrac{H_P}{H_t}$

Eficiencia volumétrica: $\eta_V = \dfrac{Q}{Q + Q_L}$, $Q_L =$ caudal de fugas

Eficiencia mecánica: $\eta_M = \dfrac{\gamma H_t (Q + Q_L)}{T\omega}$

Éstas están relacionadas con la eficiencia global mediante $\eta_P = \eta_H \, \eta_V \, \eta_M$.

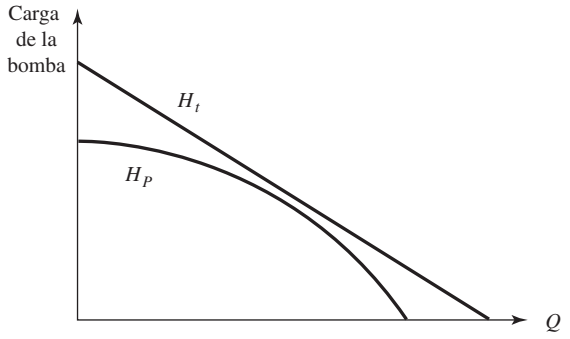


Fig. 12.5 Comparación entre curvas de operación teórica y real de una bomba de flujo radial.

Una bomba representativa y su curva de operación se muestran en la figura 12.6; ésta es la curva suministrada por el fabricante de la bomba. Es común que se disponga de más de un diámetro del impulsor; en el diagrama, están representados cuatro impulsores diferentes. Además de las curvas de operación de carga-descarga, por lo general también se suministran curvas de isoeficiencia, potencia y *carga de succión neta positiva* (*NPSH*). La carga de succión neta positiva está asociada con un interés en la cavitación y se estudia en la sección 12.2.3.

12.2.2 Bombas de flujo axial y mixto

CONCEPTO CLAVE *Una bomba de flujo axial produce descargas relativamente grandes con cargas bajas.*

El diagrama de velocidad para una bomba de flujo axial se muestra en la figura 12.7. En la bomba de flujo axial, no hay flujo radial y las partículas de líquido dejan de tener contacto con el impulsor al mismo radio al que entran, de modo que $u_1 = u_2 = u$. Además, suponiendo un flujo uniforme, consideraciones de continuidad dan $V_{n1} = V_{n2} = V_n$. La ecuación 12.2.5, que es válida para una bomba de flujo axial así como para una bomba de flujo radial, puede combinarse con las identidades $V_2 \cos \alpha_2 = u - V_n \cot \beta_2$ y $V_1 \cos \alpha_1 = V_n \cot \alpha_1$ para producir

$$H_t = \frac{u^2}{g} - \frac{uV_n}{g}(\cot \alpha_1 + \cot \beta_2) \tag{12.2.19}$$

Esta forma de la relación para una turbomáquina es útil cuando el ángulo de entrada de velocidad absoluta α_1 ideal se establece por un álabe fijo, o estator. Si no hay rotación previa, $\alpha_1 = 90°$ y la relación de carga teórica, ecuación 12.2.19, se convierte en

$$H_t = \frac{u^2}{g} - \frac{uV_n \cot \beta_2}{g} \tag{12.2.20}$$

Esta relación es idéntica a la ecuación 12.2.11, que relaciona la carga teórica con los parámetros de salida del impulsor para una bomba de flujo radial. Observe, no obstante, que la ecuación 12.2.11 es válida para la periferia del impulsor para la bomba de flujo radial, y que todas las partículas de fluido alcanzan la carga máxima en ese

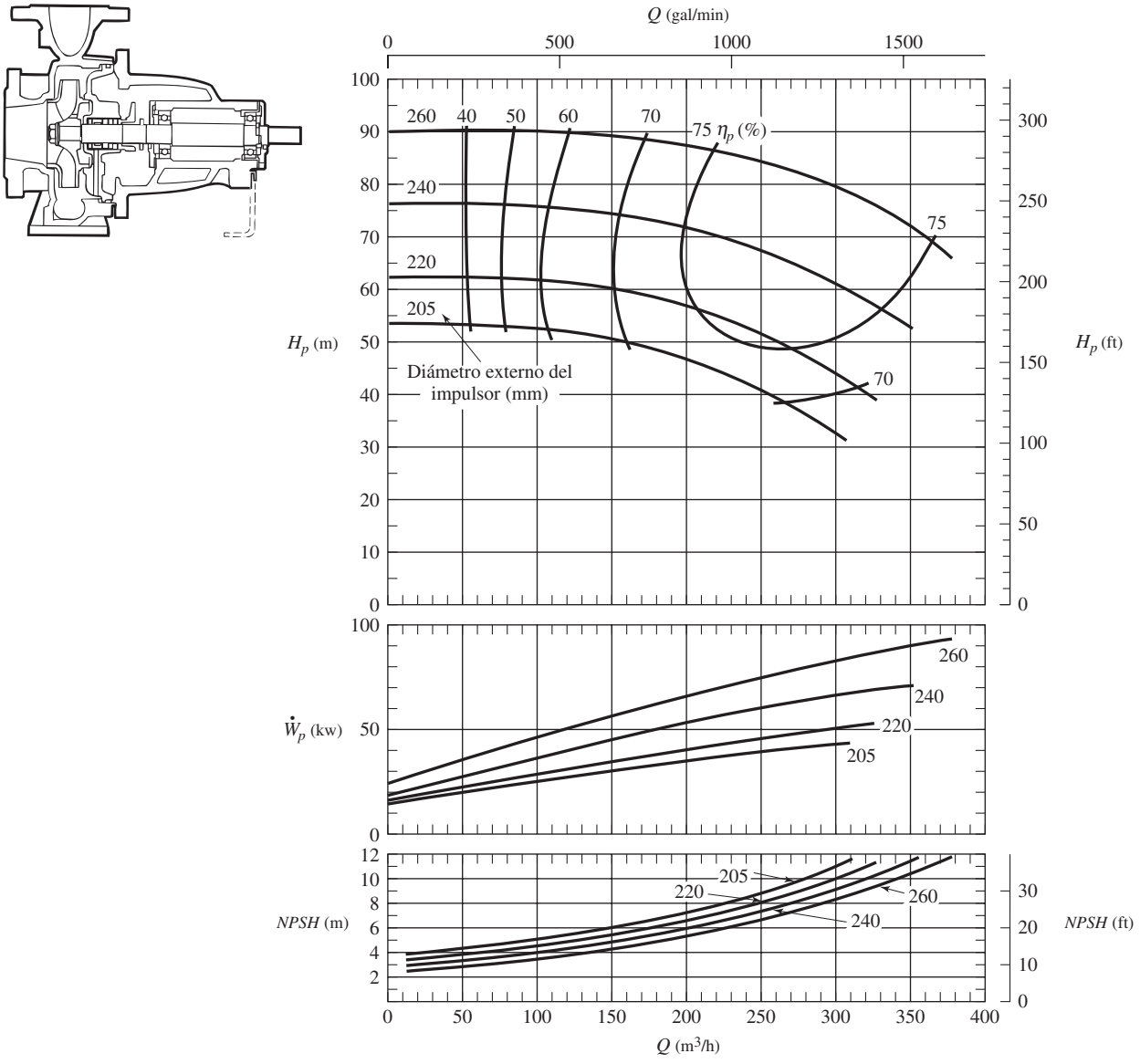


Fig. 12.6 Bomba de flujo radial y curvas de operación para cuatro impulsores diferentes con $N = 2900$ rpm ($\omega = 304$ rad/s). Agua a 20 ºC es el líquido bombeado. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

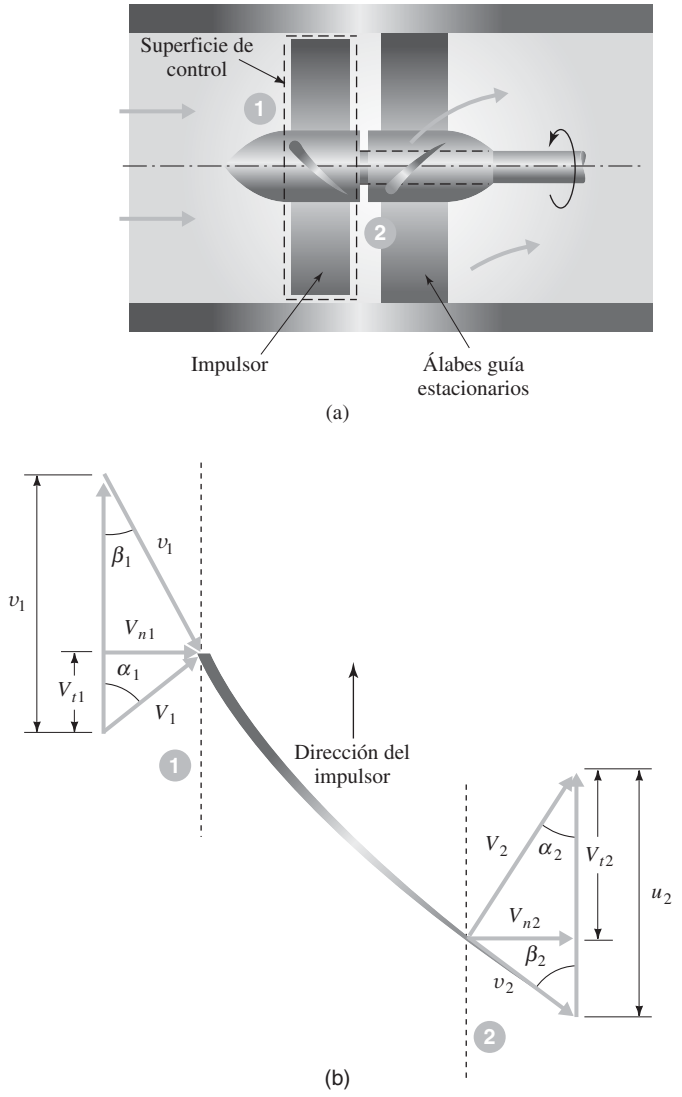


Fig. 12.7 Impulsor de flujo axial idealizado: (a) volumen de control del impulsor; (b) diagramas de velocidad en la superficie de control.

lugar. En contraste, la ecuación 12.2.20 se aplica sólo en un radio especificado para la bomba de flujo axial, dado que las partículas de fluido entran y salen del volumen de control en sus radios respectivos. En este caso la carga varía de un mínimo en el eje a un máximo en la periferia, y la carga total de la bomba es un promedio integrado. Los impulsores de flujo axial están diseñados para mantener una velocidad axial constante en toda la región del impulsor; esto requiere que los ángulos de los álabes aumenten gradualmente de la periferia al eje, así como de la entrada a la región de la salida. La figura 12.8 muestra una bomba de flujo axial representativa, y sus curvas de operación.

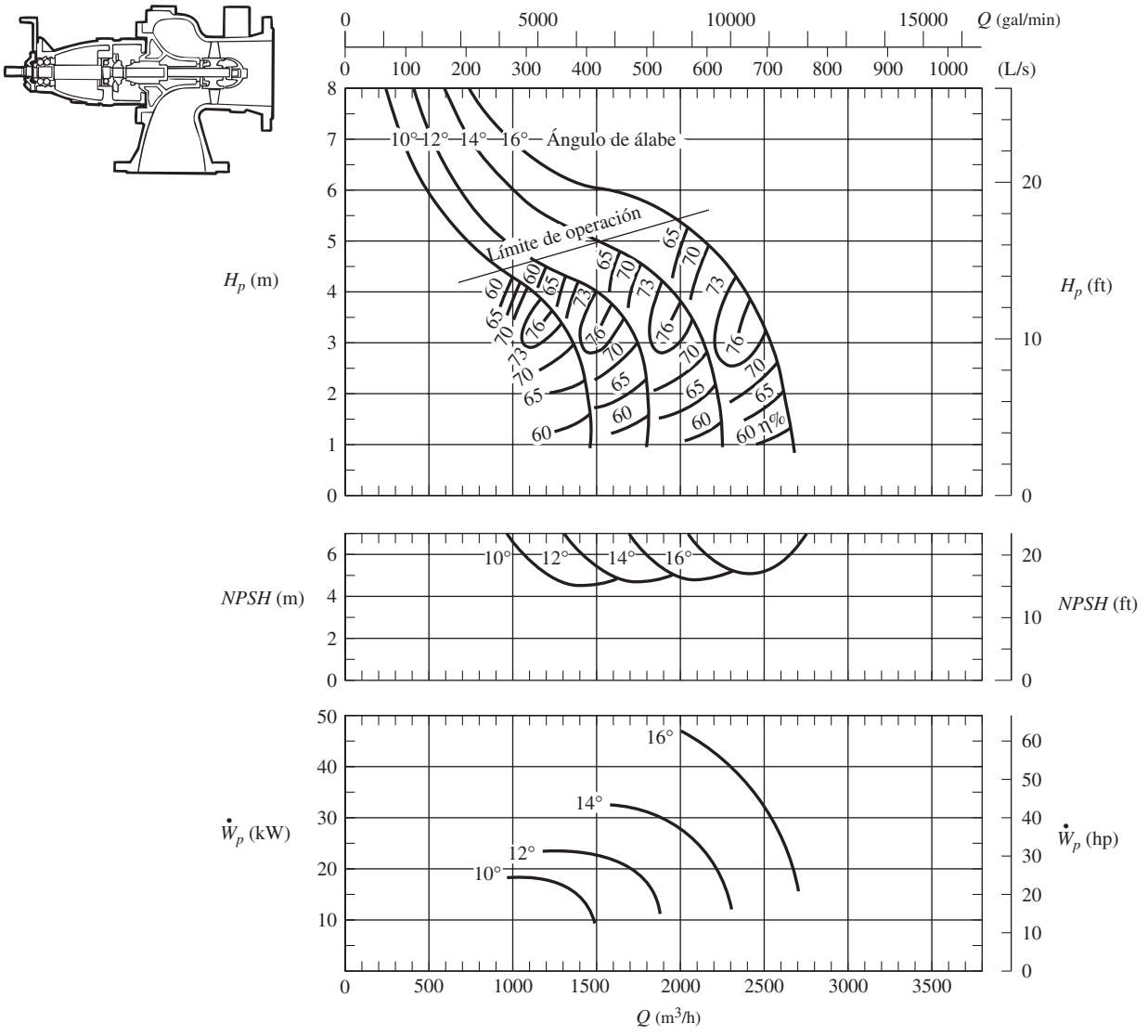


Fig. 12.8 Bomba de flujo axial y curvas de operación para cuatro ángulos de álabe diferentes con $N = 880$ rpm ($\omega = 92.2$ rad/s). El diámetro del impulsor es de 500 mm. Agua a 20 °C es el líquido bombeado. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

Generalmente, el flujo en la región de un impulsor está formado por dos componentes: el movimiento circular semejante a un vórtice y que se debe a la acción de los álabes, y el flujo neto a través del impulsor. El movimiento semejante al de un vórtice se superpone sobre el flujo radial hacia fuera en una bomba de flujo radial, y sobre el flujo axial en una bomba de flujo axial. La acción de la bomba de flujo mixto está entre estos dos tipos. Las exposiciones previas respecto a bombas de flujo radial y flujo axial corresponden también a bombas de flujo mixto. Una bomba de flujo mixto y sus curvas características se ilustran en la figura 12.9.

CONCEPTO CLAVE *Una bomba de flujo mixto suministra cargas y descargas entre las bombas de flujo radial y las de flujo axial.*

Como en el caso para una bomba de flujo radial, las características de operación de las bombas de flujo axial y de flujo mixto se desvían de las consideraciones idealizadas. En general, las bombas de flujo radial están diseñadas para suministrar descargas relativamente bajas a cargas altas, y las bombas de flujo axial producen descargas relativamente grandes a cargas bajas. Las bombas de flujo mixto suministran cargas y descargas entre estos dos extremos. Un método para seleccionar una bomba apropiada según las consideraciones de diseño requeridas se presenta en la sección 12.4.

Ejemplo 12.2

Una bomba de flujo axial está diseñada con una paleta guía, o álabe de estator fijo, localizado corriente arriba del impulsor. El estator imparte un ángulo $\alpha_1 = 75°$ al fluido cuando éste entra a la región del impulsor. El impulsor tiene una velocidad rotacional de 500 rpm con un ángulo de salida del álabe de $\beta_2 = 70°$. El volumen de control tiene un diámetro externo de $D_o = 300$ mm y un diámetro interno de $D_i = 150$ mm. Determine el aumento de carga teórico y la potencia requerida si han de bombearse 150 L/s de líquido ($S = 0.85$).

Solución

Primero, la componente normal de la velocidad V_n es

$$V_n = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(\pi/4)(D_o^2 - D_i^2)} = \frac{0.15}{(\pi/4)(0.3^2 - 0.15^2)} = 2.83 \text{ m/s}$$

La velocidad periférica u del impulsor está basada en un radio promedio:

$$u \simeq \omega \frac{D_o + D_i}{4} = 500 \left(\frac{2\pi}{60}\right) \frac{0.3 + 0.15}{4} = 5.89 \text{ m/s}$$

La carga teórica H_t se calcula con la ecuación 12.2.19 y es

$$H_t = \frac{u}{g}[u - V_n(\cot \alpha_1 + \cot \beta_2)] = \frac{5.89}{9.81}[5.89 - 2.83(\cot 75° + \cot 70°)] = 2.46 \text{ m}$$

Por último, para las condiciones ideales supuestas, la potencia requerida es

$$\dot{W}_P = \gamma Q H_t = (9810 \times 0.85) \times 0.15 \times 2.46 = 3080 \text{ W} \quad \text{o} \quad 3.1 \text{ kW}$$

12.2.3 Cavitación en turbomáquinas

La **cavitación** se refiere a condiciones en ciertos lugares dentro una turbomáquina donde la presión local baja hasta la presión de vapor del líquido y, como consecuencia, se forman cavidades llenas de vapor. Conforme las cavidades son transportadas a través de la turbomáquina a regiones de mayor presión, se colapsan con gran rapidez y generan presiones localizadas extremadamente altas. Esas burbujas que

Cavitación: *Condición donde la presión local baja hasta la presión de vapor del líquido, formando cavidades llenas de vapor.*

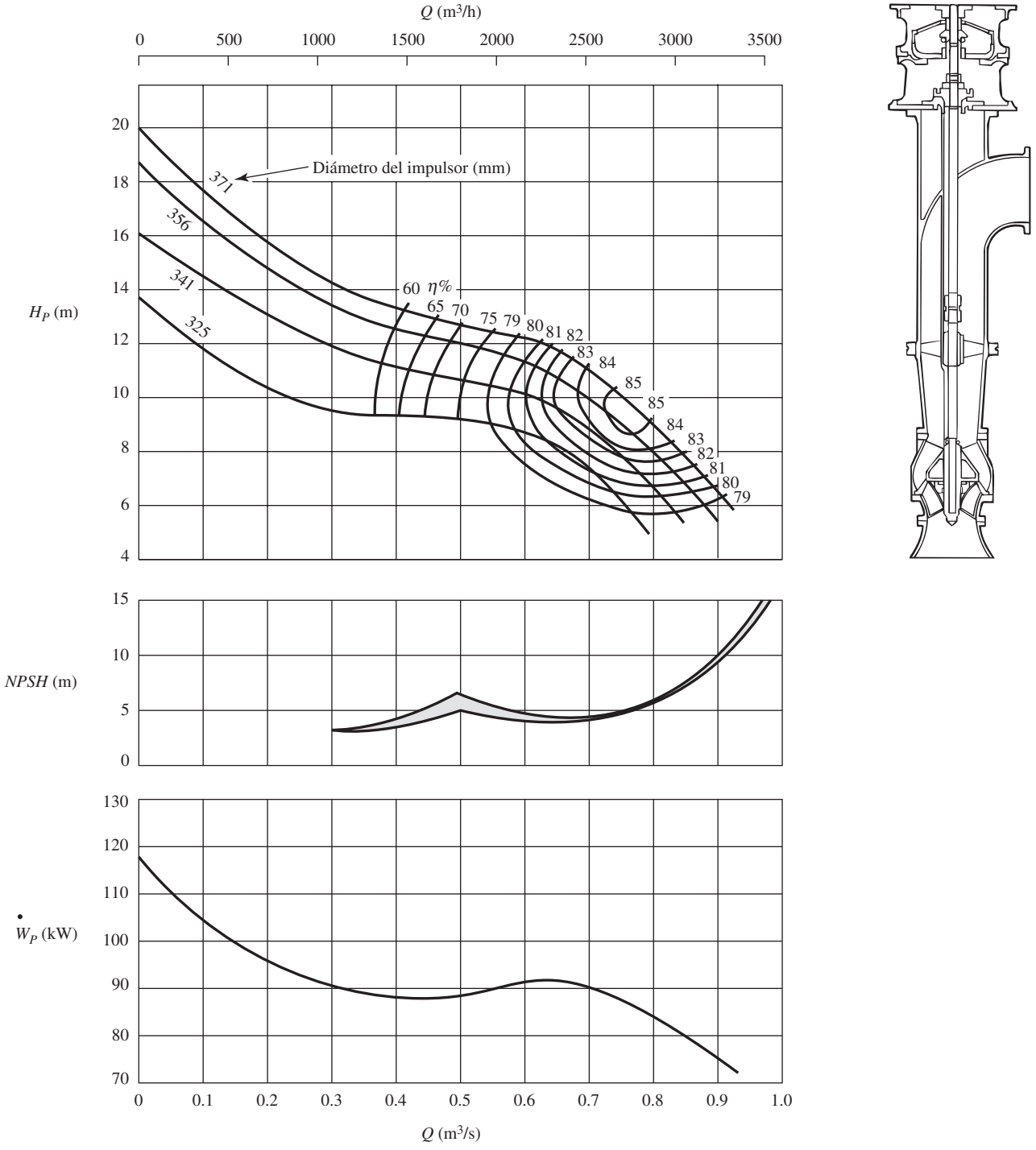


Fig. 12.9 Bomba de flujo mixto y curvas de operación para cuatro impulsores y ángulos de álabe diferentes $N = 970$ rpm ($\omega = 102$ rad/s). Agua a 20 °C es el líquido bombeado. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

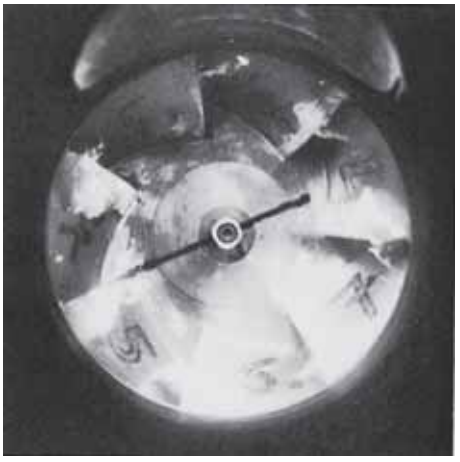


Fig. 12.10 Distribución de burbujas de cavitación en la región de un impulsor. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

se colapsan cerca de límites sólidos pueden debilitar la superficie sólida y, después de repetidos colapsos, pueden ocurrir picaduras, erosión y fatiga de la superficie. Las señales de cavitación en turbobombas son ruido, vibraciones y descenso en las curvas carga-descarga y de eficiencia. Las regiones más susceptibles a daños en una turbomáquina son aquellas que están ligeramente fuera de las zonas de baja presión en el lado posterior de los impulsores (vea la figura 12.10). En general, los cambios repentinos en dirección, los aumentos súbitos en área, y la falta de perfilado son las causas de daños por cavitación en turbomáquinas (Karassik *et al.*, 1986).

El diseño apropiado de turbomáquinas ha reducido al mínimo la posibilidad de que ocurran cavitaciones. Sin embargo, ante condiciones adversas de operación, las presiones disminuyen y puede ocurrir cavitación. Se usan dos parámetros para designar el potencial para que ocurra cavitación: el número de cavitación y la carga de succión neta positiva. Su interrelación y uso se estudian a continuación.

Considere una bomba que opera en la forma mostrada en la figura 12.11. La ubicación 1 está en la superficie del líquido en el lado de succión, y la ubicación 2 es el punto de mínima presión dentro de la bomba. Al escribir la ecuación de energía de la ubicación 1 a la ubicación 2 y utilizar un nivel de referencia de presión absoluta resulta en

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_{\text{atm}} - p_2}{\gamma} - \Delta z - h_L \tag{12.2.21}$$

en la que h_L es la pérdida entre la ubicación 1 y la ubicación 2, $\Delta z = z_2 - z_1$, y la energía cinética en la ubicación 1 se supone insignificante. La presión mínima permisible en la ubicación 2 es la presión de vapor p_v. Sustituyendo esto en la expresión, se puede decir que el lado izquierdo de la ecuación 12.2.21 representa la carga de energía cinética máxima posible en la ubicación 2 cuando la cavitación es inminente. Entonces la *carga de succión neta positiva* (*NPSH*) se define como

$$NPSH = \frac{p_{\text{atm}} - p_v}{\gamma} - \Delta z - h_L \tag{12.2.22}$$

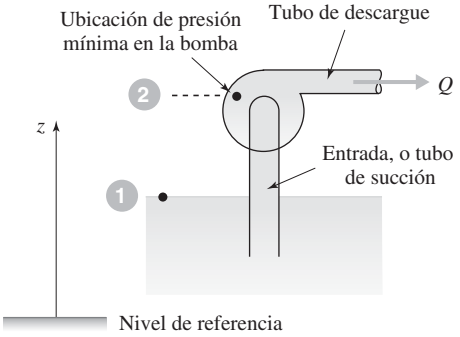


Fig. 12.11 Configuración de cavitación para una bomba.

La *NPSH* también se usa para turbinas, pero el signo del término h_L en la ecuación 12.2.22 cambia y la ubicación 1 se refiere a la superficie del líquido en el lado de succión de la máquina. El requisito de diseño para una bomba se establece entonces como sigue:

$$NPSH \leq \frac{p_{\text{atm}} - p_v}{\gamma} - \Delta z - h_L \tag{12.2.23}$$

Los datos de operación suministrados por los fabricantes de turbomaquinaria por lo general incluyen las curvas *NPSH*; éstas se desarrollan al probar una familia determinada en un ambiente de laboratorio. Las figuras 12.6, 12.8 y 12.9 muestran curvas *NPSH*. La curva *NPSH* hace posible especificar el valor máximo requerido de Δz a usar para una turbomáquina dada; observe que es necesario estimar h_L para obtener esto.

El lado derecho de la ecuación 12.2.22 puede dividirse entre H_P, la carga total a través de la bomba, para obtener

$$\sigma = \frac{1}{H_p}\frac{(p_{\text{atm}} - p_v)}{\gamma} - \Delta z - h_L \tag{12.2.24}$$

en la que σ es el *número de cavitación de Thoma*. Este parámetro se usa como alternativa para la *NPSH* para establecer criterios de diseño para cavitación. Un *número de cavitación crítico*, que indica que una cavitación es inminente, se determina en forma experimental. Entonces, para que no ocurra cavitación, σ debe ser mayor que el número de cavitación crítico. El número de cavitación es en forma adimensional, que se prefiere a la forma dimensional de la *NPSH*.

Ejemplo 12.3

Determine la elevación a la que la bomba de 240 mm de diámetro de la figura 12.6 puede situarse arriba de la superficie del agua del depósito de succión, para que no ocurra cavitación. Agua a 15 ºC se está bombeando a 250 m³/h. Haga caso omiso de pérdidas en el sistema. Use $p_{atm} = 101$ kPa.

Solución

De la figura 12.6, a una descarga de 250 m³/h, la *NPSH* para el impulsor de 240 mm de diámetro es aproximadamente 7.4 m. Para una temperatura del agua de 15 ºC, $p_v = 1666$ Pa absoluta, y $\gamma = 9800$ N/m³. La ecuación 12.2.22 con $h_L = 0$ se utiliza para calcular Δz que es

$$\Delta z = \frac{p_{\text{atm}} - pv}{\gamma} - NPSH - h_L = \frac{101\,000 - 1666}{9800} - 7.4 - 0 = 2.74 \text{ m}$$

Entonces la bomba puede ser colocada aproximadamente a 2.7 m arriba de la superficie de agua del depósito de succión.

12.3 ANÁLISIS Y SIMILITUD DIMENSIONAL PARA TURBOMAQUINARIA

El desarrollo y la utilización de turbomaquinaria en la práctica de ingeniería se han beneficiado en gran medida con la aplicación del análisis dimensional, probablemente mucho más que en cualquier otro campo de la mecánica de fluidos. Ha hecho posible que fabricantes de bombas y turbomáquinas prueben y perfeccionen una variedad relativamente pequeña de turbomáquinas, para producir a continuación una serie de unidades comerciales que comprenden una amplia variedad de demandas de cargas y flujo. El material desarrollado en el capítulo 6, que cubre el análisis de la similitud y el dimensional, se aplica a turbomáquinas en esta sección.

12.3.1 Coeficientes adimensionales

Los siguientes parámetros pueden ser considerados importantes para una turbomáquina: potencia, velocidad de rotación, diámetro externo del impulsor, descarga, cambio de presión a través del impulsor, densidad del fluido y viscosidad del fluido. Éstos se dan en la tabla 12.1 junto con las dimensiones relevantes. En forma funcional, la relación entre estas variables está dada por

$$f(\dot{W}, \omega, D, Q, \Delta p, \rho, \mu) = 0 \tag{12.3.1}$$

Con el uso de ω, ρ y D como variables repetidas, puede deducirse un conjunto de agrupamientos adimensionales convenientes. Éstos se dan como sigue:

$$C_{\dot{W}} = \frac{\dot{W}}{\rho\omega^3 D^5} \quad \textbf{coeficiente de potencia} \tag{12.3.2}$$

$$C_P = \frac{\Delta p}{\rho\omega^2 D^2} \quad \textbf{coeficiente de presión} \tag{12.3.3}$$

$$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3} \quad \textbf{coeficiente de caudal} \tag{12.3.4}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\omega D^2 \rho}{\mu} \quad \textbf{número de Reynolds} \tag{12.3.5}$$

Se acostumbra igualar Δp con γH, donde H representa ya sea el aumento de la carga de presión en el caso de una bomba o la caída de la carga de presión para una turbina. Entonces la ecuación 12.3.3 es sustituida por

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2} \quad \textbf{coeficiente de carga} \tag{12.3.6}$$

Tabla 12.1 Parámetros para turbomaquinaria

Parámetro	*Símbolo*	*Dimensiones*
Potencia	$\dot{W}$	ML^2/T^3
Velocidad rotacional	ω	T^{-1}
Diámetro externo del impulsor	D	L
Descarga	Q	L^3/T
Cambio de presión	Δp	M/LT^2
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad del fluido	μ	M/LT

Otro parámetro adimensional para una bomba puede hallarse al agrupar C_Q, $C_{\dot{W}}$ y C_H para formar la relación

$$\frac{C_Q C_H}{C_{\dot{W}}} = \frac{\gamma Q H}{\dot{W}} = \eta_P \quad \text{(bomba)} \tag{12.3.7}$$

CONCEPTO CLAVE *Los coeficientes de descarga, carga y potencia se usan para formar las curvas de operación adimensionales.*

Por lo tanto, la eficiencia también es un parámetro de similitud. Para una turbina, la agrupación de la eficiencia está dada por

$$\frac{C_{\dot{W}}}{C_Q C_H} = \frac{\dot{W}}{\gamma Q H} = \eta_T \quad \text{(turbina)} \tag{12.3.8}$$

en la que $\dot{W}$ es la potencia de salida.[2]

Las interrelaciones entre parámetros adimensionales se expresan en forma de curvas de operación adimensionales, como se muestra en la figura 12.12[3]; éstas son para la misma turbomáquina como se ilustra en la figura 12.6. Las curvas de operación adimensionales para la bomba de flujo axial de la figura 12.8 y para la bomba de flujo mixto de la figura 12.9 se muestran en las figuras 12.13 y 12.14, respectivamente. Las líneas discontinuas verticales designan las condiciones de operación a máxima o "mejor" eficiencia.

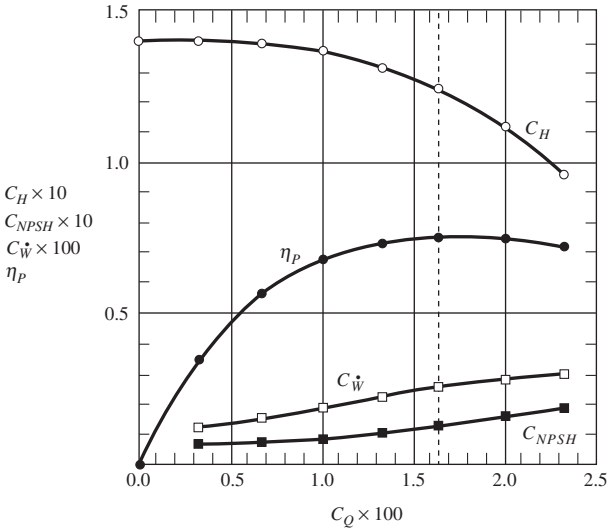


Fig. 12.12 Curvas de operación adimensionales de una bomba de flujo radial para la bomba presentada en la figura 12.6; $D = 240$ mm; $\Omega_P = 0.61$.

Observe que el número de Reynolds no está presente como un parámetro en las figuras 12.12 a 12.14, aun cuando los efectos viscosos son importantes en el flujo en turbomaquinaria. Además del número de Reynolds, podríamos incluir una relación de rugosidad relativa. Se sabe que los efectos viscosos y los de rugosidad alteran el funcionamiento de una bomba; no obstante, debido a las dificultades implicadas, es práctica común no hacer una correlación entre el número de Reynolds, la rugosidad y las pérdidas por la bomba. El régimen de flujo en los pasajes de la bomba suele ser muy turbulento y la rugosidad varía grandemente en bombas diferentes. Además, las pérdidas por fricción pueden no ser tan significativas como las pérdidas debidas a la formación y separación de remolinos causadas por un flujo difuso que se presenta en el impulsor y en la caja. En consecuencia, el efecto del Re suele no estar directamente representado en estudios de similitud. En lugar de ello, se reconocen

[2]En la industria es práctica común utilizar las denominadas *unidades homólogas* en lugar de los coeficientes adimensionales. Las relaciones entre los dos agrupamientos son:

Coeficiente adimensional	C_Q	C_H	$C_{\dot{W}}$
Unidad homóloga	$\frac{Q}{ND^3}$	$\frac{H}{N^2D^2}$	$\frac{\dot{W}}{N^3D^5}$

En las unidades homólogas, la densidad y la aceleración gravitacional se eliminaron y la velocidad rotacional se da en revoluciones por minuto, designada por N. Observe que las unidades homólogas son dimensionales.

[3]En la figura, Ω_P es la velocidad específica, la cual se definirá en la sección 12.3.3.

las dos siguientes características de operación: (1) las bombas más grandes exhiben pérdidas relativamente más pequeñas y eficiencias más altas que las bombas pequeñas de la misma familia, puesto que tienen relaciones de rugosidad y de intersticios más pequeñas; y (2) los líquidos con viscosidad más alta causarán reducciones en la carga y la eficiencia de bombas, así como un aumento en el requerimiento de potencia para una descarga determinada.

Un coeficiente de carga de succión neta positiva, C_{NPSH}, también se presenta en las figuras 12.12 a 12.14. Se forma al sustituir H en la ecuación 12.3.6 con la *NPSH* definida por la ecuación 12.2.22.

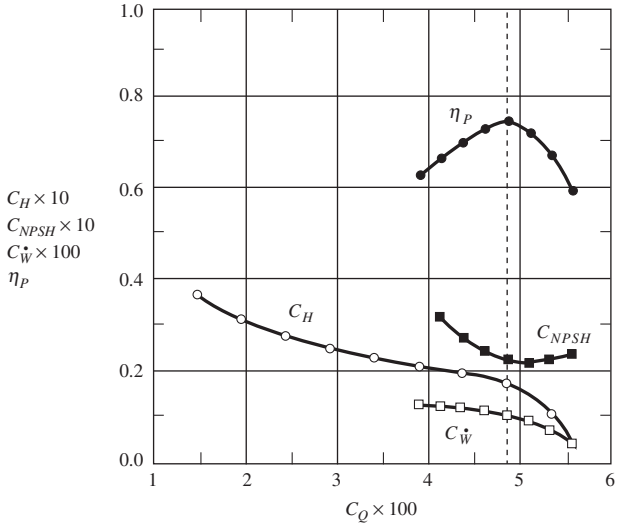


Fig. 12.13 Curva de operación adimensional de la bomba de flujo axial presentada en la figura 12.8; D = 500 mm; ángulo de álabe = 14°; $\Omega_P = 4.5$.

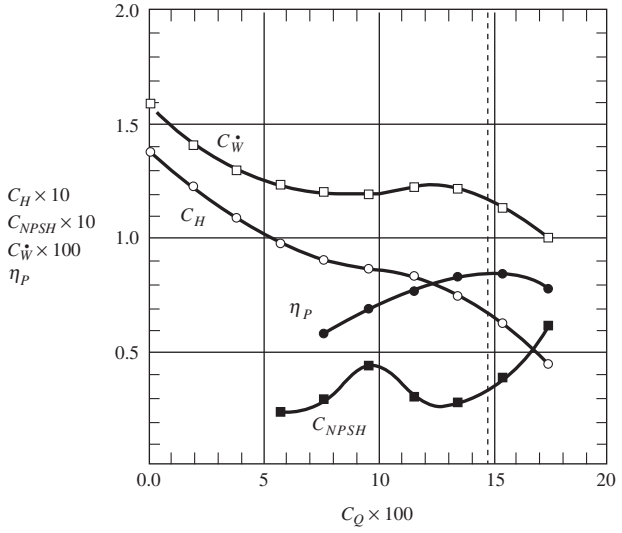


Fig. 12.14 Curva de operación adimensional de la bomba de flujo mixto presentada en la figura 12.9; $D = 371$ mm; $\Omega_P = 3.1$.

Ejemplo 12.4

Determine la velocidad, el tamaño y la potencia requerida para la bomba de flujo axial de la figura 12.13 para suministrar 0.65 m^3/s de agua a una altura de 2.5 m.

Solución

Los datos de la bomba se obtienen de la figura 12.13. Leyendo de la figura encontramos que a la eficiencia de diseño, o máxima, de $\eta_P = 0.75$

$$C_Q = 0.048 \qquad C_H = 0.018 \qquad C_{\dot{W}} = 0.0012$$

Las ecuaciones 12.3.4 y 12.3.6 se usan para determinar las dos incógnitas ω y D. Reacomode la ecuación 12.3.6 para despejar ωD:

$$\omega D = \sqrt{\frac{gH_P}{C_H}} = \sqrt{\frac{9.81 \times 2.5}{0.018}} = 36.9 \text{ m/s}$$

La ecuación 12.3.4 se ha reacomodado para incluir ωD como una cantidad conocida para obtener D:

$$D = \sqrt{\frac{Q}{C_Q \omega D}} = \sqrt{\frac{0.65}{0.048 \times 36.9}} = 0.61 \text{ m}$$

Sustituyendo $D = 0.61$ m en la relación $\omega D = 36.9$, encontramos que

$$\omega = \frac{36.9}{D} = \frac{36.9}{0.61} = 60.5 \text{ rad/s} \qquad \text{o} \qquad 578 \text{ rpm}$$

La densidad para el agua es $\rho = 1000$ kg/m^3. Entonces la potencia para la bomba se determina con el uso de la ecuación 12.3.2:

$$\dot{W}_P = C_{\dot{W}} \rho \omega^3 D^5 = 0.0012 \times 1000 \times 60.5^3 \times 0.61^5 = 2.2 \times 10^4 \text{ W}$$

Por tanto, la velocidad, el tamaño y la potencia necesaria son aproximadamente 580 rpm, 610 mm, y 22 kW, respectivamente.

12.3.2 Reglas de similitud

Si seguimos los principios descritos en el capítulo 6 para la similitud, pueden desarrollarse relaciones de similitud entre dos bombas cualesquiera de la misma familia geométrica. Ellas son:

$$(C_{\dot{W}})_1 = (C_{\dot{W}})_2 \text{ o } \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \tag{12.3.9}$$

$$(C_H)_1 = (C_H)_2 \text{ o } \frac{H_2}{H_1} = \frac{g_1}{g_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \tag{12.3.10}$$

$$(C_Q)_1 = (C_Q)_2 \text{ o } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \tag{12.3.11}$$

CONCEPTO CLAVE *Las reglas de similitud relacionan variables de una familia de turbomáquinas geométricamente similares, o se usan para examinar cambios en variables para una máquina determinada.*

Estas ecuaciones, llamadas *reglas de similitud para turbomaquinaria*, se usan para diseñar o seleccionar una turbomáquina de una familia de unidades geométricamente similares. Otro uso de ellas es examinar los efectos de cambiar la velocidad, el fluido o el tamaño en una unidad determinada. Podrían usarse también para diseñar una bomba para suministrar un flujo en la Luna o en una estación espacial.

Teniendo en cuenta la ecuación 12.3.7, también deberíamos esperar que $\eta_1 = \eta_2$ pero, como ya se indicó antes, las bombas más grandes son más eficientes que las pequeñas de la misma familia geométrica. Una correlación empírica aceptable (Stepanoff, 1957) que relaciona las eficiencias con el tamaño es

$$\frac{1 - (\eta_P)_2}{1 - (\eta_P)_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/4} \tag{12.3.12}$$

Esta relación también puede usarse para turbinas al sustituir η_P con η_T.

Ejemplo 12.5

Determine la curva de operación para la bomba de flujo mixto cuyas curvas características se muestran en la figura 12.14. La descarga requerida es 2.5 m^3/s con la bomba operando a una velocidad de 600 rpm. A la eficiencia de diseño, ¿cuáles son las necesidades de potencia y la *NPSH*? El líquido que se bombea es agua.

Solución

De la figura 12.14 la eficiencia de diseño es $\eta_P = 0.85$ y los valores correspondientes de diseño para los coeficientes son

$$C_Q = 0.15 \qquad C_H = 0.067 \qquad C_{\dot{W}} = 0.0115 \qquad C_{NPSH} = 0.035$$

La velocidad rotacional en radianes por segundo es

$$\omega = 600 \times \frac{\pi}{30} = 62.8 \text{ rad/s}$$

El diámetro de la bomba se calcula con la ecuación 12.3.4:

$$D = \left(\frac{Q}{\omega C_Q}\right)^{1/3} = \left(\frac{2.5}{62.8 \times 0.15}\right)^{1/3} = 0.64 \text{ m}$$

Con las ecuaciones 12.3.2 y 12.3.6 se calculan la potencia requerida y la *NPSH*:

$$\dot{W}_P = \rho\omega^3 D^5 C_{\dot{W}} = 1000 \times 62.8^3 \times 0.64^5 \times 0.0115 = 3.1 \times 10^5 \text{ W}$$

$$NPSH = \frac{\omega^2 D^2}{g} C_{NPSH} = \frac{62.8^2 \times 0.64^2}{9.81} \times 0.035 = 5.8 \text{ m}$$

Por tanto, la potencia requerida es 310 kW y la *NPSH* requerida es 5.8 m. La curva de operación se construye usando las ecuaciones 12.3.10 y 12.3.11:

$$H_2 = \frac{\omega_2^2 D_2^2}{g}(C_H)_1$$
$$= \frac{62.8^2 \times 0.64^2}{9.81}(C_H)_1 = 165(C_H)_1$$

$$Q_2 = \omega_2 D_2^3 (C_Q)_1$$
$$= 62.8 \times 0.64^3 (C_Q)_1 = 16.5(C_Q)_1$$

Los valores de $(C_H)_1$ y $(C_Q)_1$ se leen en la figura 12.14, junto con η_P y se colocan en la tabla que se muestra a continuación. Las columnas 4 y 5 son Q_2 y H_2 calculadas con las ecuaciones de similitud. A la mejor eficiencia, $H_2 = 10.4$ m y $Q_2 = 2.54$ m³/s. La curva característica y la curva de eficiencia se grafican en la figura E12.5.

$(C_Q)_1$	$(C_H)_1$	η_P	$Q_2(m^3/s)$	H_2(m)
0	0.138		0	22.8
0.019	0.123		0.31	20.3
0.039	0.110		0.64	18.2
0.058	0.099		0.96	16.3
0.077	0.091	0.59	1.27	15.0
0.096	0.088	0.70	1.58	14.5
0.116	0.085	0.78	1.91	14.0
0.135	0.076	0.84	2.23	12.5
0.154	0.063	0.85	2.54	10.4
0.174	0.046	0.79	2.87	7.6

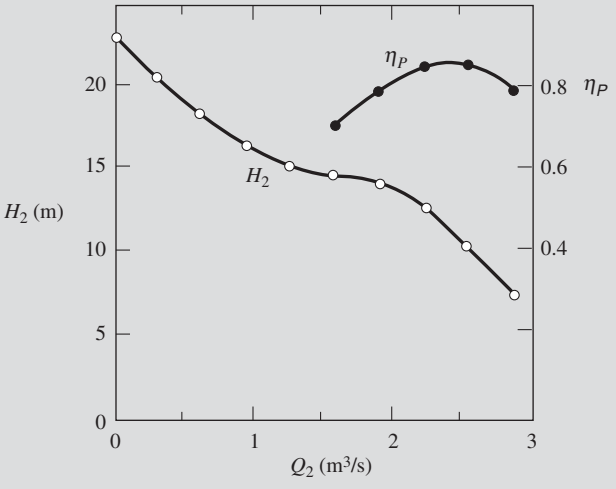


Fig. E12.5

12.3.3 Velocidad específica

Velocidad específica: *Número adimensional que caracteriza una turbomáquina a máxima eficiencia.*

Es posible correlacionar una turbomáquina de una familia determinada con un número adimensional que caracteriza su operación en óptimas condiciones. Dicho número se denomina **velocidad específica**, y se determina en la forma siguiente. La velocidad específica Ω_P de una bomba es un parámetro adimensional asociado con su operación a máxima eficiencia, con ω, Q y H_P conocidas. Se obtiene al eliminar D entre las ecuaciones 12.3.4 y 12.3.6 y expresar la velocidad rotacional ω a la primera potencia:

$$\Omega_P = \frac{C_Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gH_P)^{3/4}} \tag{12.3.13}$$

En la ecuación 12.3.13, ω por lo general está basada en los requerimientos del motor, y los valores de Q y H_P son a máxima eficiencia.

Una selección preliminar de una bomba puede estar basada en la velocidad específica. La figura 12.15 muestra la forma en que la eficiencia máxima y la descarga varían con Ω_P para bombas de flujo radial. La velocidad específica puede correlacionarse con el tipo de impulsor mostrado en la figura 12.2; se da como sigue:

$\Omega_P < 1$	bomba de flujo radial	(12.3.13)
$1 < \Omega_P < 4$	bomba de flujo mixto	
$\Omega_P > 4$	bomba de flujo axial	

Para una turbina, la velocidad específica Ω_T es un parámetro adimensional asociado con una familia determinada de turbinas que opera a máxima eficiencia, con ω, H_T y $\dot{W}_T$ conocidas. El diámetro D se elimina en las ecuaciones 12.3.2 y 12.3.6, y ω se expresa a la primera potencia para obtener

$$\Omega_T = \frac{C_{\dot{W}}^{1/2}}{C_H^{5/4}} = \frac{\omega(\dot{W}_T/\rho)^{1/2}}{(gH_T)^{5/4}} \tag{12.3.15}$$

Una comparación de Ω_T para diferentes turbinas se hará en la sección 12.5.[4]

[4]En lugar de las ecuaciones 12.3.13 y 12.3.15, en la industria es práctica común utilizar velocidades específicas en forma dimensional. De aquí que para una bomba la velocidad dimensional o velocidad específica homóloga es $(N_s)_P = NQ^{1/2}/H^{3/4}$ y para una turbina la velocidad específica homóloga correspondiente es $(N_s)_T = N\dot{W}^{1/2}/H^{5/4}$. Para estas expresiones, Q está en gal/min, ft^3/s o m^3/s, H en ft o m y $\dot{W}$ en caballos de potencia o kW y N en rpm.

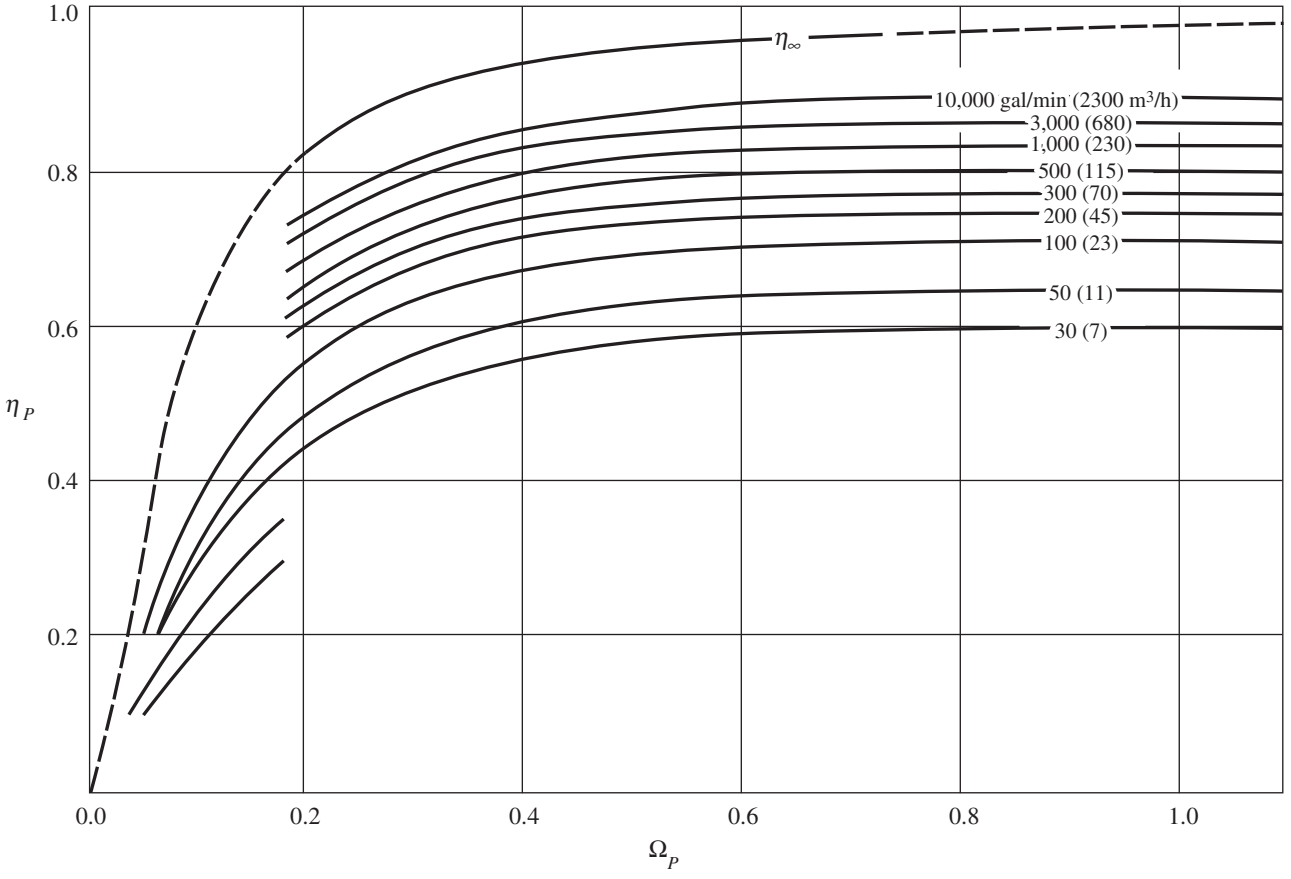


Fig. 12.15 Eficiencia máxima como una función de la velocidad específica y la descarga para bombas de flujo radial. (PUMP HAND-BOOK, 2ND EDITION (DURO) de Karassik. Copyright 1986 by McGraw-Hill Companies, Inc. -Books. Reproducida con permiso de McGraw-Hill Companies, Inc. -Books en el formato Textbook vía Copyright Clearance Center.)

Otra medida de la cavitación es la *velocidad específica de succión, S*. Análoga a la formulación de la velocidad específica de una bomba, la ecuación 13.2.13, la velocidad específica de succión ya sea para una bomba o turbina está dada por

$$S = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gNPSH)^{3/4}} \tag{12.3.16}$$

Aquí, dos unidades geométricamente similares tendrán la misma S cuando operen con el mismo coeficiente de flujo C_Q. Por el contrario, valores iguales de S indican características similares de cavitación cuando las unidades estén operando de modo diferente. Los valores de diseño de S se determinan por experimentación; cuando no haya cavitación, la ecuación 12.3.16 ya no es válida.

Ejemplo 12.6

Seleccione una bomba para suministrar 500 gal/min de agua con un aumento de presión de 65 psi. Suponga una velocidad de rotación que no exceda de 3600 rpm.

Solución

Para estimar la velocidad específica necesitamos lo siguiente:

$$\omega = 3600 \times \frac{\pi}{30} = 377 \text{ rad/s}$$

$$H_P = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{65 \times 144}{1.94 \times 32.2} = 150 \text{ ft}$$

$$Q = \frac{500}{7.48 \times 60} = 1.11 \text{ ft}^3/\text{s}$$

Use las ecuaciones 12.3.13 para hallar que la velocidad específica es

$$\Omega_P = \frac{\omega\sqrt{Q}}{(gH_P)^{3/4}} = \frac{377\sqrt{1.11}}{(32.2 \times 150)^{3/4}} = 0.69$$

De la ecuación 12.3.14, esto podría indicar una bomba de flujo radial. Podría usarse la bomba de la figura 12.12, aun cuando la velocidad específica (0.61) resultaría en una menor eficiencia. Con $\Omega_P \simeq 0.61$ (figura 12.12), la velocidad se estima con la ecuación 12.3.13 como

$$\omega = \frac{\Omega_P(gH_P)^{3/4}}{\sqrt{Q}} = \frac{0.61 \times (32.2 \times 150)^{3/4}}{\sqrt{1.11}} = 335 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la velocidad requerida es $335 \times 30/\pi = 3200$ rpm que no excede de 3600 rpm. El diámetro requerido se determina con el uso de la figura 12.12, donde a eficiencia máxima, $C_Q = 0.0165$. Esto se sustituye en la ecuación 12.3.4 para determinar el diámetro:

$$D = \left(\frac{Q}{C_Q\omega}\right)^{1/3} = \left(\frac{1.11}{0.0165 \times 335}\right)^{1/3} = 0.59 \text{ ft}$$

12.4 USO DE TURBOBOMBAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS

La selección apropiada de una o más bombas para satisfacer las demandas de flujo de un sistema de tuberías requiere, además de una comprensión fundamental de las turbobombas, de un análisis hidráulico de las bombas integradas en el sistema de tuberías. En la sección 7.6.7 se analiza una configuración con una sola tubería y una bomba. En el ejemplo 7.18 se obtiene una curva de demanda del sistema; además, se muestra una solución de prueba para hallar la descarga y la carga requerida de la bomba. La técnica se extiende a sistemas simples en la sección 11.3, en donde se

muestra que se puede emplear ya sea una curva de operación de bomba o suponer una entrada de potencia constante para la bomba. La sección 11.4 trata de redes de tuberías. En esos sistemas, la curva de operación de la bomba se puede representar por una relación polinomial (ecuación 11.4.14) e incorporarse en las ecuaciones de energía linealizadas o, alternativamente, puede emplearse un requerimiento de potencia de la bomba constante (ecuación 11.4.15).

En esta sección vemos con más detalle la forma en la que se seleccionan las bombas. El procedimiento comprende no sólo satisfacer el flujo requerido y los requerimientos de presión para un sistema de tuberías, sino también asegurar que se evite la cavitación y que se seleccione la bomba más eficiente.

12.4.1 Adaptación de bombas a la demanda de un sistema

Considere una sola tubería que contiene una bomba para suministrar un fluido entre dos depósitos. La *curva de demanda del sistema* se define como

$$H_P = (z_2 - z_1) + \left(f\frac{L}{D} + \Sigma K\right)\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{12.4.1}$$

donde se supone que existe presión atmosférica en cada depósito, y los depósitos corriente arriba y corriente abajo están a las elevaciones z_1 y z_2, respectivamente. Observe que z_2 no tiene que ser mayor que z_1, y que el factor de fricción f puede variar conforme varíe la descarga (es decir, el número de Reynolds). El término ΣK representa las pérdidas menores en la tubería, vea la sección 7.6.4. La ecuación 12.4.1 está representada como la curva (a) en la figura 12.16. El primer término al lado derecho es la carga estática y el segundo término es la pérdida de carga debida a la fricción en el tubo y a pérdidas menores. La inclinación de la curva de demanda

CONCEPTO CLAVE *La intersección de la curva de demanda del sistema con la curva carga-descarga de la bomba especifica la carga de operación y la descarga.*

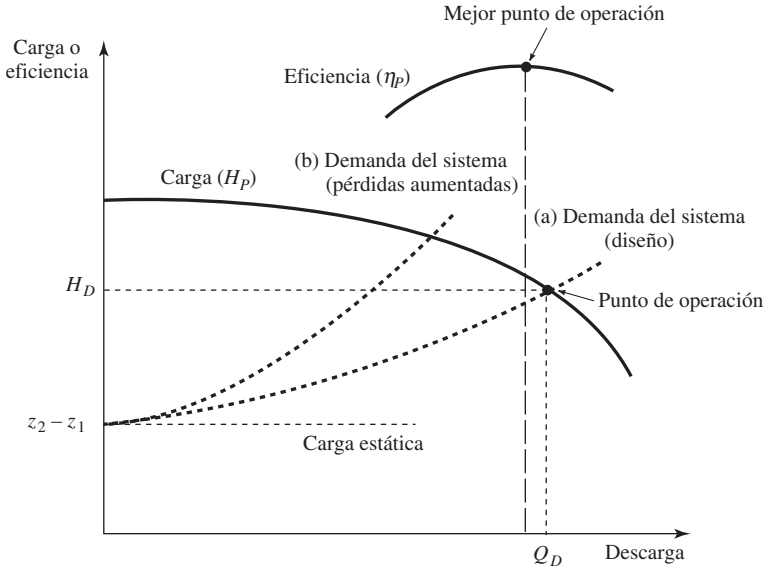


Fig. 12.16 Curva característica de una bomba y curva de demanda del sistema.

depende de la suma de los coeficientes de pérdida en el sistema; cuando los coeficientes de pérdida aumentan, indicados por la curva (b) de la figura 12.16, aumenta la carga de bombeo requerida para una descarga determinada. Los sistemas de tuberías pueden experimentar cambios a corto plazo en la curva de demanda tales como estrangulamiento de válvulas y, a largo plazo, el envejecimiento de los tubos puede hacer que aumenten de manera permanente los coeficientes de pérdida. En cualquiera de estos casos, la curva de demanda del sistema podría cambiar de (a) a (b) como se muestra.

Para una descarga de diseño dada, la ecuación 12.3.14 permite la selección de una bomba con base en la velocidad específica. Una vez determinado el tipo de bomba, se selecciona un tamaño apropiado con base en una curva característica de un fabricante; una curva representativa se ilustra en la figura 12.16. La intersección de la curva característica con la curva de demanda del sistema deseada dará la *carga de diseño* H_D y la *descarga de diseño* Q_D. Es deseable hacer que la intersección ocurra en el punto de máxima eficiencia de la bomba, o cerca este punto, designado como el *mejor punto de operación*.

12.4.2 Bombas en paralelo y en serie

En algunos ejemplos, las instalaciones de bombeo pueden tener una amplia variación en las necesidades de carga o descarga, de modo que una sola bomba no puede satisfacer la variación requerida de las demandas. En estas situaciones, las bombas pueden instalarse ya sea en serie o en paralelo para proporcionar una operación de una forma más eficiente. En este análisis, se supone que las bombas se ponen en un solo lugar con líneas cortas conectando a las unidades separadas.

Donde se requiera de una variación grande en la demanda de flujo, dos o más bombas se instalan en una configuración en paralelo (figura 12.17). Las bombas se energizan individualmente para satisfacer la demanda de flujo requerida; en esta forma, puede obtenerse una operación con una eficiencia más alta. No es necesario tener bombas idénticas, pero las bombas individuales, cuando operen en paralelo, no deben operar en zonas indeseables. Para el bombeo en paralelo, la curva característica combinada se genera al reconocer que la carga a través de cada bomba es idéntica, y que la descarga total a través del sistema de bombeo es ΣQ, la suma de las descargas individuales a través de cada bomba. Observe la existencia de tres

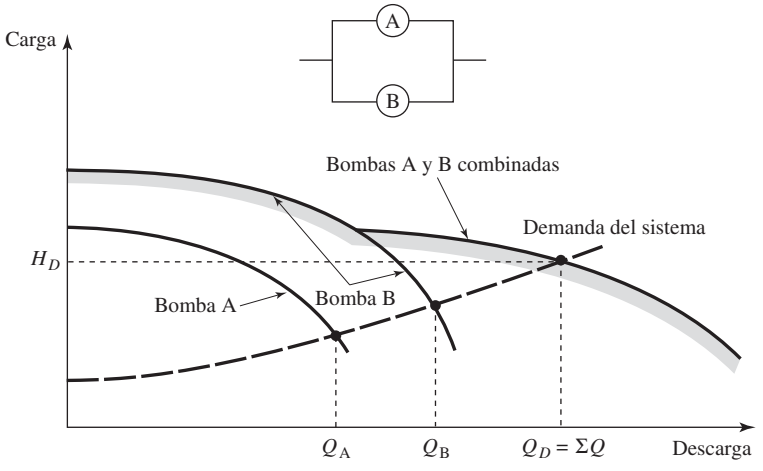


Fig. 12.17 Curvas características para bombas que operan en paralelo.

puntos de operación en la figura 12.17, en la que la bomba A o la bomba B se usan separadamente, o en la cual las bombas A y B están combinadas. Otros puntos de operación de diseño podrían obtenerse al estrangular el flujo o cambiar las velocidades de las bombas. La eficiencia total de las bombas en paralelo es

$$\eta_P = \frac{\gamma H_D \Sigma Q}{\Sigma \dot{W}_P} \tag{12.4.2}$$

en la que $\Sigma \dot{W}_P$ es la suma de la potencia individual requerida para cada bomba.

Para altas demandas de carga, las bombas instaladas en serie producirán un mayor aumento de carga que el de las bombas individuales (figura 12.18). Como la descarga a través de cada bomba es idéntica, la curva característica se encuentra sumando la carga a través de cada bomba. Observe que no es necesario que las dos bombas sean idénticas. En la figura 12.18 la curva de demanda del sistema es tal que la bomba A operando sola no puede suministrar ningún líquido porque su carga de cierre es más baja que la carga del sistema estático. Existen dos puntos de operación, ya sea con la bomba B sola o con las bombas A y B combinadas. La eficiencia total es

$$\eta_P = \frac{\gamma (\Sigma H_P) Q_D}{\Sigma \dot{W}_P} \tag{12.4.3}$$

en la que ΣH_P es la suma de las cargas individuales a través de cada bomba.

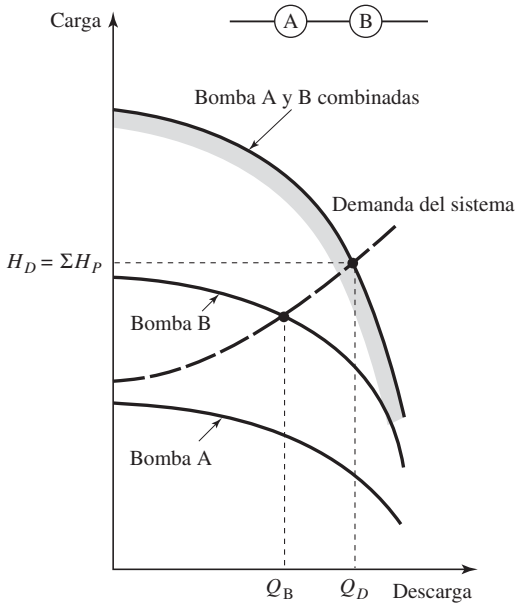


Fig. 12.18 Curvas características para bombas que operan en serie.

Ejemplo 12.7

Se bombea agua entre dos depósitos a través de una tubería con las siguientes características: $D = 300$ mm, $L = 70$ m, $f = 0.025$, $\Sigma K = 2.5$. La curva característica para la bomba de flujo radial es aproximada por la fórmula

$$H_P = 22.9 + 10.7Q - 111Q^2$$

donde H_P está en metros y Q en m³/s.

Determine la descarga Q_D y la carga de bomba H_D para las siguientes situaciones: (a) $z_2 - z_1 = 15$ m, una bomba puesta en operación; (b) $z_2 - z_1 = 15$ m, con dos bombas idénticas operando en paralelo; y (c) el esquema, descarga y carga de la bomba para $z_2 - z_1 = 25$ m.

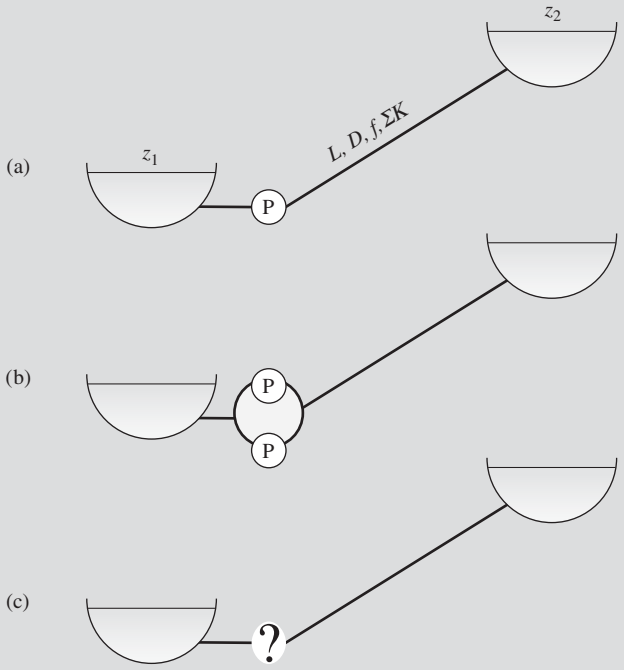


Fig. E12.7

Solución

(a) La curva de demanda del sistema (ecuación 12.4.1) se desarrolla primero:

$$\begin{aligned} H_P &= (z_2 - z_1) + \left(f\frac{L}{D} + \Sigma K\right)\frac{Q^2}{2gA^2} \\ &= 15 + \left(\frac{0.025 \times 70}{0.3} + 2.5\right)\frac{Q^2}{2 \times 9.81(\pi/4 \times 0.3^2)^2} \\ &= 15 + 85Q^2 \end{aligned}$$

Para hallar el punto de operación, iguale la curva característica de la bomba con la curva de demanda del sistema,

$$15 + 85Q_D^2 = 22.9 + 10.7Q_D - 111Q_D^2$$

Reduzca y despeje Q_D:

$$195Q_D^2 - 10.7Q_D - 7.9 = 0$$

$$\therefore Q_D = \frac{1}{2 \times 195}\left[10.7 + \sqrt{10.7^2 + 4 \times 195 \times 7.9}\right] = 0.23 \text{ m}^3/\text{s}$$

Usando la curva de demanda del sistema, H_D se calcula como

$$H_D = 15 + 85 \times 0.23^2 = 19.5 \text{ m}$$

(b) Para dos bombas en paralelo, la curva característica es

$$H_P = 22.9 + 10.7\left(\frac{Q}{2}\right) - 111\left(\frac{Q}{2}\right)^2$$

$$= 22.9 + 5.35Q - 27.75Q^2$$

Iguale esto con la curva de demanda del sistema y despeje Q_D:

$$15 + 85Q_D^2 = 22.9 + 5.35Q_D - 27.75Q_D^2$$

$$112.8Q_D^2 - 5.35Q_D - 7.9 = 0$$

$$\therefore Q_D = \frac{1}{2 \times 112.8}\left[5.35 + \sqrt{5.35^2 + 4 \times 112.8 \times 7.9}\right] = 0.29 \text{ m}^3/\text{s}$$

Se calcula que la carga de diseño es

$$H_D = 15 + 85 \times 0.29^2 = 22.2 \text{ m}$$

(c) Como $z_2 - z_1$ es mayor que la carga de cierre de la bomba sola (es decir, $25 > 22.9$ m), es necesario operar con dos bombas en serie. La curva de las bombas combinadas es

$$H_D = 2(22.9 + 10.7Q - 111Q^2)$$

$$= 45.8 + 21.4Q - 222Q^2$$

La curva de demanda del sistema se cambia porque $z_2 - z_1 = 25$ m. Se convierte en

$$H_D = 25 + 85Q^2$$

Igualando las dos relaciones anteriores y despejando Q_D y H_P resulta en

$$25 + 85Q_D^2 = 45.8 + 21.4Q_D - 222Q_D^2$$

o bien,

$$307Q_D^2 - 21.4Q_D = 20.8 = 0$$

$$\therefore Q_D = \frac{1}{2 \times 307}\left[21.4 + \sqrt{21.4^2 + 4 \times 307 \times 20.8}\right] = 0.30 \text{ m}^3/\text{s}$$

y

$$H_D = 25 + 85 \times 0.30^2 = 32.7 \text{ m}$$

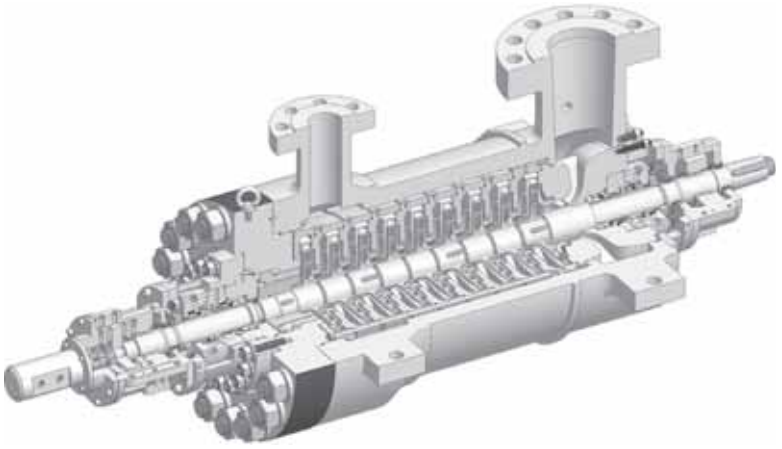


Fig. 12.19 Bomba centrífuga de etapas múltiples. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

12.4.3 Bombas de etapas múltiples

En lugar de colocar varias bombas en serie, se puede disponer de bombas de etapas múltiples (figura 12.19). Básicamente, todos los impulsores están alojados en una sola caja y la salida de una etapa impulsora expulsa hacia el ojo de la siguiente. Estas bombas pueden producir cargas extremadamente altas. Para la bomba que se ilustra en la figura 12.19, el intervalo de la carga de presión es de 1500 a 3400 m, y la descarga puede variar de 4500 m^3/h bajando hasta 260 m^3/h. Pueden seleccionarse hasta ocho etapas y la máxima velocidad es de alrededor de 8000 rpm.

12.5 TURBINAS

CONCEPTO CLAVE *En contraste con las bombas, las turbinas extraen energía útil del agua que fluye en un sistema de tuberías.*

En muchas partes del mundo, donde es posible disponer de suficientes cargas y grandes caudales, se usan hidroturbinas para producir energía eléctrica. En contraste con las bombas, las turbinas extraen energía útil del agua que fluye por un sistema de tuberías. El componente móvil de una turbina recibe el nombre de **rotor**, y está formado por álabes o paletas que se fijan a un eje giratorio. La energía disponible en el líquido se transfiere al eje por medio del rotor giratorio y el par de torsión resultante, transferido por el eje giratorio, puede propulsar un generador eléctrico. Las hidroturbinas varían ampliamente en tamaño y capacidad, que van desde microunidades que generan 5 kW hasta las de grandes instalaciones hidroeléctricas que producen más de 400 MW.

Rotor: *Componente móvil de una turbina.*

Turbina de reacción: *Turbina que usa energía de flujo y energía cinética.*

Turbina de impulso: *La energía de flujo es convertida en energía cinética a través de una tobera antes que el líquido haga impacto con el rotor.*

Existen dos tipos de turbinas. La **turbina de reacción** que utiliza tanto la energía del flujo como la energía cinética del líquido; la conversión de energía tiene lugar en un espacio cerrado a presiones arriba de las condiciones atmosféricas. Las turbinas de reacción pueden subdividirse aún más, de acuerdo con la carga disponible, ya sea como tipo Francis o de propulsor. La **turbina de impulso** requiere que la energía del flujo del líquido sea convertida en energía cinética por medio de una tobera antes que el líquido haga impacto en el rotor; la energía está en forma de un chorro a alta velocidad a la presión atmosférica o cerca de ésta. Las turbinas pueden clasificarse de acuerdo con la velocidad específica de la turbina, como se ilustra en la figura 12.20; la turbina Pelton es un tipo particular de turbina de impulso (vea la sección 12.5.2).

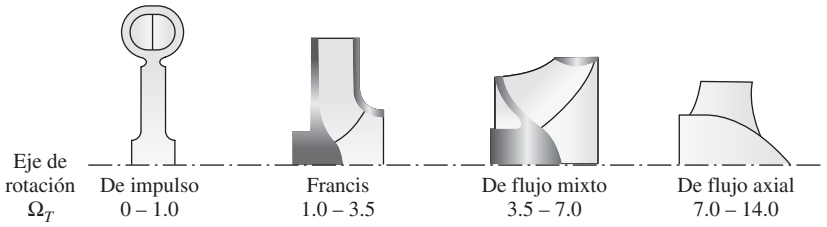


Fig. 12.20 Varios tipos de rotores de turbinas.

12.5.1 Turbinas de reacción

En las turbinas de reacción, el flujo está contenido en una *voluta* que canaliza el líquido hacia el rotor (figura 12.21). Los *álabes guía* ajustables (también llamados *álabes giratorios*) están situados corriente arriba del rotor; su función es controlar la componente tangencial de la velocidad a la entrada del rotor. Como resultado de lo anterior, el fluido deja de tener contacto con la salida del álabe guía y entra al rotor con una cantidad de movimiento angular adquirida. A medida que el fluido se desplaza a través de la región del rotor, su cantidad de movimiento angular se reduce e imparte un par de torsión sobre el rotor, el cual a su vez impulsa al eje para producir potencia. El flujo sale del rotor y entra a un difusor, llamado *tubo de aspiración*, que actúa para convertir la energía cinética restante en el líquido en energía de flujo.

Turbina Francis. En la turbina Francis, el flujo entrante a través de los álabes guía es radial, con una importante componente de la velocidad tangencial a la entrada hacia los álabes del rotor (figura 12.22). Conforme el fluido pasa a través del rotor, la velocidad desarrolla una componente axial mientras que la componente tangencial se reduce. Cuando pierde contacto con el rotor, la velocidad del fluido es principalmente axial con poca o ninguna componente tangencial. La presión a la salida del rotor está por debajo de la atmosférica.

El par de torsión teórico suministrado al rotor se desarrolla al aplicar la ecuación 12.2.1 al volumen de control que se muestra en la figura 12.22; se aplican las mismas suposiciones que conducen a la relación del par de torsión de una bomba, ecuación 12.2.2. La relación resultante es

$$T = \rho Q(r_1 V_{t1} - r_2 V_{t2}) \tag{12.5.1}$$

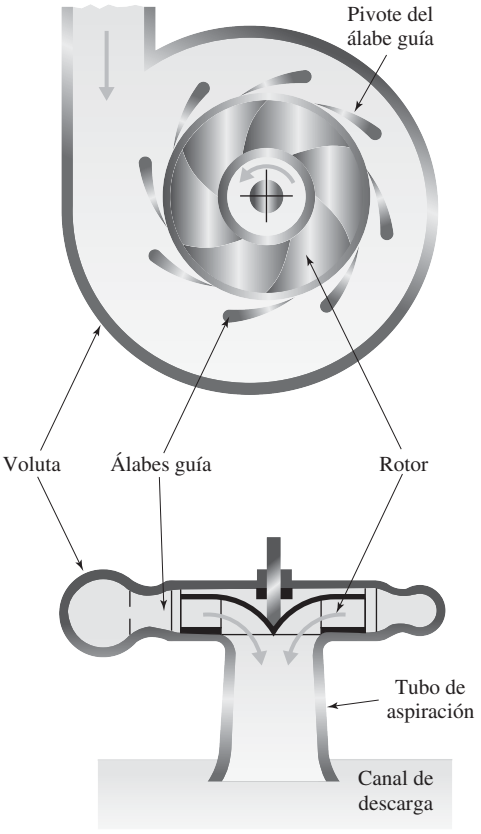
Si se multiplica el par de torsión por la velocidad angular ω tendremos la potencia suministrada al eje:

$$\begin{aligned} \dot{W}_T &= \omega T \\ &= \rho Q(u_1 V_1 \cos \alpha_1 - u_2 V_2 \cos \alpha_2) \end{aligned} \tag{12.5.2}$$

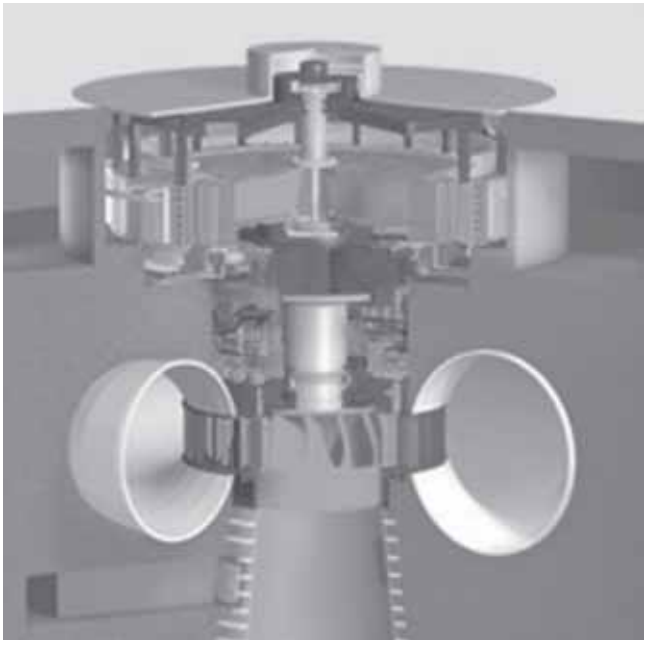
La entrada de potencia del fluido hacia la turbina está dada por

$$\dot{W}_f = \gamma Q H_T \tag{12.5.3}$$

en la que H_T es la caída de carga real a través de la turbina. Entonces la eficiencia total está dada por



(a)



(b)

(c)

Fig. 12.21 Turbina de reacción (tipo Francis): (a) diagrama esquemático; (b) Sección transversal de una turbina Francis, planta hidroeléctrica Xingo, Brasil (Cortesía de Voith Hydro); (c) Rotor y caja de turbina, Amlach, Austria. (Cortesía de Voith Hydro.)

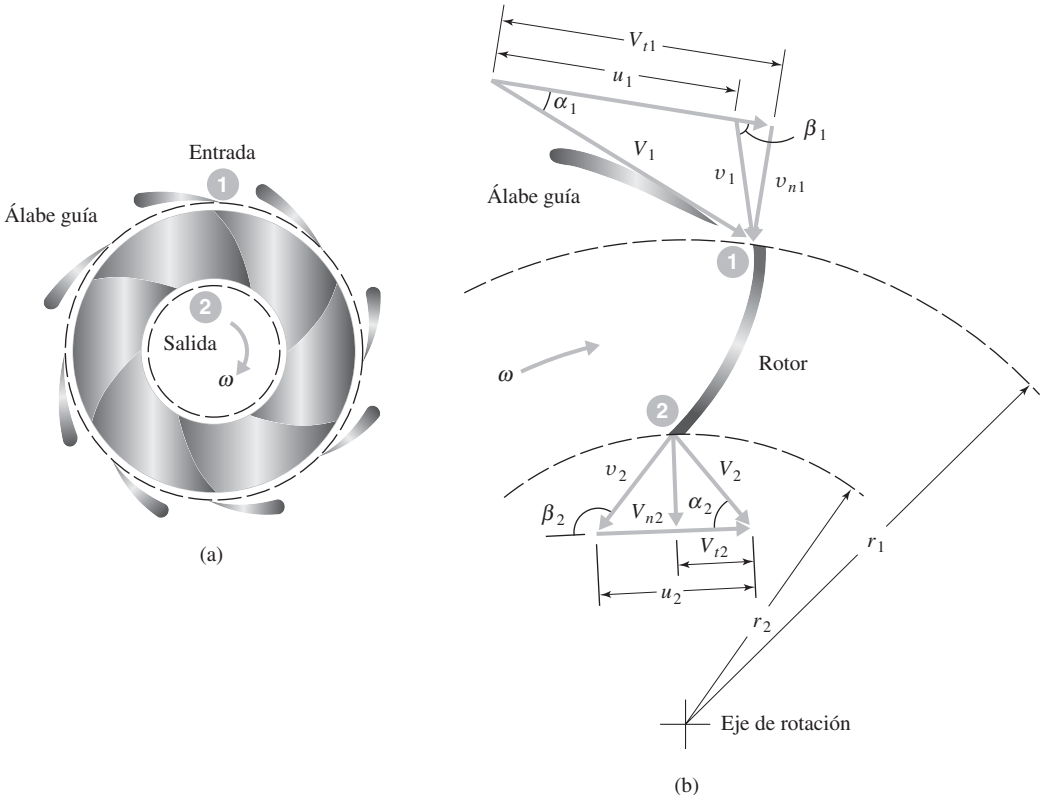


Fig. 12.22 Rotor de una turbina Francis idealizado; (a) volumen de control del rotor; (b) diagramas de velocidad en superficies de control.

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_T}{\dot{W}_f} = \frac{\omega T}{\gamma Q H_T} \tag{12.5.4}$$

La acción de los álabes guía puede describirse al considerar los diagramas de los vectores velocidad en la figura 12.22b. Suponga que se tiene una guía perfecta del fluido a lo largo del álabe guía; entonces la velocidad tangencial a la entrada al rotor es

$$V_{t1} = V_{n1} \cot \alpha_1 \tag{12.5.5}$$

Del diagrama del vector velocidad, la velocidad tangencial también está dada por

$$V_{t1} = u_1 + V_{n1} \cot \beta_1 \tag{12.5.6}$$

La componente de la velocidad radial puede expresarse en términos de la descarga Q y del ancho del rotor b_1:

$$V_{n1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} \tag{12.5.7}$$

Las ecuaciones 12.5.5 a 12.5.7 se combinan para eliminar V_{t1} y V_{n1}. Resulta

$$\cot \alpha_1 = \frac{2\pi r_1^2 b_1 \omega}{Q} + \cot \beta_1 \tag{12.5.8}$$

Para una velocidad angular constante, para mantener el ángulo apropiado de entrada al rotor α_1, el ángulo del álabe guía se ajusta conforme Q cambia.

En una operación normal, una turbina trabaja con una carga H_T casi constante para que las características de operación sean vistas de manera diferente a las de una bomba. Para la operación de una turbina sometida a carga constante, las cantidades importantes son las variaciones de descarga, velocidad y eficiencia. Las interrelaciones entre los tres parámetros se muestran en la curva de isoeficiencia de la figura 12.23. Observe la caída en la descarga conforme la velocidad aumenta a un ajuste determinado del álabe guía. La eficiencia se reduce por los siguientes efectos: (1) pérdidas de carga por fricción y pérdidas de carga en el tubo de aspiración; (2) separación debida a un desajuste del ángulo de entrada del flujo con el ángulo de álabe; (3) necesidad de alcanzar una cierta velocidad de la turbina antes de alcanzar una salida de potencia útil; y (4) pérdidas mecánicas atribuidas a cojinetes, sellos y otros componentes semejantes.

En la figura 12.24 se ilustra una curva de operación adimensional representativa de una turbina Francis. La velocidad y la carga se mantienen constantes, y los álabes guía se ajustan automáticamente cuando varía la descarga para alcanzar la eficiencia máxima.

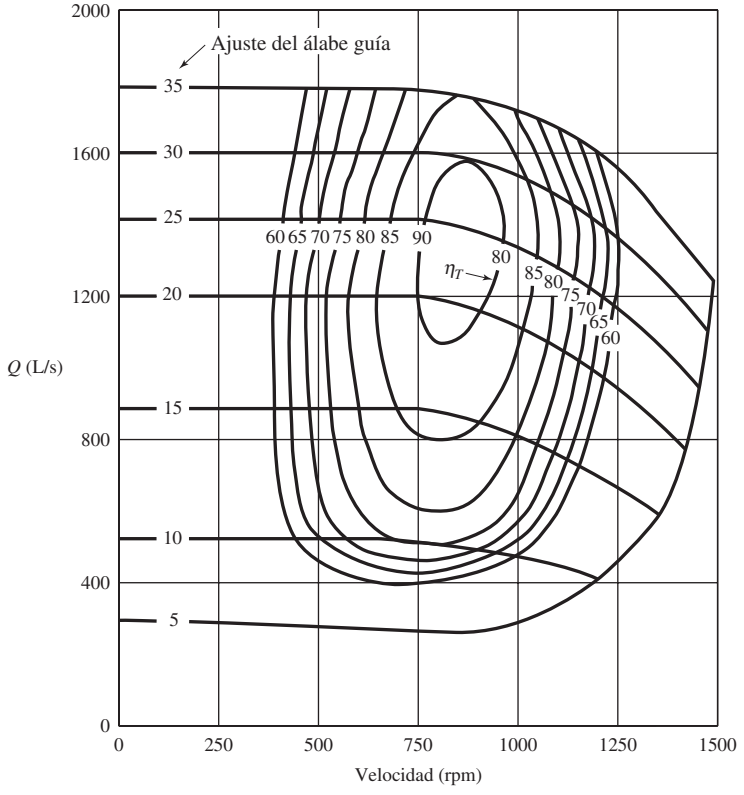


Fig. 12.23 Curva de isoeficiencia para una turbina Francis: D = 500 mm, H_T = 50 m. (Cortesía de Gilbert Gilkes and Gordon, Ltd.)

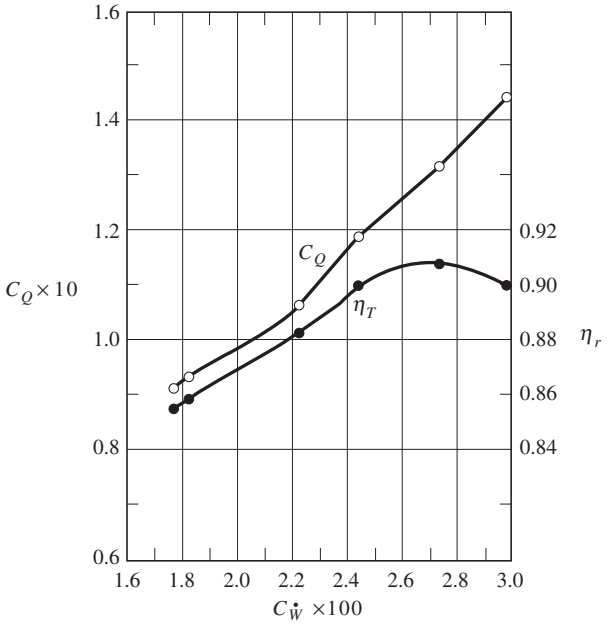


Fig. 12.24 Curva de operación para una turbina Francis prototipo: $D = 1000$ mm, $\omega = 37.7$ rad/s, $\Omega_T = 1.063$, $C_H = 0.23$. (Cortesía de Gilbert Gilkes and Gordon, Ltd.)

Ejemplo 12.8

Una turbina de reacción, cuyos radios del rotor son $r_1 = 300$ mm y $r_2 = 150$ mm, opera bajo las siguientes condiciones: $Q = 0.057$ m^3/s, $\omega = 25$ rad/s, $\alpha_1 = 30°$, $V_1 = 6$ m/s, $\alpha_2 = 80°$, y $V_2 = 3$ m/s. Suponiendo condiciones ideales, encuentre el par de torsión aplicado al rotor, la carga en la turbina y la potencia del fluido. Use $\rho = 1000$ kg/m^3.

Solución

El par de torsión aplicado se calcula usando la ecuación 12.5.1:

$$\begin{aligned} T &= \rho Q(r_1 V_{t1} - r_2 V_{t2}) \\ &= \rho Q(r_1 V_1 \cos \alpha_1 - r_2 V_2 \cos \alpha_2) \\ &= 1000 \times 0.057(0.3 \times 6 \times \cos 30° - 0.15 \times 3 \times \cos 80°) \\ &= 84.4 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

En condiciones ideales, la potencia aplicada al eje es igual que la entrada de potencia del fluido a la turbina (es decir, $\eta_T = 1$). Entonces

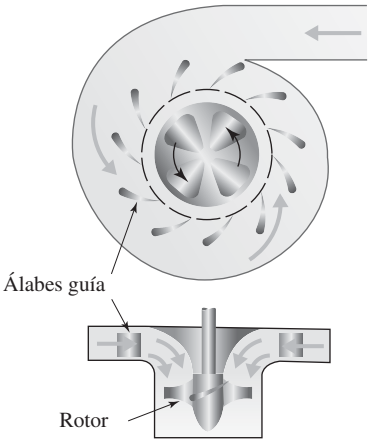
$$\begin{aligned} \dot{W}_f &= \dot{W}_T \\ &= \omega T \\ &= 25 \times 84.4 = 2110 \text{ W} \qquad \text{o} \qquad 2.11 \text{ kW} \end{aligned}$$

La carga hidráulica en la turbina se encuentra con el uso de la ecuación 12.5.3:

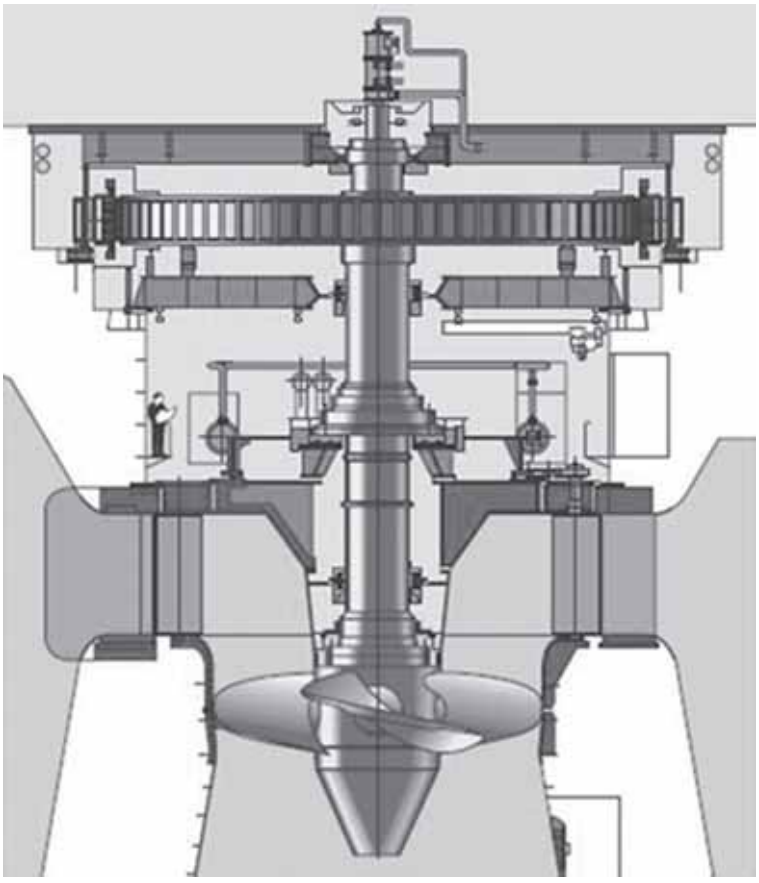
$$\begin{aligned} H_T &= \frac{\dot{W}_f}{\gamma Q} \\ &= \frac{2110}{9810 \times 0.057} = 3.77 \text{ m} \end{aligned}$$

Turbina de flujo axial. En una turbina de flujo axial el flujo es paralelo al eje de rotación (figura 12.25). A diferencia de la turbina Francis, la cantidad de movimiento angular del líquido permanece casi constante y la componente tangencial de la velocidad se reduce a través de los álabes. Se utilizan tanto turbinas de álabes fijos como de álabes pivotados; las de este último tipo, llamadas turbinas Kaplan, permiten ajustar el ángulo del álabe para acomodarse a cambios en la carga. Las turbinas de flujo axial pueden instalarse ya sea vertical u horizontalmente y son muy adecuadas para instalaciones con baja carga.

Consideraciones de cavitación. La carga de succión neta positiva (*NPSH*) y el número de cavitación, definidos en la sección 12.2.3, son aplicables para turbinas.



(a)



(b)

(c)

Fig. 12.25 Turbina de flujo axial (tipo Kaplan): (a) diagrama esquemático; (b) rotor Kaplan para la planta hidroeléctrica de Yacyretá, Argentina (Cortesía de Voith Hydro); (c) Turbina Kaplan que no daña peces, Wanapum, USA. (Cortesía de Voith Hydro.)

En las ecuaciones 12.2.21 a 12.23, el signo del término de pérdida se vuelve positivo. El número de cavitación Thoma, definido por la ecuación 12.2.24 para una bomba, está dado en la siguiente forma para una turbina:

$$\sigma = \frac{1}{H_T}\left(\frac{p_{\text{atm}} - p_v}{\gamma} - \Delta z + h_L\right) \tag{12.5.9}$$

Comúnmente, la ubicación 2 se define a la salida del rotor, y la ubicación 1 se refiere a la superficie del líquido a la salida del tubo de aspiración (figura 12.26a).

El número de cavitación por lo general se usa para caracterizar el comportamiento propenso a la cavitación de una turbina. La figura 12.26b muestra una gráfica representativa del número de cavitación contra la eficiencia de una turbina, que obtiene experimentalmente el fabricante de la turbina. De esta gráfica pueden establecerse procedimientos operacionales relacionados con ajustes de las elevaciones aguas arriba y aguas abajo y, además, pueden determinarse niveles admisibles del número cavitación.

12.5.2 Turbinas de impulso

La rueda Pelton o de acción (figura 12.27) es una turbina de impulso formada por tres componentes básicos: una o más toberas de entrada estacionarias, un rotor y

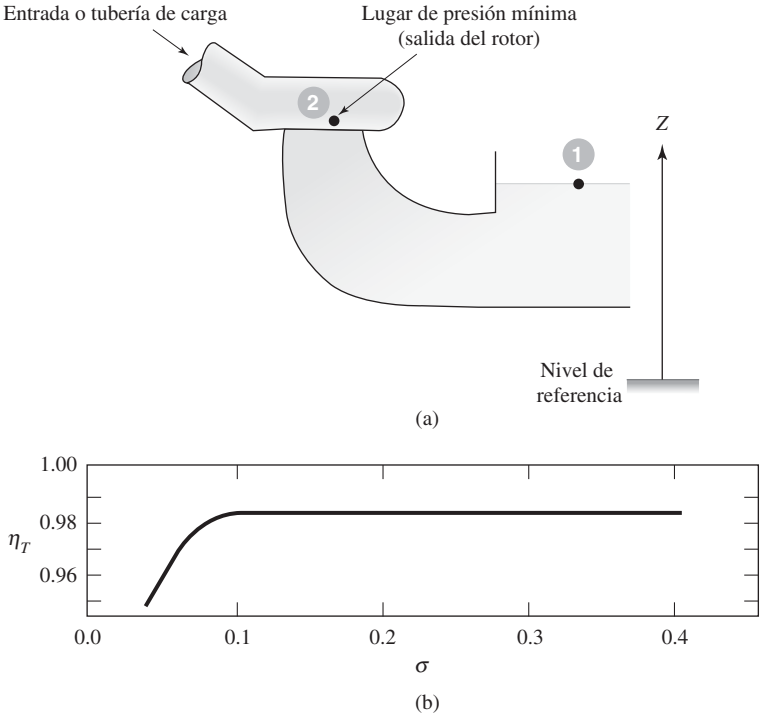
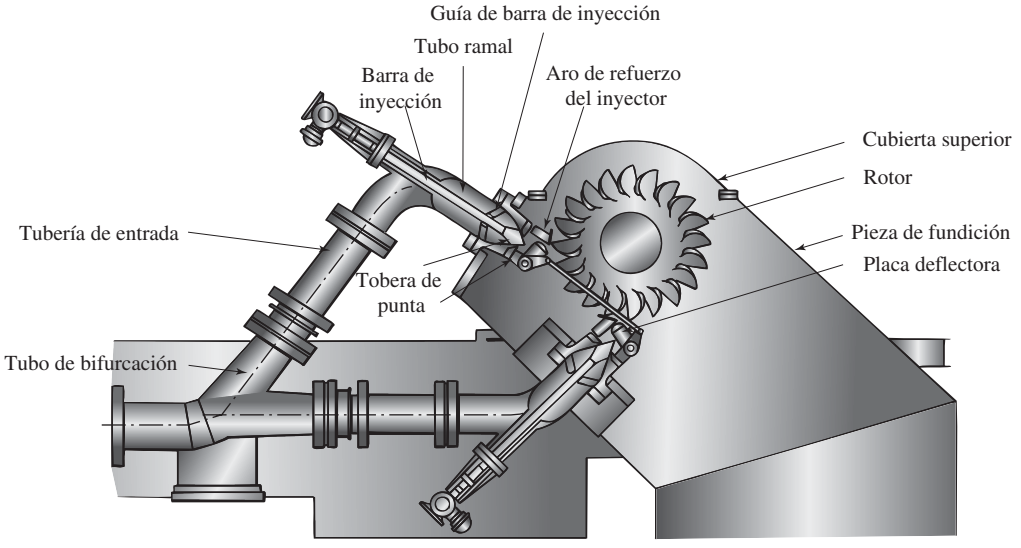
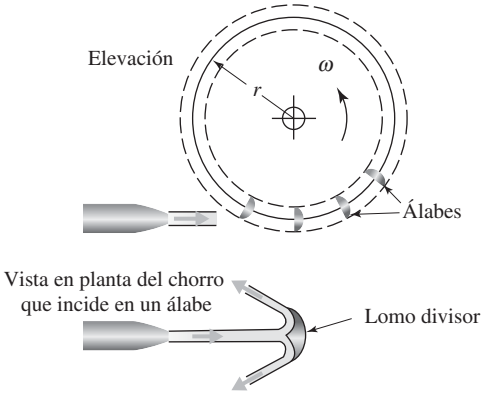


Fig. 12.26 Consideraciones de cavitación: (a) diagrama esquemático; (b) curva del número de cavitación representativa.



(a)



(b)

(c)

Fig. 12.27 Turbina de impulso (tipo Pelton): (a) configuración común de máquina con chorros gemelos (Cortesía de Gilbert Gilkes and Gordon, Ltd.); (b) chorro que incide en un álabe; (c) rotor Pelton, Sedrun, Suiza. (Cortesía de Voith Hydro.)

una caja. El rotor está formado por múltiples álabes montados en una rueda giratoria. La carga de presión corriente arriba de la tobera se convierte en energía cinética contenida en el chorro de agua que sale de la tobera. Conforme el chorro impacta los álabes giratorios, la energía cinética se convierte en un par de torsión giratorio. Los álabes tienen una forma tal que dividen en dos el flujo y viran su vector velocidad relativo en el plano horizontal casi 180º; el ángulo ideal de 180º no se puede alcanzar dado que el líquido que sale debe librar los álabes de atrás.

La ecuación del momento de la cantidad de movimiento, ilustrada en las secciones precedentes, puede aplicarse al volumen de control mostrado en la figura 12.28. Si se desprecia la fricción, el par de torsión suministrado a la rueda por el chorro de líquido es

$$T = \rho Q r(V_1 - u)(1 - \cos \beta_2) \tag{12.5.10}$$

en la que Q es la descarga de todos los chorros, y $u = r\omega$, r es el radio de la rueda como se muestra en la figura 12.27b. La potencia suministrada por el fluido al rotor de la turbina es

$$\dot{W}_T = \rho Q u(V_1 - u)(1 - \cos \beta_2) \tag{12.5.11}$$

Comúnmente, β_2 varía entre 160 y 168º. El derivar la ecuación 12.5.11 respecto a u e igualarla a cero muestra que la potencia máxima se tiene cuando $u = V_1/2$.

La velocidad del chorro puede darse en términos de la carga disponible H_T:

$$V_1 = C_v \sqrt{2gH_T} \tag{12.5.12}$$

El *coeficiente de velocidad* C_v toma en cuenta las pérdidas en la tobera; típicamente, $0.92 \leq C_v \leq 0.98$. La eficiencia es

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_T}{\gamma Q H_T} \tag{12.5.13}$$

Sustituyendo las ecuaciones 12.5.11 y 12.5.12 en esta relación y reacomodando resulta

$$\eta_T = 2\phi(C_v - \phi)(1 - \cos \beta_2) \tag{12.5.14}$$

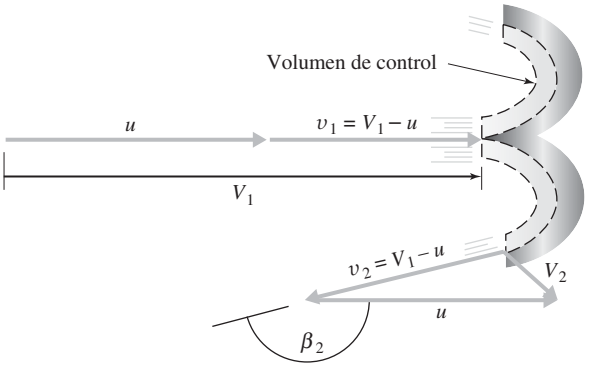


Fig. 12.28 Diagrama del vector velocidad para un álabe Pelton.

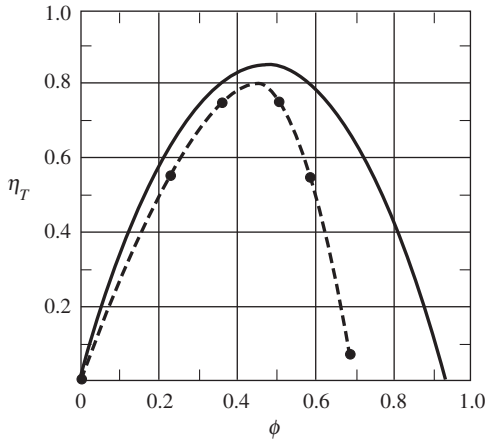


Fig. 12.29 Factor de velocidad contra eficiencia para una turbina Pelton o de impulso a escala de laboratorio: línea continua, ecuación 12.5.14 ($C_v = 0.94$, $\beta_2 = 168°$); línea discontinua, datos experimentales.

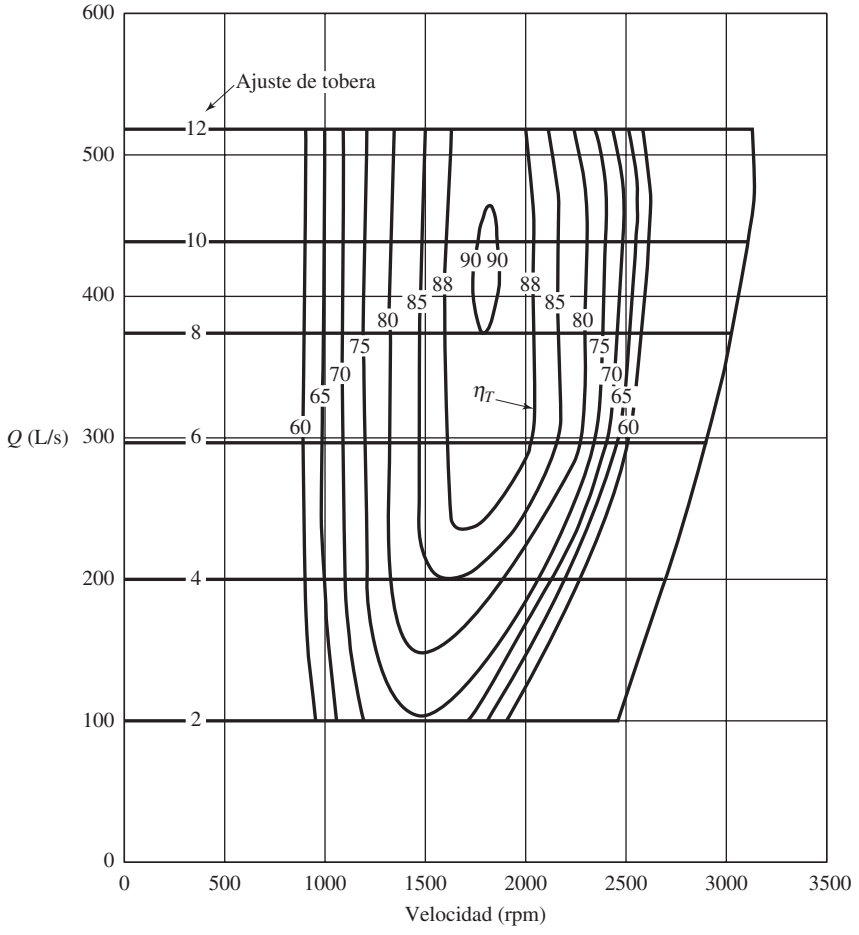


Fig. 12.30 Curvas de isoeficiencia para una turbina Pelton o de impulso: $D = 500$ mm, $H_T = 500$ m. (Cortesía of Gilbert Gilkes and Gordon, Ltd.)

en la que el *factor de velocidad* ϕ se define como

$$\phi = \frac{r\omega}{\sqrt{2gH_T}} \tag{12.5.15}$$

La eficiencia máxima se tiene en $\phi = C_v/2$. La figura 12.29 muestra la ecuación 12.5.14 graficada para $C_v = 0.94$ y $\beta_2 = 168°$. Además, los datos están graficados para una rueda Pelton a escala de laboratorio. La eficiencia máxima teórica es 0.874, en tanto que la eficiencia máxima experimental es de aproximadamente 0.80. La eficiencia se reduce porque (1) el chorro de líquido no incide en el álabe con una velocidad uniforme, (2) ocurren pérdidas cuando el chorro incide en el álabe y en el divisor, (3) hay pérdida friccional debida a la rotación del álabe y del divisor, y (4) hay pérdida friccional en la tobera.

Las interrelaciones entre Q, ω y η_T se muestran en las curvas de isoeficiencia de la figura 12.30. Para una carga y ajuste de tobera constantes, la descarga permanece constante porque la salida de la tobera es a presión atmosférica. Una curva de operación adimensional representativa para una turbina Pelton prototipo se ilustra en la figura 12.31.

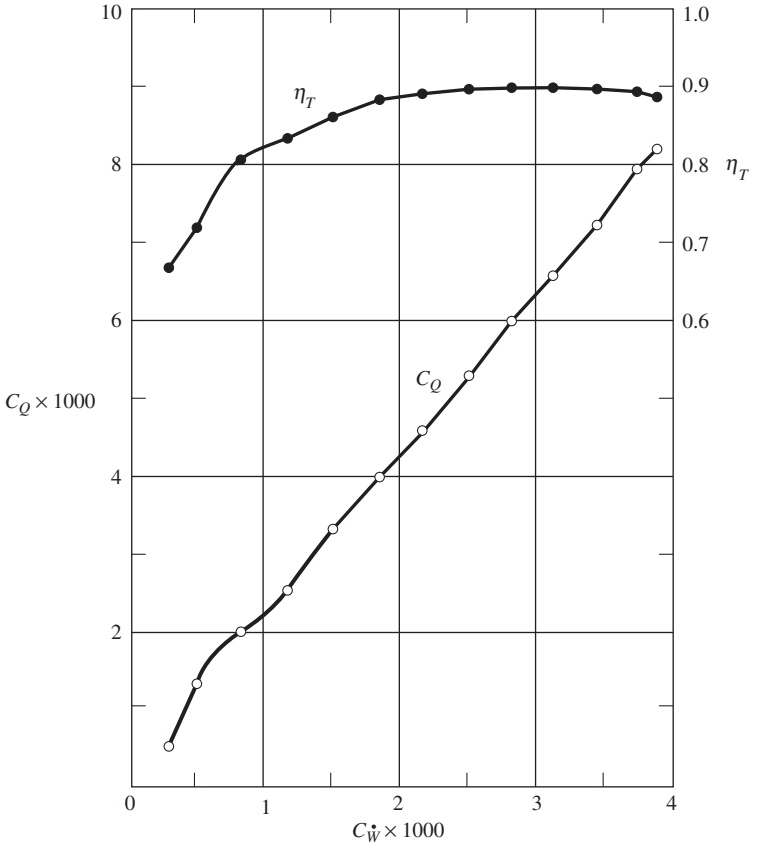


Fig. 12.31 Curvas de operación y eficiencia para una turbina Pelton prototipo: $D = 1000$ mm, $\omega = 75.4$ rad/s, $\Omega_T = 0.135$, $C_H = 0.52$. (Cortesía de Gilbert Gilkes y Gordon, Ltd.)

Ejemplo 12.9

Una turbina Pelton gira a una velocidad angular de 400 rpm, desarrollando 67.5 kW bajo una carga de 60 m de agua. El diámetro del tubo de entrada en la base de la única tobera es de 200 mm. Las condiciones de operación son $C_v = 0.97$, $\phi = 0.46$, y $\eta_T = 0.83$. Determine (a) el flujo volumétrico, (b) el diámetro del chorro, (c) el diámetro de la rueda, y (d) la presión en el tubo de entrada en la base de la tobera.

Solución

(a) La descarga se calcula con la ecuación 12.5.13 y es

$$Q = \frac{\dot{W}_T}{\gamma H_T \eta_T} = \frac{67\,500}{9810 \times 60 \times 0.83} = 0.138 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) De la ecuación 12.5.12, la velocidad del chorro es

$$V_1 = C_v \sqrt{2gH_T} = 0.97 \sqrt{2 \times 9.81 \times 60} = 33.3 \text{ m/s}$$

El área del chorro es la descarga dividida entre V_1, es decir

$$A_1 = \frac{Q}{V_1} = \frac{0.138}{33.3} = 4.14 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Por tanto, el diámetro del corro D_1 es

$$D_1 = \sqrt{\frac{4}{\pi} A_1} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \times 4.14 \times 10^{-3}} = 0.0726 \text{ m} \quad \text{o} \quad 73 \text{ mm}$$

(c) Use la ecuación 12.5.15 para calcular el diámetro de la rueda D como sigue

$$D = 2r = \frac{2\phi}{\omega} \sqrt{2gH_T}$$

$$= \frac{2 \times 0.46}{400 \times \pi/30} \sqrt{2 \times 9.81 \times 60} = 0.754 \text{ m} \quad \text{o} \quad 754 \text{ mm}$$

(d) El área del tubo de entrada es

$$A = \frac{\pi}{4} \times 0.20^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

La carga hidráulica justo corriente arriba de la tobera es igual a H_T, de modo que la presión en ese lugar es

$$p = \gamma\left(H_T - \frac{Q^2}{2gA^2}\right)$$

$$= 9810\left(60 - \frac{0.138^2}{2 \times 9.81 \times 0.0314^2}\right)$$

$$= 5.79 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad \text{aproximadamente } 580 \text{ kPa}$$

12.5.3 Selección y operación de turbinas

Una selección preliminar del tipo de turbina apropiado para una instalación determinada está basada en la velocidad específica. La figura 12.20 muestra la forma en que varía el rotor de la turbina con Ω_T. Las turbinas de impulso operan de manera normal más económicamente con cargas arriba de 300 m, pero pueden usarse unidades pequeñas para cargas de sólo 60 m. Las cargas de 300 son posibles para unidades Francis, y normalmente se usan turbinas de hélice para cargas menores de 30 m. La figura 12.32 ilustra los márgenes de aplicación para una variedad de turbinas hidráulicas.

En tiempos recientes, las instalaciones llamadas mini y microhidráulicas han suscitado un renovado interés, no sólo en países en desarrollo sino también en los desarrollados como en Estados Unidos, donde el costo de la energía ha aumentado y se han creado programas de incentivos para promover su uso.

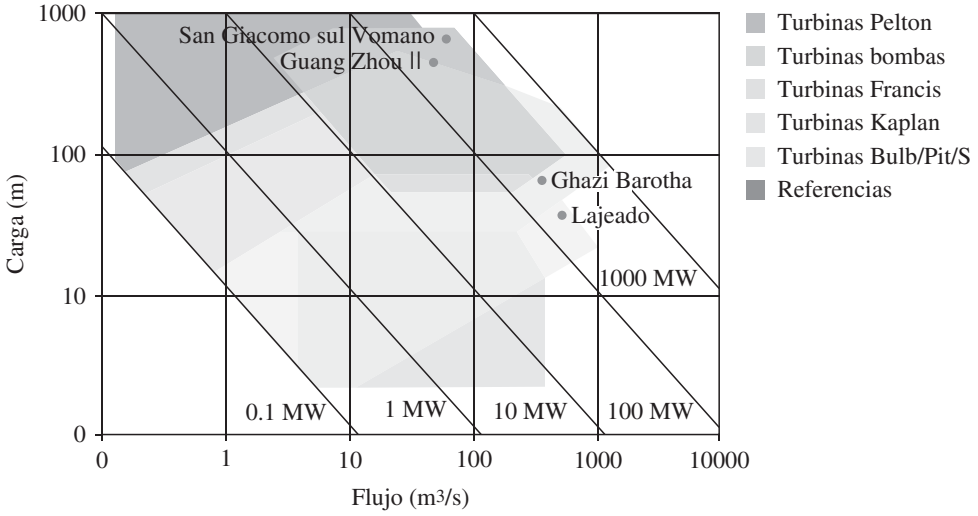


Fig. 12.32 Intervalos de aplicación para turbinas hidráulicas. (Cortesía de Voith Hydro.)

Las *microhidráulicas* ha sido clasificadas como unidades que poseen una capacidad de menos de 100 kW, y *minihidráulica* se refiere a una capacidad del sistema de 100 a 1000 kW (Warnick, 1984). Se está haciendo práctica común que los fabricantes de turbinas desarrollen una unidad de turbina estandarizada. Además de las unidades especializadas pequeñas como la Pelton, Francis y de hélice, se emplea la *turbina de flujo cruzado*; básicamente, es una turbina de impulso que posee una velocidad rotacional más alta que la de las otras turbinas de impulso.

Otra alternativa es usar una bomba disponible comercialmente y operarla en dirección inversa; en el modo de turbina, el punto de operación de la mejor eficiencia requiere una carga y flujo más grandes que cuando la bomba opera a la mejor eficiencia en el modo de bombeo.

Las unidades de bomba/turbina reversibles se usan en instalaciones generadoras de energía hidroeléctrica de bombeo/almacenamiento. El agua se bombea desde un depósito más bajo a un depósito de almacenamiento más alto durante periodos de baja demanda para plantas generadoras de energía eléctrica convencionales. Posteriormente, se libera el agua del depósito más alto y las bombas se hacen girar en reversa para generar energía eléctrica durante los periodos de alta demanda de energía. La figura 12.33 muestra una instalación representativa formada por una unidad bomba/turbina reversible Francis combinada con un generador/motor. Estas unidades requieren consideraciones especiales de diseño para operar con eficiencia en cualquiera de los dos modos. Convertir el flujo del modo de bombeo al de turbina, o viceversa, es un problema transitorio muy complicado que está fuera del ámbito de este libro. La dirección del agua con su enorme masa que se mueve a través del sistema debe invertirse; para lograr esto se requiere del desarrollo de una técnica especial.

Fig. 12.33 Rotor y cubierta superior para una bomba turbina, Waldeck, Alemania. (Cortesía de Voith Hydro.)

Ejemplo 12.10

Se dispone de una descarga de 2100 m^3/s y de una carga de 113 m para un esquema hidroeléctrico de almacenamiento-bombeo propuesto. Han de instalarse bombas/turbinas reversibles Francis; en el modo de operación de turbina, $\Omega_T = 2.19$, la velocidad rotacional es 240 rpm y la eficiencia es 80% . Determine la potencia producida por cada unidad y el número de unidades requeridas.

Solución

La potencia producida por cada unidad se encuentra con el uso de la definición de velocidad específica, ecuación 12.3.15. Despejando la potencia, tenemos

$$\dot{W}_T = \rho\left[\frac{\Omega_T}{\omega}(gH_T)^{5/4}\right]^2$$

$$= 1000\left[\frac{2.19}{240 \times \pi/30}(9.81 \times 113)^{5/4}\right]^2 = 3.11 \times 10^8 \text{ W}$$

De la ecuación 12.5.13, la descarga en cada unidad es

$$Q = \frac{\dot{W}_T}{\gamma H_T \eta_T}$$

$$= \frac{3.11 \times 10^8}{9800 \times 113 \times 0.8} = 351 \text{ m}^3/\text{s}$$

El número de unidades requerido es igual a la descarga disponible dividida entre la descarga de cada unidad, o sea 2100/351 = 5.98. Por tanto, se requieren seis unidades.

12.6 RESUMEN

Este capítulo se concentra en bombas o turbinas que suministran o extraen energía por medio de impulsores o álabes giratorios. Primero destacamos la bomba de flujo radial, o centrífuga, y utilizamos el principio del momento de la cantidad de movimiento para deducir una relación carga-descarga idealizada. A continuación contrastamos esto con la curva de operación carga-descarga real, que se obtiene experimentalmente y que se requiere para usarla en el análisis y diseño de bombas. Hicimos una introducción de las bombas de flujo axial y de flujo mixto, y estudiamos las diferencias entre éstas y la bomba de flujo radial. La importancia de la eficiencia de una bomba y los diagramas de carga de aspiración neta positiva (relativos a la cavitación) se mostraron para el diseño y selección apropiada de bombas.

Se aplicaron el análisis y la similitud dimensional a bombas y turbinas; los tres números adimensionales significativos que desarrollamos son el coeficiente de potencia, el coeficiente de flujo y el coeficiente de carga. Estos coeficientes se combinaron para obtener la eficiencia de una bomba o de una turbina, o para producir la velocidad específica para una bomba o una turbina. Se mostró que una familia de bombas o turbinas podría representarse en forma adimensional mediante una sola curva. Ilustramos el agrupamiento de bombas, por unidad, en paralelo o en serie, para satisfacer las necesidades apropiadas de carga y descarga para tuberías.

Por último, presentamos una breve introducción a las turbinas, relacionando para ello la teoría fundamental junto con la aplicación de turbinas de reacción, de flujo axial y de impulso a varias situaciones de diseño hidráulico.

PROBLEMAS

Teoría elemental

12.1 Determine el par de torsión, la potencia y entrada o salida de carga para las turbomáquinas mostradas en la figura P12.1. ¿Se trata de una bomba o de una turbina? Los datos siguientes son comunes: radio externo 300 mm, radio interno 150 mm, $Q = 0.057$ m^3/s, $\rho = 1000$ kg/m^3, y $\omega = 25$ rad/s.

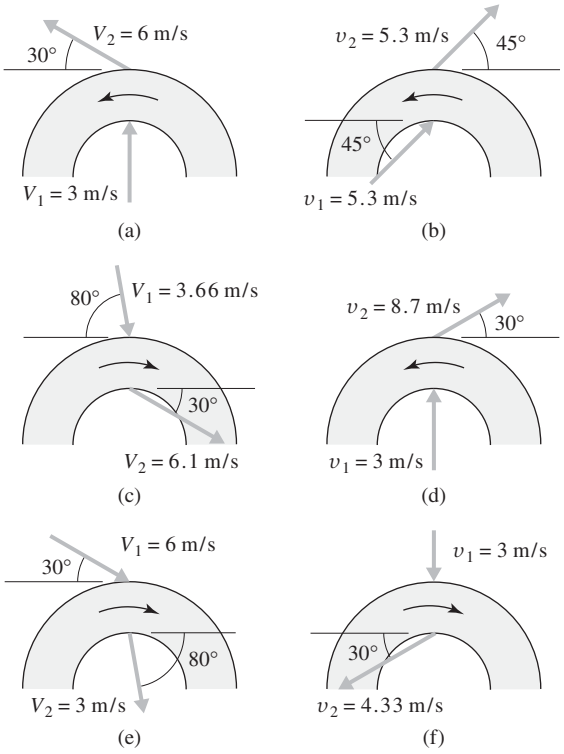


Fig. P12.1

12.2 Una bomba centrífuga de agua gira a 800 rpm. El impulsor tiene anchos de álabe uniformes $b_1 = 50$ mm, $b_2 = 25$ mm, y radios $r_1 = 40$ mm, $r_2 = 125$ mm. Los ángulos de álabe son $\beta_1 = 45°$, $\beta_2 = 30°$. Suponiendo que no haya cantidad de movimiento angular de fluido a la entrada del álabe, determine el caudal ideal, el aumento de la carga de presión a través del impulsor, y los requerimientos del par de torsión teórico y de potencia.

12.3 Los tubos de succión y descarga de una bomba están conectados a un manómetro diferencial de mercurio. El diámetro del tubo de succión es 200 mm y el diámetro del tubo de descarga es 150 mm. La gravedad específica del líquido bombeado es $S = 0.81$, y la lectura en el manómetro es $H = 600$ mm. Determine el aumento de la carga de presión a través de la bomba si la descarga es $Q = 115$ L/s. Las líneas centro de los tubos de succión y de descarga están a la misma elevación.

12.4 Una bomba centrífuga con dimensiones $r_2 = 2.5$ in, $b_2 = 0.40$ in, $\beta = 60°$, está bombeando queroseno ($S = 0.80$) a razón de 2 gal/s y gira a 2000 rpm. Para condiciones de entrada de "mejor diseño", determine el aumento en la carga de presión teórico y la potencia del fluido.

12.5 Una bomba de flujo axial tiene un álabe de estator posicionado corriente arriba del impulsor, y presenta un ángulo $\alpha_1 = 60°$ al flujo. El radio de la punta del impulsor es de 285 mm, y el radio del centro o maza es de 135 mm. Determine el ángulo de álabe promedio que se requiere a la salida del impulsor si la bomba debe suministrar 0.57 m^3/s de agua con un aumento de carga teórico de 2.85 m. La velocidad rotacional es de 1500 rpm.

12.6 Para el sistema que se ilustra en la figura P12.6, fluye agua a través de la bomba a razón de 50 L/s. La *NPSH* permisible proporcionada por el fabricante a ese flujo es de 3 m. Determine la máxima altura Δz sobre la superficie del agua a la que la bomba puede ser colocada para que opere sin cavitación. Incluya todas las pérdidas en el tubo de succión.

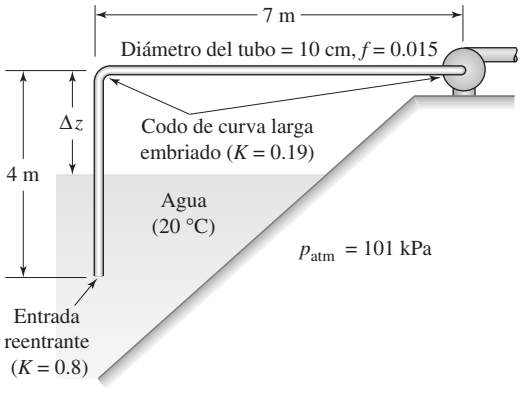


Fig. P12.6

12.7 Durante una prueba en una bomba de agua, no se detecta cavitación cuando la presión manométrica en el tubo a la entrada de la bomba es –9.9 psi, y la temperatura del agua es 80 ºF. El diámetro del tubo de entrada

es 4 in, la carga a través de la bomba es 115 ft, y la descarga es de 13 gal/s.

(a) Calcule la *NPSH* y el número de cavitación si la presión atmosférica es 14.7 psi.

(b) Si la bomba ha de producir la misma carga y descarga en un lugar donde la presión atmosférica es 12 psi, ¿cuál es el cambio de elevación necesario de la bomba respecto al depósito de entrada para evitar la cavitación?

Análisis y similitud dimensional

12.8 Considere la curva de la bomba de 371 mm de diámetro de la figura 12.9. Si la bomba se opera a 1200 rpm para suministrar 0.8 m^3/s de agua, encuentre el aumento de carga resultante y la potencia del fluido.

12.9 En el problema 12.8, ¿a qué altura sobre el depósito de succión puede ubicarse la bomba que opera a 1200 rpm si la temperatura es 50 ºC y la presión atmosférica es 101 kPa?

12.10 Trace las curvas de operación adimensionales para la bomba de flujo radial de 205 mm de diámetro de la figura 12.6. Compare éstas con las curvas mostradas en la figura 12.12. ¿Puede explicar por qué puede haber diferencias entre los dos juegos de curvas?

12.11 Si la bomba de 220 mm de diámetro cuyas curvas características se muestran en la figura 12.6 está operando a 3300 rpm, ¿cuál será la carga y la *NPSH* cuando la descarga es de 200 m^3/h?

12.12 Se requiere una bomba para transportar 150 L/s de petróleo ($S = 0.86$) con un aumento en carga de 22 m a través de la bomba cuando opera a 1800 rpm. ¿Qué tipo de bomba está mejor adaptada para esta operación?

12.13 Se requiere una bomba para suministrar 0.17 m^3/s de agua con un aumento de carga de 104 m cuando opera a máxima eficiencia a 2000 rpm. Determine el tipo de bomba mejor adaptado para este trabajo.

12.14 Consulte en la figura 12.13 las curvas de operación adimensionales para una bomba de flujo axial. Se desea suministrar agua a razón de 45 ft^3/s a una velocidad de 750 rpm. Determine:

(a) La carga hidráulica disponible, el diámetro, la potencia y las necesidades de *NPSH*.

(b) Las curvas de carga-descarga y potencia-descarga reales.

12.15 Una bomba que opera a 400 rpm descarga agua a razón de 85 L/s. El aumento de carga total a través de la bomba es 7.6 m, y la eficiencia es 0.7. Una segunda bomba, cuyas dimensiones lineales son dos tercios de la primera, opera a 400 rpm bajo condiciones dinámicamente similares; ha de colocarse en un satélite espacial donde la gravedad simulada produce un campo gravitacional que es 50% del de la Tierra. ¿Cuáles son la descarga, el aumento de carga y las necesidades de potencia para la segunda bomba?

12.16 Una bomba está diseñada para operar en óptimas condiciones a 600 rpm cuando descargue agua a 22.7 m^3/s contra una carga hidráulica de 19.5 m. ¿Qué tipo de bomba se recomienda?

12.17 Una bomba que opera bajo las condiciones indicadas en el problema 12.16 tiene una eficiencia máxima de 0.70. Si la misma bomba se requiere ahora que descargue agua a una carga de 30.5 m a máxima eficiencia, determine la velocidad de rotación, la descarga y la potencia requerida.

12.18 Un fabricante desea duplicar la descarga y la carga en una bomba geométricamente similar. Determine el cambio en la velocidad de rotación y en el diámetro con las nuevas condiciones.

12.19 Se requiere que una bomba suministre agua a 2900 gal/min contra una carga de 200 ft. La velocidad de rotación aproximada es de 1400 rpm. Usando la curva de operación adimensional apropiada del texto, determine la velocidad real y el tamaño de la bomba para operar a máxima eficiencia.

12.20 Seleccione el tipo, tamaño y velocidad de una bomba para suministrar un líquido ($\gamma = 8830\ N/m^3$) a 0.66 m^3/s con necesidades de potencia generada por el fluido de 200 kW. (*Sugerencia:* Suponga que la velocidad de la bomba puede variar entre 1000 y 2000 rpm.)

Uso de turbobombas

12.21 Para el sistema mostrado en la figura P12.21, recomiende la máquina apropiada para bombear 1 m³/s de agua si la velocidad del impulsor es 600 rpm.

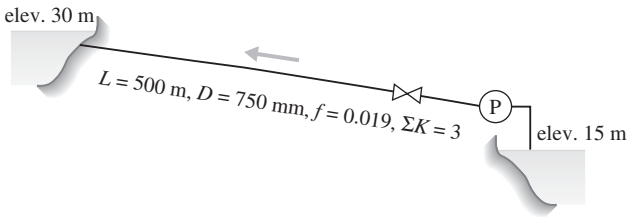


Fig. P12.21

12.22 Los siguientes datos de operación se obtuvieron de una prueba en una bomba centrífuga de 216 mm de doble entrada que suministra agua a una velocidad constante de 1350 rpm:

Q (m³/min)	H (m)	η_P
0	12.2	0
0.454	12.8	0.26
0.905	13.1	0.46
1.36	13.4	0.59
1.81	13.4	0.70
2.27	13.1	0.78
2.72	12.2	0.78
3.80	11.0	0.74

Grafique H contra Q, η_P contra Q y $\dot{W}_P$ contra Q. Si la bomba opera en un sistema cuya curva de demanda está dada por $5 + Q^2$, encuentre la descarga, la carga y la potencia necesaria. En la curva de demanda, Q está dada en metros cúbicos por minuto.

12.23 Se bombea petróleo ($S = 0.85$) a través de una tubería como se ilustra en la figura P12.23. Con el uso de las curvas características de la figura 12.12, determine el diámetro del impulsor, la velocidad y la potencia de entrada requeridas, para suministrar el petróleo a razón de 14.2 L/s. ¿Se esperaría que la eficiencia de la bomba tuviera el valor mostrado en la curva?

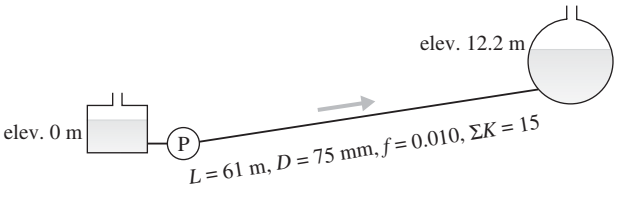


Fig. P12.23

12.24 Con referencia a los datos de la bomba del problema 12.22, si la bomba opera a 1200 rpm, encuentre la descarga, la carga y la potencia requeridas. ¿Es la eficiencia de operación en estas condiciones igual a la respectiva cuando la bomba opera a 1350 rpm?

12.25 Para los datos de la bomba presentados en el problema 12.22, grafique las curvas de bomba adimensionales C_H contra C_Q, $C_{\dot{W}}$ contra C_Q, y η_P contra C_Q. ¿Cuál es la velocidad específica de la bomba? (*Nota:* Para bombas de doble entrada, use la mitad de la descarga cuando calcule la velocidad específica.)

12.26 Una planta de flujo de circuito cerrado (figura P12.26) ha de utilizarse para estudiar el flujo de agua en un laboratorio de hidráulica. Está construido con tubos de 300 mm de diámetro hidráulicamente lisos. El coeficiente de pérdida en cada uno de los cuatro codos es 0.1 y la longitud total del circuito es 14 m. La velocidad de diseño es $V = 3$ m/s. Se propone usar una bomba de flujo axial que opere a 300 rpm. Verifique que una bomba de flujo axial sea el tipo correcto a emplear.

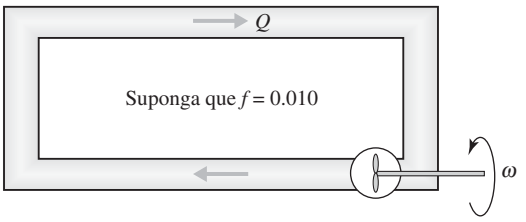


Fig. P12.26

12.27 En el problema 12.26, suponga que la única bomba axial disponible es de la familia que se muestra en la figura 12.13. Si el diámetro del impulsor se restringiera al diámetro de la tubería, ¿cuál sería la velocidad de rotación y el aumento de carga resultante a través de la bomba?

12.28 La bomba de 240 mm de diámetro representada en la figura 12.6 se usa para transportar agua a través de un sistema de tubería cuya curva de demanda es $62 + 270Q^2$, donde Q está en metros cúbicos por segundo. Encuentre la descarga, la potencia de entrada requerida, y las necesidades de *NPSH* para:

(a) Una bomba

(b) Dos bombas en paralelo

12.29 Se desea bombear 600 m³/h de amoníaco líquido ($\rho = 607$ kg/m³) a una velocidad de 2500 rpm y a un aumento de presión de 1000 kPa.

(a) Determine el tipo de bomba mejor adaptado para este trabajo.

(b) Usando la curva característica adimensional apropiada de la bomba, encuentre el diámetro y el número de etapas requeridas para satisfacer los requerimientos de bombeo.

12.30 Se ha de bombear petróleo crudo ($S = 0.86$) a través de un oleoducto de tres millas de hierro colado de 18 pulgadas de diámetro. El aumento de elevación del extremo corriente arriba al corriente abajo es de 640 ft. Si una bomba disponible es la máquina de flujo radial de 240 mm de diámetro de la figura 12.6, ¿cuántas bombas en serie se requieren para proporcionar la operación más eficiente? Encuentre la potencia requerida.

12.31 Una red de tuberías para el suministro de agua diseñada para una comunidad recibe agua de un pozo de 10 pulgadas de diámetro (figura P12.31). La bomba se instala 150 ft abajo de la tubería principal de agua de 10 pulgadas de diámetro, que suministra el flujo a la red, y debido al manto de agua subterráneo disponible, la línea de referencia hidráulica en el lado de succión de la bomba está 75 ft arriba de la bomba. La descarga de diseño es de 500 gal/min, y se requiere de una presión de 80 lb/in^2 en la tubería principal de agua. Haciendo uso de la figura 12.12, determine el tamaño, la velocidad y el número de etapas de una bomba para satisfacer los requisitos de diseño y la potencia requerida. Suponga que el diámetro del impulsor de la bomba es 8 pulgadas y que el factor de fricción en el tubo de suministro del pozo es constante, $f = 0.02$.

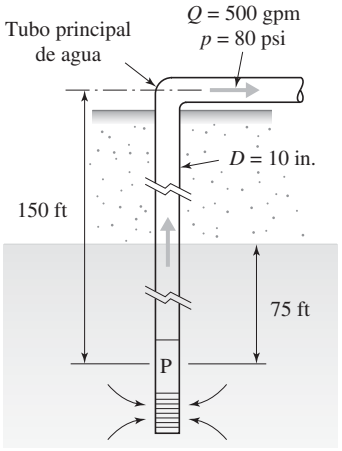


Fig. P12.31

12.32 Una bomba modelo (figura P12.32) suministra agua a 80 ºC a una velocidad de 2400 rpm. Empieza a tener cavitación cuando la presión de entrada $p_i = 83$ kPa absoluta y la velocidad de entrada $V_i = 6$ m/s.

(a) Calcule la *NPSH* de la bomba modelo. Haga caso omiso de las pérdidas y cambios de elevación entre la sección de entrada donde p_i se registra y la región de cavitación de la bomba.

(b) ¿Cuál es la *NPSH* requerida de una bomba prototipo que es cuatro veces más grande y opera a 1000 rpm?

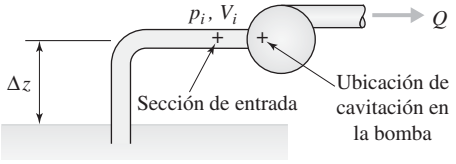


Fig. P12.32

12.33 Se requiere bombear agua a 1.25 m^3/s de un depósito inferior a uno superior. La superficie del agua en el depósito inferior está a una elevación de 20 m, y la elevación del depósito superior es 23 m. La longitud de la tubería de 750 mm de diámetro es 60 m. El factor de fricción puede suponerse constante, $f = 0.02$, y los coeficientes de pérdida a la entrada y la salida son 0.5 y 1.0, respectivamente.

(a) ¿Qué tipo de bomba está mejor adaptada para este sistema, si la velocidad del impulsor es de 600 rpm?

(b) Suponiendo una eficiencia razonable de una curva de bomba apropiada, estime la potencia en kilowatts requerida para operarla.

12.34 Se bombea tetracloruro de carbono a 20 ºC de un tanque abierto a la atmósfera a través de una tubería horizontal lisa de 200 m de longitud y 50 mm de diámetro, que descarga en la atmósfera a una velocidad de 3 m/s. La elevación del líquido en el tanque es 3 m arriba de la tubería. Una bomba se sitúa a la entrada de la tubería inmediatamente corriente abajo del depósito.

(a) Determine la velocidad y el tamaño de una bomba para satisfacer la demanda del sistema.

(b) ¿Cuál es la carga de succión neta positiva a la entrada de la bomba? Haga caso omiso de las pérdidas en el tubo corto de aspiración que conecta la bomba con el tanque. Suponga que la presión atmosférica es de 101 kPa.

(c) Haga un bosquejo de la línea de referencia hidráulica para el sistema.

12.35 Un túnel de viento con una sección de prueba de 1 m×2 m es accionado por un ventilador axial de 1.5 m de diámetro. La velocidad en la sección de prueba es 20 m/s y la velocidad rotacional del ventilador es 2500 rpm. Suponiendo pérdidas insignificantes en el túnel y una curva de operación para el ventilador definida por la figura 12.13:

(a) Calcule la potencia requerida para operar el ventilador.

(b) ¿Cuál es el aumento de presión a través del ventilador?

Turbinas

12.36 Una turbina Francis tiene las siguientes dimensiones: $r_1 = 4.5$ m, $r_2 = 2.5$ m, $b_1 = b_2 = 0.85$ m, $\beta_1 = 75°$, $\beta_2 = 100°$. La velocidad angular es 120 rpm y la descarga es 150 m^3/s. Para que no haya separación a la entrada del rotor, determine el ángulo del álabe guía, el par de torsión teórico, la carga y la potencia.

12.37 Un modelo de una turbina Francis a una escala de 1/5 desarrolla 3 kW a 360 rpm bajo una carga de 1.8 m. Encuentre la velocidad y la potencia de la turbina real cuando opere bajo una carga de 5.8 m. Suponga que ambas unidades están operando a máxima eficiencia.

12.38 Se ha de construir un modelo para estudiar la operación de una turbina que tiene un diámetro de rotor de 3 ft, salida máxima de 2200 kW con una carga de 150 ft y una velocidad de 240 rpm. Determine el diámetro del rotor modelo y su velocidad si la potencia del modelo correspondiente es 9 kW y la carga es 25 pies.

12.39 Una instalación hidroeléctrica tiene disponibles una $H_T = 80$ m y $Q = 3$ m^3/s. Se propone usar una turbina Francis con las características operativas a óptima eficiencia que se ilustran en la figura 12.24. Determine la velocidad y el diámetro requeridos de la máquina.

12.40 Determine la salida de potencia, el tipo de turbina, y la velocidad aproximada para la instalación que se ilustra en la figura P12.40. Haga caso omiso de todas las pérdidas menores excepto las existentes en la válvula.

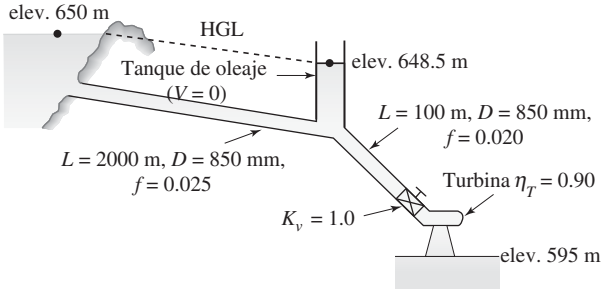


Fig. P12.40

12.41 Se requiere una turbina de agua para operar a 420 rpm con una carga neta de 3 m, a una descarga de 0.312 m^3/s y con una eficiencia de 0.9. Se han de realizar pruebas en un modelo a 1/6 de escala que opera a 2000 rpm usando agua. Para la turbina modelo, determine la caída de carga, el caudal, la potencia de salida y la eficiencia esperada.

12.42 Una rueda Pelton desarrolla 4.5 MW con una carga de 120 m a una velocidad de 200 rpm. El diámetro de la rueda es de ocho veces el diámetro del chorro. Use los datos experimentales de la figura 12.29 a máxima eficiencia para determinar el flujo requerido, el diámetro de la rueda, el diámetro de cada chorro, el número de chorros requeridos y la velocidad específica.

12.43 Una instalación de una turbina de reacción comúnmente incluye un tubo de aspiración (figura 12.26a) cuya función es convertir la energía cinética del fluido que sale del rotor en energía de flujo. Considere una turbina que opera con $Q = 85$ m^3/s y $H_T = 31.8$ m. El radio del tubo de aspiración a la salida del rotor es 2.5 m y el diámetro en el extremo del tubo es 5.0 m. Puede hacerse caso omiso de las pérdidas en el tubo de aspiración.

- **(a)** Para agua a 20 ºC, ¿cuál es la presión a la salida del rotor si en la figura P12.43, $z_2 - z_1 = 2.5$ m?
- **(b)** ¿Cuál es la $z_2 - z_1$ permisible si el número de cavitación permisible es $\sigma = 0.14$?

12.44 El sistema Ludington de bombeo/almacenamiento (figura P12.44) en la orilla oriental del lago Michigan está formado por seis tubos de carga que suministran una descarga combinada de 73 530 ft^3/s en el modo de operación de producción de energía eléctrica. Cada una de las turbinas genera 427 300 hp a una eficiencia de 0.85. ¿Qué diámetro de los tubos de carga se requiere para que el sistema opere en condiciones de diseño? Clasifique el tipo de turbina empleado.

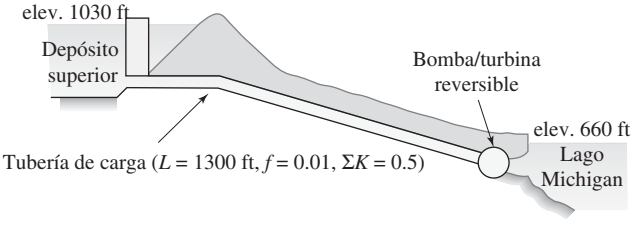


Fig. P12.44

12.45 Una turbina Francis de la misma familia que la representada en la figura 12.24 está operando a una velocidad de 480 rpm con una carga de 9.5 m. Determine el diámetro del rotor, la descarga y la potencia desarrollada si la turbina está operando a máxima eficiencia.

12.46 La carga disponible desde el nivel del depósito hasta las cuatro toberas de una rueda Pelton de rotores gemelos es de 305 metros. La longitud de la tubería de abastecimiento, o tubería de carga, es de 3 km con un factor de fricción $f = 0.02$ y $\Sigma K = 2.0$. La turbina desarrolla 10.4 MW con una eficiencia de 0.85.

(a) Si la carga a través de la turbina es 95% de la carga disponible, ¿cuál es el diámetro del tubo de carga?

(b) Si $C_v = 0.98$ para cada tobera, calcule el diámetro de cada chorro.

12.47 En un esquema hidroeléctrico proyectado de baja carga se dispone de 282 m^3/s de agua con una carga hidráulica de 3.7 m. Se propone usar turbinas Francis con una velocidad específica de 2.42, para la cual la velocidad rotacional es 50 rpm. Determine el número de unidades requeridas y la potencia a desarrollar por cada una de las máquinas. Suponga una eficiencia de 0.9.

12.48 Repita el problema 12.47 si las turbinas con propulsor se sustituyen por unidades Francis. Suponga una velocidad específica de 4.15 y una eficiencia de 0.9.

12.49 Una terrateniente ha construido un estanque elevado como se muestra en la figura P12.49. Ella estima que se dispone de 1200 L/min como flujo continuo y desea instalar una pequeña turbina Francis para generar electricidad para su propio uso.

(a) ¿Qué potencia del fluido se espera sea suministrada a la turbina?

(b) Si se ha de instalar una turbina similar a una cuyas características se muestran en la figura 12.24, ¿cuáles son la velocidad y el tamaño requerido para esta instalación?

(c) Usando una ecuación empírica apropiada, estime la eficiencia para esta instalación. ¿Qué potencia se espera sea suministrada al generador?

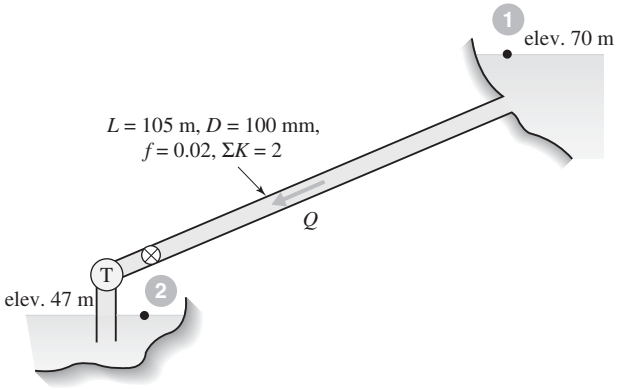


Fig. P12.49

12.50 Un diseño propuesto para un proyecto hidroeléctrico está basado en una descarga de 0.25 m^3/s a través de un tubo de carga y una turbina (figura P12.50). El factor de fricción puede suponerse constante, $f = 0.015$, y puede hacerse caso omiso de las pérdidas menores.

(a) Determine la potencia en kilowatts que puede esperarse de la instalación, suponiendo que la eficiencia de la turbina es de 0.85.

(b) Demuestre que el tipo de máquina a ser instalada es una turbina Francis si la velocidad de rotación deseada es de 1200 rpm.

(c) Determine el tamaño, la velocidad real y la potencia real de salida de la turbina seleccionada.

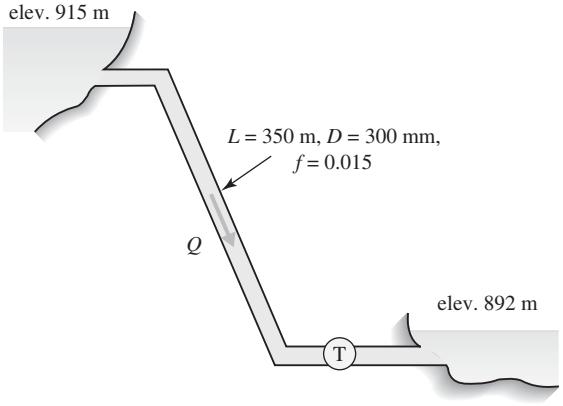


Fig. P12.50

Modelo a escala de un automóvil de carreras de Fórmula Uno en un túnel de viento. En el túnel se hacen pruebas para registrar mediciones de patrones de flujo, distribuciones de velocidad y presiones sobre la superficie del vehículo. Estas pruebas se utilizan para reducir la resistencia al avance, lo que resulta en una mayor velocidad del vehículo prototipo. (Archivos de All American Racers)

13

Mediciones en mecánica de fluidos

Esquema

13.1 Introducción
13.2 Medición de parámetros de flujo local
  13.2.1 Respuesta dinámica y cálculo de promedios
  13.2.2 Presión
  13.2.3 Velocidad
13.3 Medición del gasto
  13.3.1 Método de velocidad-área
  13.3.2 Medidores de presión diferencial
  13.3.3 Otros tipos de medidores de flujo
13.4 Visualización del flujo
  13.4.1 Trazadores
  13.4.2 Métodos del índice de refracción
13.5 Adquisición y análisis de datos
  13.5.1 Registro digital de datos
  13.5.2 Análisis de incertidumbre
  13.5.3 Análisis de regresión
13.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Describir cómo se miden los diversos parámetros de un flujo; éstos incluyen mediciones tomadas en una posición de flujo local, por ejemplo presión o velocidad, así como mediciones integradas tales como descarga o presión promediadas en una sección transversal
- Presentar las técnicas y el equipo empleado para visualizar los campos de flujo
- Introducir los conceptos del análisis de incertidumbre y de la propagación del error que resultan al colectar datos de laboratorio y de campo, y demostrar el uso del análisis de regresión en mediciones de flujo no lineal

13.1 INTRODUCCIÓN

En un laboratorio de ingeniería y en muchas situaciones industriales, la necesidad de medir las propiedades de los fluidos y los diversos parámetros de flujo, como presión, velocidad y descarga, es de gran importancia. En muchos casos estas necesidades son obvias, por ejemplo, el gasto en una tubería o canal de irrigación; la carga de contaminantes o de sedimento en un río; las presiones máximas en la superficie de un edificio alto o los patrones de flujo alrededor de ese edificio; la resistencia al avance en un automóvil o camión que se desplaza a altas velocidades; el campo de velocidad alrededor de un avión comercial; el perfil de la velocidad del viento arriba de un terreno montañoso; y el tamaño y la distribución de las olas en un océano o lago.

Las mediciones en mecánica de fluidos no son exclusivas de un ingeniero. Los médicos, para sus diagnósticos, están interesados en monitorear las funciones de los sistemas cardiovasculares y pulmonares en el cuerpo humano. El movimiento de fluidos en las industrias agrícola, del petróleo, del gas, química, de bebidas y de suministro de agua y de aguas residuales requiere grandes inversiones anualmente; las incertidumbres presentes en la medición de estos flujos pueden tener un impacto significativo en consideraciones materiales y monetarias.

Se han desarrollado muchos dispositivos para medir los parámetros de un flujo; obviamente, cada uno de ellos fue diseñado para servir a un propósito específico. Antes de emprender la tarea de medir, es importante definir claramente la necesidad de medir un parámetro particular. El conocimiento de la mecánica de fluidos fundamental y de los principios físicos involucrados es esencial para seleccionar un instrumento de medición apropiado y realizar una medición exitosa. Además, debemos reconocer que existen diferencias en los varios tipos de mediciones. Considere, por ejemplo, las lecturas de descarga que resultan de una medición de un perfil de velocidad integrado sobre una sección transversal; la velocidad que fluctúa puede promediarse respecto al tiempo en un lugar específico para obtener un valor medio. Por otra parte, las mediciones instantáneas de la velocidad en un volumen de muestreo muy pequeño pueden requerir que se observe la naturaleza transitoria de un flujo no permanente. El grado de refinamiento en el registro de un parámetro puede variar de una simple lectura visual en un manómetro o en una carátula al muestreo digital a alta velocidad de voltajes que representan numerosas variables.

El propósito de este capítulo es proporcionar al lector una introducción básica a los conceptos y técnicas aplicadas por ingenieros quienes miden parámetros de flujo ya sea en el laboratorio o en un ambiente industrial. Incluimos un repaso general de los métodos experimentales comúnmente empleados en la enseñanza de la mecánica de fluidos y en laboratorios de investigación; el tratamiento no es exhaustivo, pero se dan referencias para consultar información adicional. En las dos secciones siguientes presentamos los métodos y la instrumentación que se emplean para medir la presión, la velocidad y la descarga. A continuación damos una exposición de la visualización de un flujo, y la sección final está dedicada a la adquisición de datos y métodos para analizarlos.

13.2 MEDICIÓN DE PARÁMETROS DE FLUJO LOCAL

Una medición de flujo local significa que se mide una cantidad sobre un volumen de muestra relativamente pequeño del fluido. Comúnmente, el volumen es lo suficientemente pequeño para que podamos decir que la medición representa la magnitud de la cantidad en un punto del campo de flujo. Dos cantidades de flujo local son la presión y la velocidad; otras son la temperatura, la densidad y la viscosidad. Sólo

las dos primeras se estudian en esta sección; la medición de la temperatura no está considerada en este libro. La densidad y la viscosidad se determinan a partir de mediciones de temperatura y presión.

13.2.1 Respuesta dinámica y cálculo de promedios

Las mediciones de flujo pueden clasificarse según si el flujo es permanente o no permanente. Si la magnitud de una cantidad física permanece constante con el tiempo, este valor se conoce como valor de estado permanente. Por el contrario, si la cantidad cambia con el tiempo, la medición es transitoria, o no permanente. Una medición transitoria demanda un aparato de medición mucho más especializado. La mayoría de los instrumentos de medida requiere de un cierto tiempo para responder a la cantidad física detectada. En las mediciones transitorias este tiempo de respuesta debe ser mucho menor que el tiempo para que ocurra un cambio importante en la cantidad física. En mediciones de estado permanente el único interés es tomar una lectura después de que el sistema de medición tenga tiempo para responder a las condiciones de flujo. En muchas situaciones, por ejemplo, en un flujo turbulento, se desea obtener una medición de una cantidad promediada respecto al tiempo, aun cuando las condiciones de flujo local sean no permanentes; ejemplos son el esfuerzo de Reynolds y la intensidad de turbulencia. En esta situación, debe incluirse en la medición un mecanismo para promediar respecto al tiempo. Además, un instrumento debe ser lo suficientemente pequeño para medir la variación espacial del parámetro medido, por ejemplo la longitud de onda de una perturbación de presión. Generalmente, el problema de la resolución espacial y temporal debe resolverse al seleccionar una instrumentación compatible con la escala de flujo y con la escala de cualquier perturbación de flujo; vea Goldstein (1996) para una explicación más completa.

13.2.2 Presión

Las presiones en un fluido se miden de muchas formas diferentes. El tipo de instrumento utilizado depende de los niveles de precisión y detalle requeridos para la aplicación particular. Prácticamente todas las mediciones de presión están basadas ya sea en el principio del manómetro o en el concepto de la presión deformando un material sólido como un cristal, una membrana, un tubo o una placa, y luego convertir esa deformación en una señal eléctrica o lectura mecánica. Las mediciones de presión son en modo estático o en modo dinámico. Las presiones que dependen del tiempo resultan de la inestabilidad en el flujo y de perturbaciones de presión; éstas últimas son resultado de perturbaciones hidrodinámicas o acústicas. Es frecuente que las mediciones de presión estáticas se basen en valores medios promediados respecto al tiempo, puesto que la inestabilidad está siempre presente cuando el flujo es turbulento. A continuación describimos varios manómetros de presión y transductores representativos.

Manómetro. El manómetro se analizó en la sección 2.4.3. Es un instrumento simple y de poco costo para medir la presión estática, además de no tener piezas mecánicas móviles. Puede alcanzarse una alta precisión con el uso de un manómetro de tubo inclinado (figura 13.1a) o un micromanómetro (figura 2.6). Si la toma de presión está correctamente maquinada normal a la pared interna en un conducto o tubo sin rebabas, y el diámetro es lo suficientemente pequeño (por lo general de alrededor de 1 mm de diámetro), la presión estática se mide con precisión (figura 13.1b). A menudo las tomas se colocan circunferencialmente alrededor del conducto en forma de un anillo piezométrico para promediar cualquier tipo de irregularidades en el flujo.

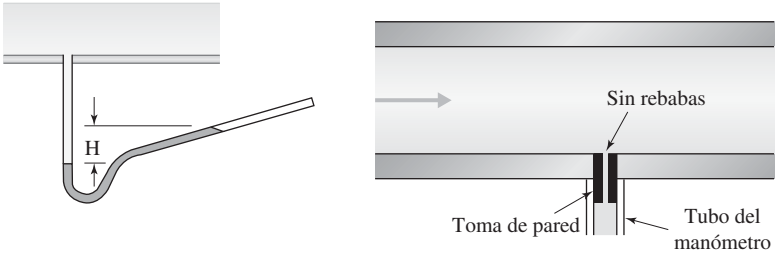


Fig. 13.1 Manómetro empleado para medir la presión: (a) manómetro de tubo inclinado; (b) abertura del piezómetro.

Manómetro de Bourdon. Un manómetro de poco costo para leer presiones estáticas relativamente grandes es el tubo de Bourdon (figura 13.2). Es un tubo curvo y aplanado que se expande hacia fuera cuando se somete a una presión interna. Una conexión articulada mecánica conectada a un manómetro de carátula dará una lectura directa de la presión. Cuando están bien diseñados, estos manómetros darán una buena precisión pero no deben usarse en situaciones donde estén presentes grandes pulsaciones de presión ya que puede dañarse el tubo.

Transductor de presión. Los transductores de presión son dispositivos electromecánicos diseñados para medir presiones hidrodinámicas o acústicas permanentes o no permanentes. Están formados por membranas flexibles o elementos piezoeléctricos que responden a cambios de presión (figura 13.3). Todos ellos requieren circuitos electrónicos complementarios, que se agregan a sus costos. Como su salida es una señal eléctrica, pueden interconectarse fácilmente con sistemas de adquisición de datos para su almacenamiento y recuperación de datos automática.

El micrófono de condensador (figura 13.3a) se utiliza por lo general en aeronáutica. Básicamente es un condensador cuya capacitancia varía conforme la membrana se deflecciona debido a una presión aplicada. Estos transductores son muy delicados, puesto que miden presiones muy pequeñas (100 μbar) y por tanto no son apropiados para utilizarlos en líquidos. El transductor piezoeléctrico (figura 13.3b), comúnmente empleado con líquidos, tiene un material cristalino (por ejemplo, cuarzo) que produce un campo eléctrico cuando se deforma. Estas robustas unidades pueden hacerse muy pequeñas (son posibles diámetros hasta de 2.5 mm) y

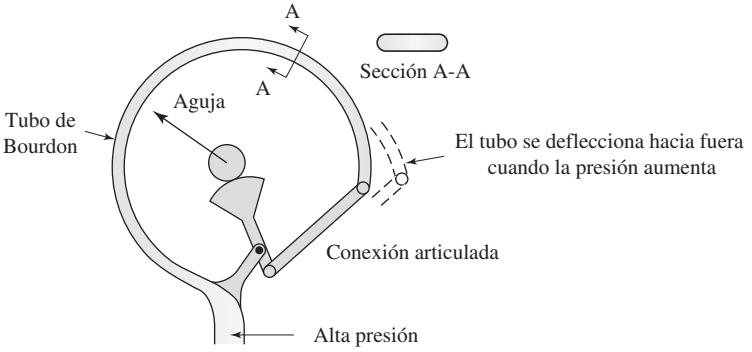


Fig. 13.2 Manómetro de presión de tubo de Bourdon.

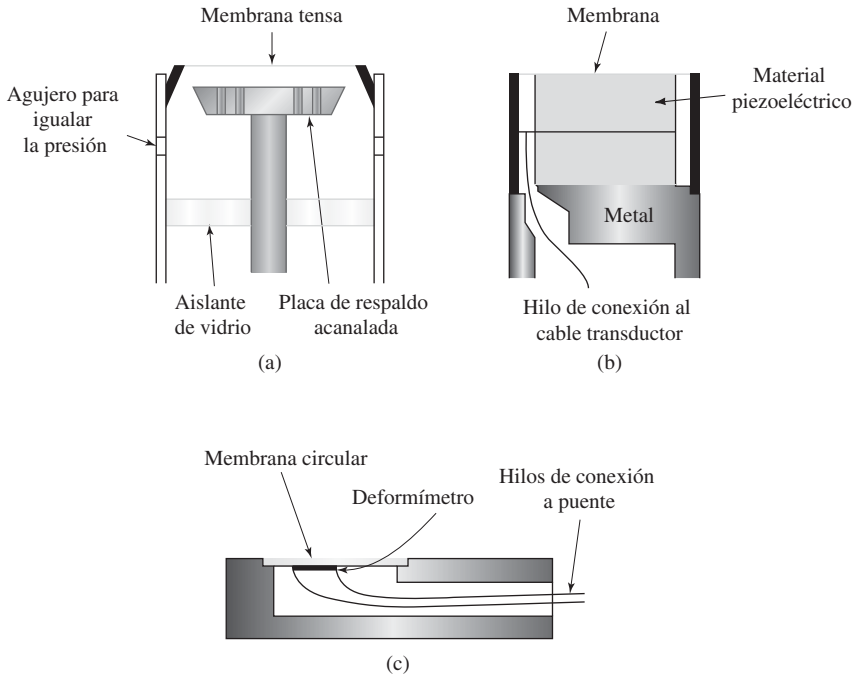


Fig. 13.3 Transductores de presión: (a) micrófono de condensador; (b) transductor de presión piezoeléctrico; (c) transductor deformimétrico.

pueden montarse al ras con la pared de un tubo. Responden muy rápidamente y pueden medir una amplia variedad de presiones dinámicas (vacío total hasta 20 MPa). Un transductor deformimétrico (figura 13.3c) es otro tipo de transductor empleado con líquidos, que utiliza un deformímetro unido a la membrana que convierte su deflexión en una señal eléctrica. Está sujeto a la deriva de la corriente continua y a cambios de sensibilidad, pero es robusto, confiable e insensible a vibraciones.

13.2.3 Velocidad

La velocidad de un fluido es de primordial interés en un flujo. Al medir la velocidad podemos calcular el gasto y quizá formar una imagen del patrón de las líneas de corriente, identificando regiones de flujo separado, regiones de flujo estancado y otras características de un flujo. Existen tres categorías de mediciones de la velocidad: local (en un punto), promediada espacialmente, y mediciones de campo de la velocidad. La exposición en esta sección es respecto a las primeras dos; la tercera se trata en la sección 13.4.

Las velocidades locales en realidad se miden en una pequeña región del flujo. La precisión requerida varía, dependiendo de la aplicación deseada. Por ejemplo, las velocidades promediadas respecto al tiempo medidas en varios puntos en una sección transversal de un flujo pueden registrarse de modo que la distribución de la velocidad pueda integrarse para obtener la descarga, o gasto. Por otra parte, puede ser necesario determinar la historia de las componentes de la velocidad turbulenta dependientes del tiempo en un lugar particular en una región del flujo.

Los instrumentos para las mediciones de la velocidad varían considerablemente en su complejidad y costo, dependiendo del tipo de medición requerido. El deseo de medir las componentes de la velocidad turbulenta no permanentes a una escala local relativamente pequeña, ha popularizado el uso del anemómetro térmico así como el velocímetro láser-Doppler. Los instrumentos menos complicados que por lo general miden la velocidad sobre una región espacial grande son, por ejemplo, la sonda estática Pitot y el anemómetro de hélice; son más apropiados para medir velocidades que son permanentes o que varían lentamente con el tiempo.

Medición de la velocidad de partículas. Las partículas neutralmente flotantes pueden sembrarse en un flujo para obtener una imagen visual del campo de flujo; dos de éstas, burbujas de hidrógeno en agua y partículas en aire, se estudian en la sección 13.4. Otras partículas trazadoras que se usan en agua son cuentas de plástico de flotación neutra, gotitas inmiscibles teñidas y flotadores colocados en una superficie de líquido o a una profundidad deseada. Es importante verificar si la partícula está realmente siguiendo la trayectoria del movimiento del fluido. Partículas muy pequeñas que son impurezas naturales en un flujo pueden ser observadas con un equipo óptico apropiado para medir velocidades en muchos flujos, en especial en campos de flujo microscópicos.

Sonda estática Pitot. La sonda estática Pitot se analizó en la sección 3.4. Mide la velocidad local media aplicando la ecuación de Bernoulli. Suponiendo un flujo permanente y sin fricción, la velocidad u está dada por

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T - p)} \tag{13.2.1}$$

en la que p_T es la presión total o de estancamiento y p es la presión estática. La ecuación 13.2.1 es válida sólo si la sonda no perturba el flujo en forma considerable y si está alineada con la dirección de flujo, de modo que la velocidad u sea paralela a la sonda Pitot. Un diseño particular, llamado *tubo de Prandtl*, se ilustra en la figura 13.4. Tiene los agujeros de presión estática posicionados a lo largo del tubo horizontal, de modo que la presión reducida resultante del flujo más allá de la nariz es equilibrada por la presión incrementada debida al vástago vertical. Comúnmente, el número de Reynolds basado en el diámetro del tubo Pitot debe estar en la cercanía

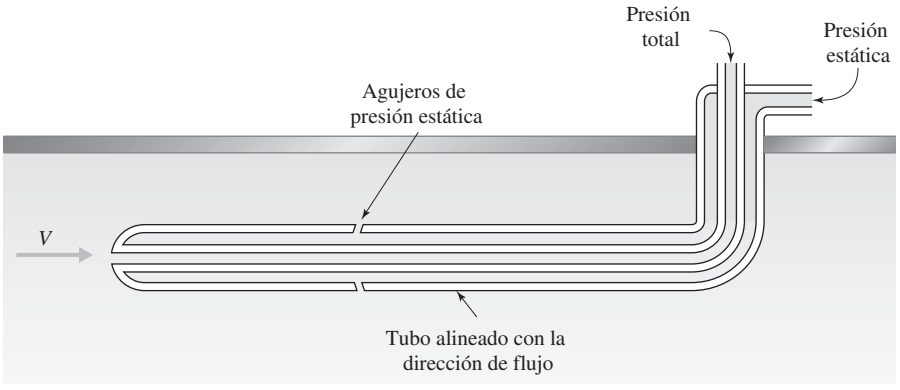


Fig. 13.4 Sonda estática Pitot.

de 1000, para que los efectos viscosos no sean significativos. Si el flujo no es paralelo a la cabeza de la sonda, el error de medición es alrededor de 1% a un ángulo de guiñada de 5º, y si el ángulo de guiñada es mayor que 5º, el error de medición puede ser considerable. Cuando la sonda se coloca cerca de una pared, las líneas de corriente son desviadas por la interacción de la sonda con la pared; ocurren errores cuando la distancia entre el eje de la sonda y la pared es menor que dos diámetros del tubo. En un flujo turbulento, la presión real es menor que el valor detectado; generalmente, los resultados son confiables si la intensidad de fluctuación es menor que 10%.

Otras sondas de diseño similar son el *tubo Pitot* o *tubo de impacto*, el *tubo de Preston*, el *tubo estático* y el *medidor de guiñada.* El tubo Pitot mide la presión total, el tubo estático la presión estática, y el medidor de guiñada, la dirección de flujo. El tubo Preston es una forma especial del tubo Pitot que se ha usado para la medición del esfuerzo cortante en la pared en capas límite sobre paredes lisas; básicamente, es una aguja hipodérmica que detecta la velocidad media adyacente a la pared. Vea Bean (1971) para los detalles relacionados con la calibración y el diseño.

Anemómetro de copa o de hélice. Los anemómetros de copa o de hélice se utilizan para medir la velocidad ya sea de gases o de líquidos. Son relativamente grandes y, como resultado de ello, la medición se promedia espacialmente sobre un área relativamente grande. Estos anemómetros se usan para muchas aplicaciones donde no se requiere de una precisión extrema. Un tipo de anemómetro de copa, el *medidor de corriente* (figura 13.5a), mide la velocidad en agua; aparatos similares pueden medir la velocidad del aire. Los anemómetros de copa siempre giran en un sentido y, por tanto, no pueden dar la dirección del flujo. Por otra parte, el

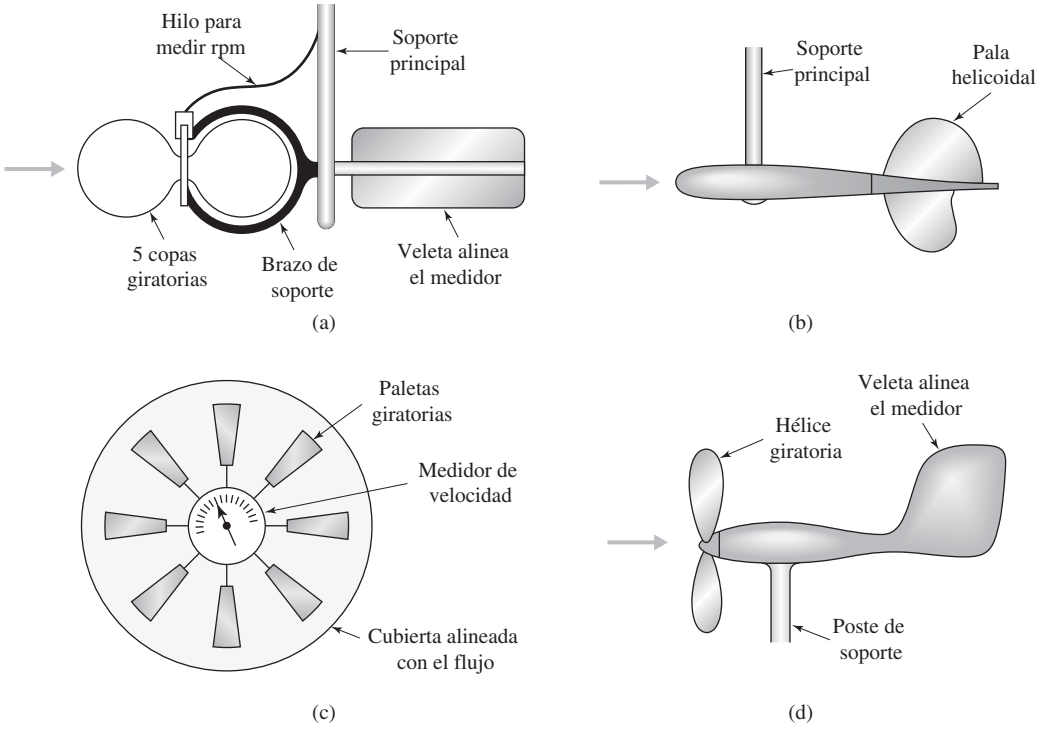


Fig. 13.5 Anemómetros: (a) medidor de corriente; (b) anemómetro de hélice; (c) anemómetro de paletas entubado; (d) anemómetro de veleta.

anemómetro de hélice invertirá la rotación cuando el flujo se invierte (figura 13.5b); no obstante, en contraste con los anemómetros de copa, deben estar alineados con la dirección de flujo. Un anemómetro de hélice entubado para medir velocidades del aire se muestra en la figura 13.5c. Las hélices no entubadas también se utilizan; un ejemplo es la veleta (figura 13.5d). Las hélices también se colocan dentro de tubos y se usan como medidores de flujo. En todos estos dispositivos, contadores o dispositivos de salida de lecturas electromecánicos conectados a sensores dan la frecuencia rotacional, que se correlaciona con la velocidad por medio de una prueba de calibración.

Anemómetro térmico. El *anemómetro térmico* (de hilo caliente) se utiliza para medir la velocidad en aire. Consta de un pequeño hilo, comúnmente hecho de tungsteno, platino o platino-iridio, que está aislado y montado en soportes (figura 13.6). El sensor de hilo es por lo general de 2 mm de longitud y 5 μm de diámetro, aun cuando se han utilizado hilos más pequeños (0.2 mm de largo, 1 μm de diámetro). Cuando el hilo se calienta, el anemómetro detecta los cambios en la transferencia de calor conforme varía la velocidad del flujo; una temperatura del hilo representativa es 250 ºC.

El circuito más común es el que opera en modo de temperatura constante (figura 13.6); versiones anteriores utilizaban una configuración de corriente constante. Conforme se aumenta la velocidad después de la sonda, el hilo caliente tiende a enfriarse y con ello trata de bajar la temperatura y la resistencia a través del hilo. El circuito aumenta entonces la corriente para ajustar la resistencia y la temperatura de la sonda a sus valores iniciales, un proceso que parece ser instantáneo. Ya sea el voltaje del amplificador o la corriente del sensor se correlacionan con la velocidad después de la sonda. La salida es no lineal respecto a la velocidad, y la sensibilidad disminuye conforme aumenta la velocidad; es frecuente que la señal se linealice electrónicamente. La sensibilidad como un porcentaje de la lectura permanece casi constante, de modo que puede medirse una muy amplia variedad de velocidades. Cuando la intensidad de fluctuación es menor a 20%, si el flujo es incompresible y si la temperatura y densidad del fluido permanecen constantes, el anemómetro de hilo caliente puede usarse para medir una componente de la velocidad. Se puede entonces calcular la velocidad media, la intensidad de fluctuación y el espectro de turbulencia. El anemómetro de un solo hilo detecta únicamente la componente normal de la velocidad; si el hilo está bien orientado, pueden medirse la componente media y las fluctuaciones en la dirección de flujo media. Se toman mediciones de dos componentes usando una sonda con hilos cruzados en forma de "×" para dar la correlación $\overline{u'v'}$ necesaria en las mediciones de la turbulencia (u' y v' son las pequeñas perturbaciones). Pueden medirse tres componentes ya sea haciendo girar la sonda en × o agregando un tercer hilo.

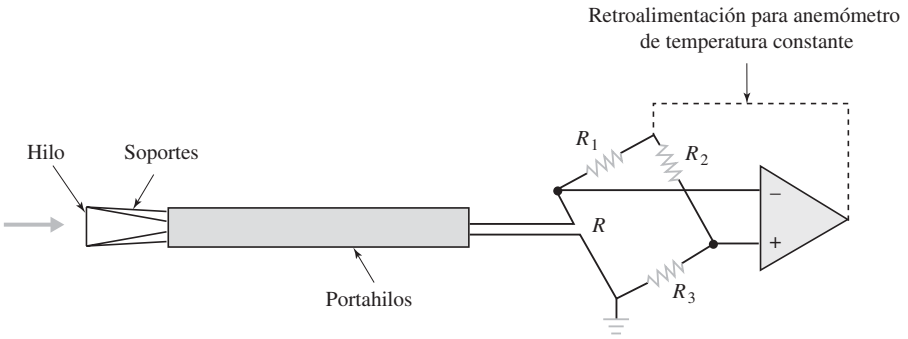


Fig. 13.6 Anemómetro térmico.

En líquidos y gases que contengan partículas sólidas, la sonda de hilo se sustituye por un sensor de película cilíndrico más robusto, que opera con el mismo principio que la sonda de hilo caliente, pero genera turbulencia en su estela debido a su mayor tamaño. Esta turbulencia autogenerada puede limitar la capacidad de la sonda para medir intensidades de fluctuación reales en el campo de flujo. Además de medir velocidades, los anemómetros térmicos han sido adaptados para monitorear presiones y descargas.

Velocímetro de láser-Doppler. Un dispositivo que puede usarse ventajosamente cuando se desea que la sonda no se encuentre sumergida en el flujo es el *velocímetro láser-Doppler* (LDV). El LDV más común es el de tipo de doble haz, que se muestra en la figura 13.7. La frecuencia de la luz dispersa es medida por el fotodetector, que convierte la luz recibida en una señal eléctrica. Una forma simplificada de entender el principio es como sigue: En la intersección de los dos haces se forma un patrón de franjas con separación de franjas Δx. La luz dispersada por las partículas que pasan a través del patrón de franjas es modulada con una frecuencia f, que es directamente proporcional a la componente de la velocidad u normal a las franjas:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda f}{2\ \text{sen}(\theta/2)} \tag{13.2.2}$$

en la que λ es la longitud de onda del rayo láser y θ es el ángulo del haz. Es posible la detección de la inversión de flujo si se utiliza un patrón de franjas móvil. El volumen de medición elipsoidal es muy pequeño, del orden de 0.1 mm de diámetro y 1.0 mm de longitud. Un análisis completo del fenómeno requiere de una descripción detallada de la óptica de ondas, que está fuera del ámbito de este libro.

Las velocidades en líquidos y gases pueden medirse con un LDV. Normalmente, los líquidos contienen suficientes impurezas que actúan como agentes de inoculación naturales, pero por lo general los gases son inoculados en forma artificial con gotitas de líquido o partículas sólidas extremadamente pequeñas. Comúnmente, un LDV puede medir velocidades que varían de 2 mm/s hasta la escala supersónica. La respuesta de frecuencia se extiende a 30 kHz, que hace posible medir componentes

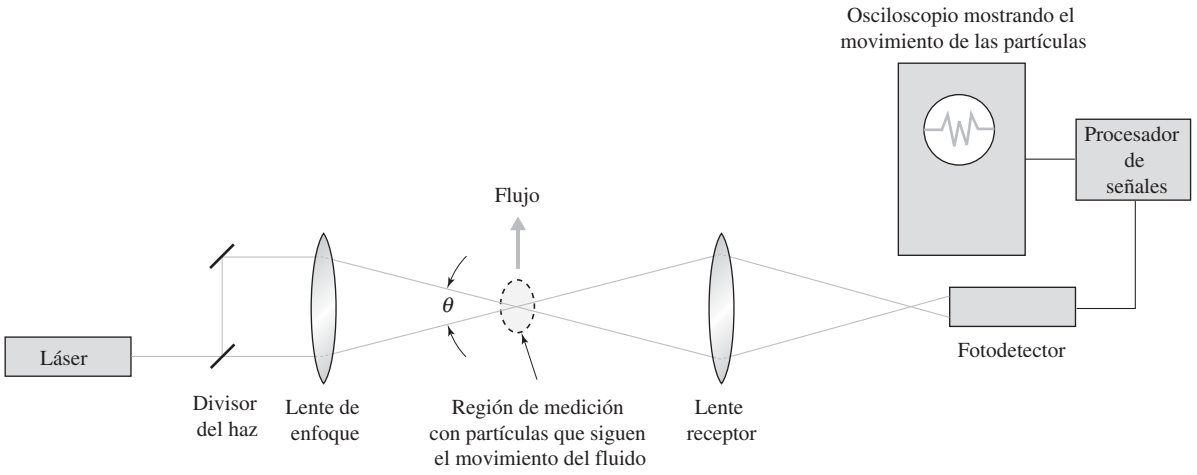


Fig. 13.7 Velocímetro láser-Doppler de doble haz.

de velocidad turbulenta. En contraste con el anemómetro térmico, el LDV no requiere calibración y mide la inversión de flujo con relativa facilidad. El costo inicial de un LDV es alto y se requiere de una numerosa instrumentación electrónica para procesar la señal de salida: el que más se usa es un procesador de señales de tipo contador. El LDV se ha utilizado para medir flujos supersónicos, flujos en bombas, convección libre natural, flujos de vapor y en turbinas de gas, flujos de combustiones, circulación sanguínea y flujos en canales abiertos.

13.3 MEDICIÓN DEL GASTO

La medición de un gasto, también conocido como descarga o flujo volumétrico, es una de las mediciones más comunes hechas en fluidos en movimiento. Se han inventado o adaptado numerosos dispositivos para medir flujos, que varían ampliamente en refinamiento, tamaño y precisión. Básicamente, los instrumentos para medir un gasto pueden dividirse en los que emplean un medio directo o "cantidad" de medición, y los que son indirectos, es decir, los así llamados medidores de flujo. Los medidores de cantidad pesan o miden un volumen de fluido durante un incremento de tiempo conocido; como ejemplos están los tanques para pesar líquidos, los pistones de movimiento alternativo, y para gases, fuelles y el tambor sellado con líquido. Estos dispositivos directos en general son relativamente grandes y poseen características deficientes de respuesta a la frecuencia, pero tienen alta precisión y exactitud y, como consecuencia, se usan con más frecuencia como estándares "fundamentales" para la calibración de dispositivos de medición indirecta.

Los medidores indirectos o de velocidad constan de dos componentes: la parte primaria, que está en contacto con el fluido, y la parte secundaria, que convierte la reacción de la parte primaria en una cantidad medible. Pueden clasificarse de acuerdo con un principio de operación característico: medición de velocidad-área, correlaciones de caída de presión, arrastre hidrodinámico, y otros semejantes. Los medidores de velocidad son de costo relativamente bajo, ocupan poco espacio y por tanto se encuentran por lo común en laboratorios industriales y de investigación. A continuación se estudian varios de los tipos más comunes.

13.3.1 Método de velocidad-área

Varios de los dispositivos para la medición de la velocidad que se estudiaron en la sección 13.2.3 pueden insertarse en una sección transversal de un flujo y usarse para medir el gasto. Entonces, un anemómetro térmico, un velocímetro de láser-Doppler, un tubo estático Pitot, o un anemómetro pueden insertarse en un tubo o conducto de área conocida y calibrarse para medir el gasto. En una forma que no requiere calibración y para flujo permanente, una distribución de velocidad puede ser medida al mover en forma sistemática una sonda de velocidad por toda la sección transversal de un flujo, o usando un llamado "rastrillo" donde las velocidades locales se miden de manera simultánea. Posteriormente, una integración numérica del perfil de la velocidad sobre el área de sección transversal dará la descarga. Esta técnica se ha empleado tanto en flujos en conductos cerrados como en canales abiertos.

13.3.2 Medidores de presión diferencial

Los medidores de presión diferencial son muy utilizados en aplicaciones industriales y en laboratorios por su simplicidad, confiabilidad, construcción robusta y bajo

costo. Tres tipos de uso común se estudian en esta sección: el medidor de orificio, el medidor de flujo Venturi y la tobera de flujo. La operación de éstos está basada en el principio de una obstrucción al flujo, que se encuentre presente en un conducto o tubo y, en consecuencia, existirá un diferencial de presión a través de la obstrucción. Esta caída de presión puede correlacionarse con la descarga por medio de una calibración y, con posterioridad, la curva presión-descarga puede usarse para determinar la descarga al leer la presión diferencial. En esta sección tratamos sólo con la descarga de fluidos incompresibles en tubos circulares.

La relación de descarga fundamental para el medidor de presión diferencial puede describirse en la forma siguiente. La figura 13.8 representa un medidor de orificio de placa delgada, que puede considerarse como un medidor de presión diferencial representativo. Un flujo permanente ocurre en un conducto circular, encuentra el orificio restrictivo con área A_0 y emite un chorro corriente abajo. Corriente abajo de la restricción, las líneas de corriente convergen para formar un área de flujo mínima A_c, llamada *vena contracta*. Las tomas de presión están localizadas en dos posiciones: corriente arriba de la restricción en la región de flujo no perturbada (ubicación 1) y corriente abajo en alguna ubicación en la cercanía de la vena contracta (ubicación 2). Suponiendo un fluido incompresible y sin fricción, la ecuación de Bernoulli aplicada a lo largo de la línea de corriente central de la ubicación corriente arriba a la vena contracta es

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\gamma} + z_c \tag{13.3.1}$$

Del mismo modo, la ecuación de continuidad es

$$V_1 A_1 = V_c A_c \tag{13.3.2}$$

Combinando las ecuaciones 13.3.1 y 13.3.2 y despejando V_c tendremos

$$V_c = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_c)}{1 - (A_c/A_1)^2}} \tag{13.3.3}$$

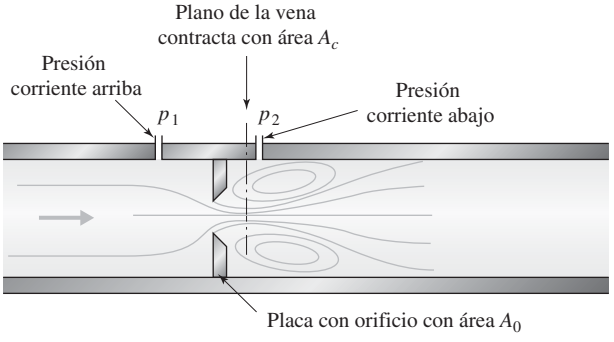


Fig. 13.8 Flujo a través de un medidor de orificio.

en la que

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \qquad h_c = \frac{p_c}{\gamma} + z_c \tag{13.3.4}$$

La descarga ideal Q_i es igual al área multiplicada por la velocidad promedio en la vena contracta:

$$\begin{aligned} Q_i &= A_c V_c \\ &= \frac{A_c}{\sqrt{1 - (A_c/A_1)^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \end{aligned} \tag{13.3.5}$$

La descarga real difiere de la ideal por dos razones principales. Debido al flujo de fluido real, la fricción hace que la velocidad en la línea centro sea mayor que la velocidad promedio en cada sección transversal. En segundo término, la carga piezométrica h_c, evaluada en la vena contracta en la relación, es sustituida con h_2, la lectura conocida en la toma de presión corriente abajo. También, como el área de la vena contracta es desconocida, es conveniente en la ecuación 13.3.5 sustituir A_c por $C_c A_0$, donde C_c es el coeficiente de contracción y A_0 es el área de la abertura del orificio. Estas anomalías se toman en cuenta al introducir un coeficiente de descarga C_d, que es el producto del coeficiente de contracción y un coeficiente de velocidad, de modo que la descarga real Q está dada por la relación

$$Q = \frac{C_d A_0}{\sqrt{1 - (C_c A_0/A_1)^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \tag{13.3.6}$$

Para una sección transversal circular, que es común para la mayoría de medidores de presión diferencial, es conveniente introducir la razón entre diámetros

$$\beta = \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} = \frac{D_0}{D} \tag{13.3.7}$$

donde D es el diámetro del tubo. Una forma conveniente de expresar la ecuación 13.3.6 es

$$Q = K A_0 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \tag{13.3.8}$$

en la que K es el coeficiente de flujo

$$K = \frac{C_d}{\sqrt{1 - C_c^2 \beta^4}} \tag{13.3.9}$$

Un análisis dimensional revelaría que C_d y K son dependientes del número de Reynolds. Es conveniente evaluar el número de Reynolds ya sea en la región de aproximación o en la obstrucción.

Medidor de orificio. Un medidor de orificio de placa delgada (figura 13.9) por lo general se manufactura en el intervalo $0.2 \leq \beta \leq 0.8$. En la figura, se muestran dos medios para ubicar las tomas de presión: (1) tomas con brida, posicionadas 25 mm corriente arriba y corriente abajo de la placa de orificio, y (2) tomas colocadas un diámetro corriente arriba y medio diámetro corriente abajo de la placa. Se prefiere la segunda configuración porque puede detectar una presión diferencial más grande, y se apega mejor a las leyes de similitud geométrica. Una tercera configuración, que no se muestra en la figura, tiene las tomas de presión ubicadas en la pared del tubo inmediatamente corriente arriba y corriente abajo del orificio; las tomas colocadas en este lugar reciben el nombre de tomas de esquina.

La figura 13.10 muestra valores determinados en forma experimental del coeficiente de flujo K para orificios como función de β y Re_0. Estos datos se obtuvieron usando tomas de esquina; no obstante, los datos en tomas con brida o con tomas a $D : D/2$ no podrían distinguirse cuando se grafiquen en la figura 13.10. Si se desea una mayor precisión, los datos numéricos para las diferentes tomas aparecen en la obra de Bean (1971). Observe que para una β determinada, K se hace casi constante a números de Reynolds altos, pero a medida que el número de Reynolds disminuye, K aumenta primero a un máximo y a continuación disminuye. Los valores máximos de K se encuentran a números de Reynolds entre 100 y 1000, dependiendo del valor de β; aquí K está dominada por el área reducida de la vena contracta.

Si se conoce la descarga, se conoce el número de Reynolds en el orificio. Por tanto, con la figura 13.10 se puede leer K directamente y luego de la ecuación 13.3.8 se determina $(h_1 - h_2)$. No obstante, es más probable que utilicemos la figura en conjunto con la ecuación 13.3.8 para determinar el gasto, dado que $(h_1 - h_2)$ ha sido leída de un manómetro conectado o transductor de presión. En esa situación, K no se conoce de antemano, puesto que depende de Re_0. Podemos inicialmente estimar K con base en un Re_0 supuesto (por lo general, suponemos que Re_0 es grande), y posteriormente mediante prueba y error mejoramos esa estimación por sustitución sucesiva en la ecuación 13.3.8.

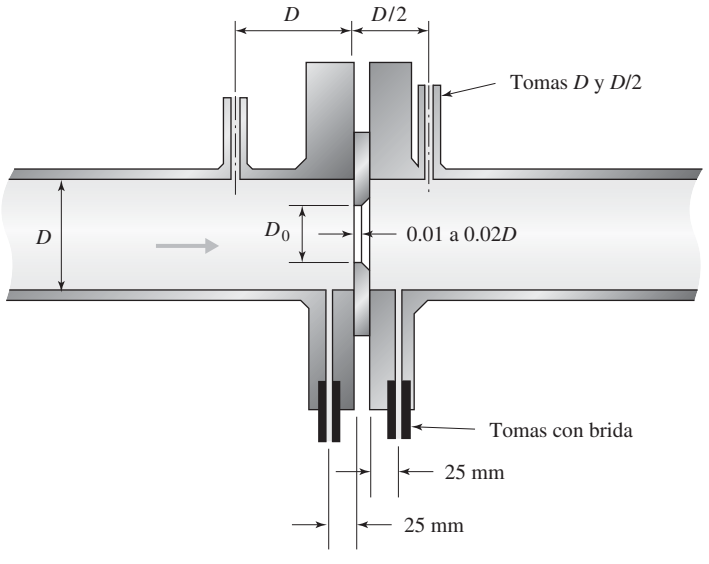


Fig. 13.9 Detalles de un medidor de orificio de placa delgada. (FLUID MECHANICS MEASUREMENTS de G.E. Mattingly. Copyright 1996 de Taylor & Francis Group LLC-Books. Reproducida con permiso de Taylor & Francis Group LLC-Books en el formato Textbook vía Copyright Clearance Center.)

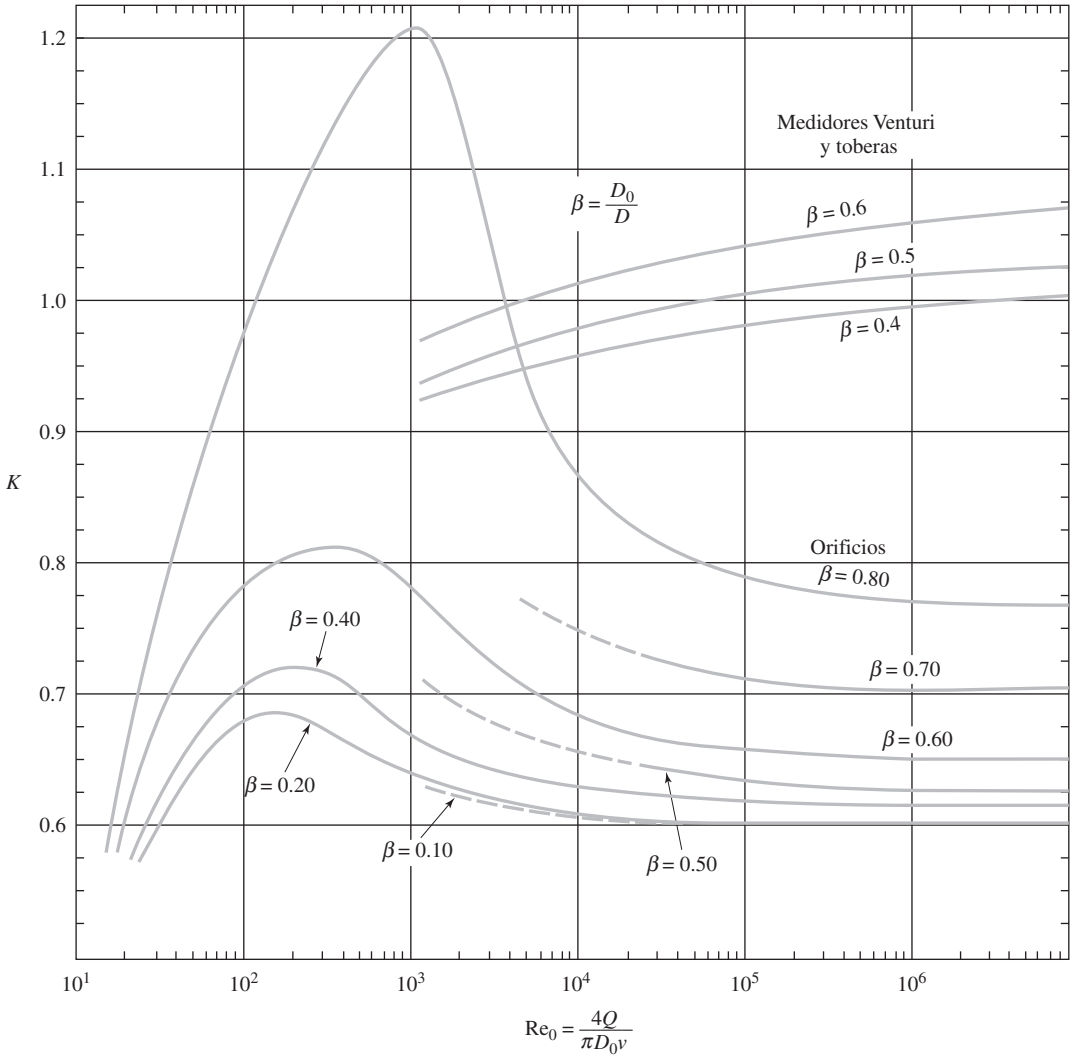


Fig. 13.10 Coeficiente de flujo K contra el número de Reynolds para medidores de orificio, de tobera y Venturi. (Adaptada de Engineering Fluid Mechanics, Robertson y Crowe, ® 1990 John Wiley & Sons, Inc., New York. Reproducida con permiso de John Wiley & Sons, Inc.)

No obstante, si han de tomarse lecturas repetidas, es más conveniente determinar una fórmula de calibración de la forma

$$Q = C(h_1 - h_2)^m \tag{13.3.10}$$

en la que C y m son constantes determinadas por un criterio de "mejor ajuste". Vea los detalles de un criterio bien conocido en la sección 13.5.3, el método de los mínimos cuadrados.

El medidor de orificio se ha convertido en el medidor diferencial más utilizado para medir gastos en líquidos. Esto es entendible, porque es relativamente barato y

puede colocarse con facilidad en un tubo existente. Una desventaja es que produce una pérdida de carga grande que no puede ser recuperada corriente abajo del orificio.

Medidor Venturi. El medidor Venturi tiene una forma que trata de imitar los patrones de flujo a través de una obstrucción perfilada en un tubo. El tipo de medidor Venturi clásico, o de Herschel, raras veces se usa actualmente porque sus dimensiones son bastante grandes, haciéndolo engorroso para instalarlo y costoso en su fabricación. Está construido con una contracción cónica de entrada a 21°, seguida por una garganta cilíndrica corta, que conduce a una expansión cónica de salida a 7° u 8°. El coeficiente de descarga es casi unitario. En contraste, el tubo Venturi contemporáneo, que se muestra en la figura 13.11, consta de una sección de entrada de tobera de flujo estándar [norma ISA 1932 (Bean, 1971)] y una expansión cónica de salida no mayor de 30°. Su intervalo recomendado de números de Reynolds está limitado de 1.5×10^5 a 2×10^6.

La ecuación 13.3.8 es válida para el medidor Venturi y también para el de orificio; los valores representativos del coeficiente de flujo K se muestran en la figura 13.10. Debido al perfilado del paso de flujo, la pérdida de carga en el medidor Venturi es mucho menor que en el de orificio. La vena contracta no está presente y, en consecuencia, el coeficiente de descarga C_d permanece cercano a la unidad.

Tobera de flujo. La tobera de flujo está ilustrada en la figura 13.12. Consta de una forma estandarizada con tomas de presión comúnmente situadas a un diámetro corriente arriba de la entrada y a medio diámetro corriente abajo. Existen dos formas estándar, ya sea el radio largo o el radio corto. Debido a la falta de una sección de expansión corriente abajo de la tobera, la pérdida de carga total es similar a la de un orificio, excepto que la vena contracta casi está eliminada y el coeficiente de descarga es aproximadamente la unidad. Del mismo modo, cuando las tomas de presión están situadas a D:$D/2$, el coeficiente de flujo K varía con el número de Reynolds de un modo casi idéntico al del medidor Venturi, como se muestra en la figura 13.10. La boquilla de flujo tiene una ventaja sobre la placa con orificio en que es menos susceptible a la erosión y al desgaste, y con relación al medidor Venturi, es menos costosa y más sencilla de instalar.

Medidor de codo. Es posible fabricar un medidor relativamente sencillo si se ubican las tomas de presión en la parte externa y en la interna de un codo de un tubo (figura 13.13). Al aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento lineal a un volumen de control que comprenda el fluido en el codo (o la ecuación de Euler normal a las líneas de corriente), se puede deducir la ecuación de flujo

$$Q = KA\sqrt{\frac{R}{D}\frac{\Delta p}{\rho}} \tag{13.3.11}$$

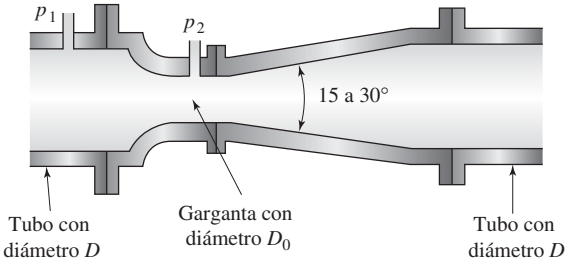


Fig. 13.11 Medidor Venturi.

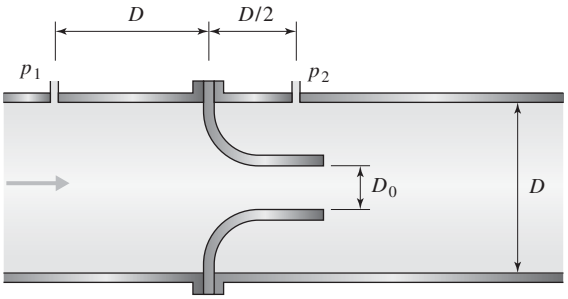


Fig. 13.12 Tobera de flujo.

en la que R es el radio de curvatura del codo y Δp es la diferencia de presión generada por fuerza centrífuga a través del codo. El coeficiente de flujo K puede determinarse con más precisión mediante la calibración del medidor en el lugar. No obstante, se ha reportado una relación para K (Bean, 1971) para codos a 90º con tomas de presión ubicadas en un plano radial a 45º de la entrada:

$$K = 1 - \frac{6.5}{\sqrt{\text{Re}}} \tag{13.3.12}$$

que es válida cuando $10^4 \leq \text{Re} = VD/\nu \leq 10^6$, y $R/D \geq 1.5$. El medidor de codo cuesta menos que cualquiera de los medidores de presión diferencial; generalmente no contribuye a la pérdida de carga total del sistema de tuberías en vista de que en una tubería con frecuencia existen codos.

13.3.3 Otros tipos de medidores de flujo

Medidor de turbina. El medidor de turbina consta de una hélice montada dentro de un conducto y gira por la acción del fluido en movimiento. La velocidad angular de la hélice está correlacionada por la descarga; la rotación angular se mide en una forma idéntica a la del anemómetro estudiado en la sección 13.2.3. Grados de precisión hasta de $\pm$ 0.25% del gasto se pueden alcanzar en un intervalo de descarga relativamente grande (Goldstein, 1996). Los efectos viscosos son un factor limitante en el extremo bajo mientras que, en el extremo alto, la precisión está limitada por la interacción entre las puntas de las aspas y los sensores electrónicos. Cada tipo de medidor de turbina debe ser calibrado en forma individual. Comúnmente se emplean para monitorear gastos en líneas de suministro de combustible.

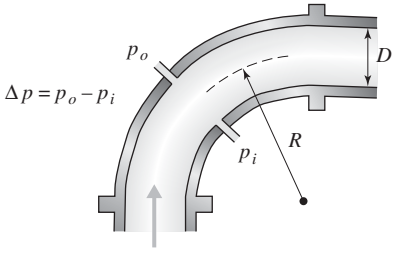


Fig. 13.13 Medidor de codo.

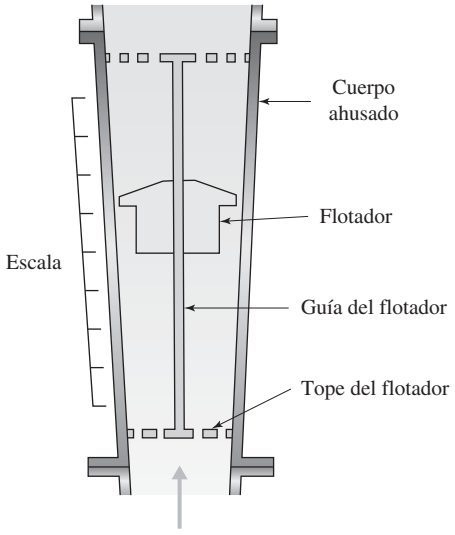


Fig. 13.14 Rotámetro.

Rotámetro. El rotámetro consta de un tubo ahusado en el que el flujo se dirige verticalmente hacia arriba (figura 13.14). Un flotador se mueve hacia arriba o hacia abajo en respuesta al gasto hasta que llega a una posición donde la fuerza de arrastre sobre el flotador está en equilibrio con su peso sumergido. La calibración consiste en correlacionar la elevación vertical del flotador con la descarga. Con un diseño apropiado, la posición del flotador puede hacerse linealmente proporcional a la descarga o, si se desea, puede formularse otra relación como en el caso de una posición logarítmicamente proporcional a la descarga. La pérdida de carga depende de la pérdida de fricción en el tubo más la pérdida a través del elemento flotador. El rotámetro no tiene una precisión tan buena como los medidores de presión diferencial; por lo general, se encuentra en el intervalo de 5% de una escala completa.

Medidor de disco. La figura 13.15 muestra un medidor de disco, que consta de un disco suspendido en un puntal de soporte inmerso en el flujo. El puntal está conectado a un brazo de palanca, o alternativamente, tiene un medidor de deformación adherido a su superficie. El arrastre del fluido sobre el disco hará que el puntal se flexione ligeramente, y la fuerza de arrastre registrada puede relacionarse con la descarga. El conjunto debe ser lo suficientemente rígido para que el arrastre pueda medirse sin movimiento o rotación del disco; de otro modo se alterarían las características del arrastre. Una ventaja de este dispositivo es que es posible registrar la inversión de flujo al medir el sentido de la fuerza de arrastre; por tanto, puede usarse como un medidor de flujo bidireccional. Los medidores de arrastre son bastante robustos y pueden usarse para medir descargas en fluidos cargados de sedimentos.

Medidor de flujo electromagnético. Éste es un dispositivo no invasivo que consiste en una configuración de bobinas magnéticas y electrodos que rodean al tubo (figura 13.16). Las bobinas están aisladas del fluido y los electrodos hacen contacto con el fluido. Suficientes electrolitos se disuelven en el fluido, de modo que pueda conducir una corriente eléctrica. Cuando pasa por el campo magnético generado por las bobinas, el líquido creará un voltaje inducido proporcional al flujo. Los medidores de flujo electromagnéticos se han empleado en numerosas aplicaciones, incluyendo el flujo sanguíneo y mediciones en agua de mar. Existen modelos co-

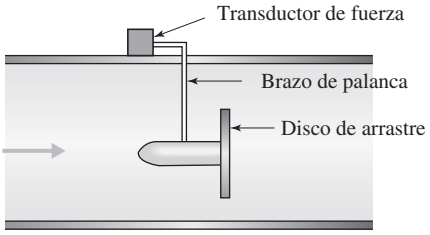


Fig. 13.15 Medidor de disco.

merciales disponibles en una amplia variedad de diámetros; son costosos y pueden usarse sólo con líquidos.

Medidor acústico. El medidor de flujo ultrasónico, o acústico, está basado en uno de dos principios. El primero utiliza transmisores/receptores ultrasónicos dirigidos a través de una trayectoria de flujo (figura 13.17). Las diferencias medidas en los tiempos de recorrido (o a la inversa, las frecuencias) son directamente proporcionales a la velocidad promedio y, en consecuencia, a la descarga. El segundo tipo está basado en el efecto Doppler, en donde ondas acústicas son transmitidas en el campo de flujo y posteriormente dispersadas por partículas o contaminantes inoculados. El corrimiento Doppler registrado entre el transmisor y el receptor se relaciona entonces con la descarga. Al igual que el medidor de flujo electromagnético, los medidores de flujo acústicos no son invasivos y se han empleado en sistemas de tuberías y de flujo de superficie libre.

Medidor de formación de vórtices. Este dispositivo medidor de flujo consta de un solo puntal o de una serie de puntales colocados como cuerdas dentro de un tubo normal a la dirección del flujo. Si el número de Reynolds está arriba de un valor de umbral, aparecen vórtices en las regiones cercanas a la estela detrás de los puntales (vea la sección 8.3.2). La formación periódica de vórtices que ocurre detrás de los puntales puede relacionarse con el número de Reynolds como se muestra en la figura 8.9. Diferentes aparatos se emplean para detectar la frecuencia de formación de vórtices. Entre los ejemplos se incluye un transductor de presión montado en la superficie corriente abajo del puntal, un sensor térmico que detecta cambios en flujo térmico en la superficie del puntal, o un medidor de deformación que detecta la oscilación del puntal. Los medidores de formación de vórtices pueden especificarse para operar en flujos que varían hasta en dos órdenes de magnitud.

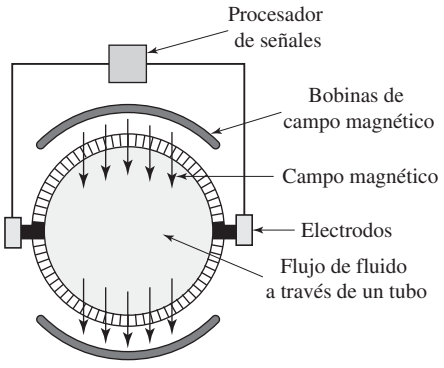


Fig. 13.16 Medidor de flujo electromagnético.

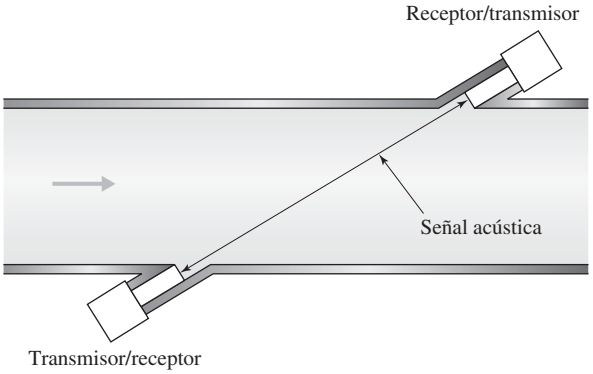


Fig. 13.17 Medidor acústico.

Medidor de flujo basado en la aceleración de Coriolis. Éstos son medidores basados en el principio de la aceleración de Coriolis (vea la ecuación 3.2.15). Generalmente, se usan para medir flujos de líquidos en tuberías. Un tubo en forma de U lleno con el líquido a medir se hace vibrar normal al plano de la U y con las puntas de la U estacionarias. El líquido que fluye en el tubo produce un movimiento de torsión alrededor del eje de simetría del tubo. La amplitud del movimiento es proporcional al gasto, y su frecuencia puede correlacionarse con la densidad del líquido. El medidor proporciona mediciones de gasto y de densidad en una forma no invasiva.

Medidores de flujo en canales abiertos. En la sección 10.4.3 se presentó la medición del flujo en sistemas de canales abiertos. Se desarrollaron las relaciones de descarga para el vertedero de cresta ancha y el de cresta afilada; también se estudiaron métodos adicionales de medición de flujo. El lector debe remitirse a esa sección para consultar la información detallada.

13.4 VISUALIZACIÓN DEL FLUJO

Se han visualizado campos de flujo transparentes en muchas formas diferentes. Esto está bien ilustrado por los cientos de fotografías presentadas en la publicación *An Album of Fluid Motion* (Van Dyke, 1982). El libro muestra flujos visualizados con humo, tinte, burbujas, partículas, umbrógrafos, imágenes de estrioscópicas, interferometría y otras técnicas. Comúnmente, se selecciona un método que muestra de mejor manera las características del flujo de interés. Entre los ejemplos se incluyen partículas empleadas para visualizar las líneas de trayectoria en flujos de líquido alrededor de objetos sumergidos, tinte vertido para estudiar el proceso de mezclado en una corriente, humo liberado el extremo contra el viento de un túnel de viento para estudiar el desarrollo de una capa límite, y patrones de flujo de aire arriba de una superficie sólida visualizada al recubrir esa superficie con un líquido viscoso (se forman líneas veteadas que coinciden con las líneas de corriente cerca de la superficie). Varias de estas técnicas se estudian en esta sección.

Las líneas de trayectoria, las líneas fugaces y las líneas de corriente se definieron en el capítulo 3. El propósito de definirlas fue para asistir en la descripción del movimiento de un campo de flujo. Una línea de trayectoria se genera físicamente al seguir el movimiento de una partícula individual como lo es una burbuja o una pequeña esfera neutralmente flotante durante cierto tiempo; esto podría lograrse mediante la fotografía con toma de imágenes a intervalos prefijados o mediante grabación de video. Por otra parte, si un rastro de humo, un tren de burbujas extre-

madamente pequeñas, o un tinte que emana continuamente de una fuente estacionaria se fotografía o se graba, se observa una línea de corriente continua. Cuando la generación de una línea de corriente se interrumpe en forma periódica, se producen líneas de corriente respecto al tiempo.

13.4.1 Trazadores

Los trazadores son aditivos agregados al fluido que permiten observar los patrones de flujo. Un trazador efectivo no altera el patrón de flujo sino que es transportado con el flujo y es fácilmente observable. Es importante que los trazadores no sean afectados por las fuerzas gravitacionales o centrífugas que resulten de diferencias de densidad. Además, su tamaño debe ser de al menos un orden de magnitud más pequeño que la escala de longitud del campo de flujo. Varios de ellos se estudian a continuación.

Burbujas de hidrógeno. Un hilo metálico muy delgado puede ponerse en agua para servir como el cátodo de un circuito de corriente directa, con cualquier material conductor apropiado actuando como el ánodo. Cuando se aplica un voltaje al circuito, se liberan burbujas de hidrógeno en el cátodo y burbujas de oxígeno en el ánodo. La reacción primaria es la electrólisis del agua en la forma $2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$. Por lo general, las burbujas de hidrógeno se usan como el trazador porque son más pequeñas que las burbujas de oxígeno y se forman más de ellas. Las burbujas son transportadas por el campo de flujo alejándose del hilo del cátodo como una hoja continua. Si el voltaje es pulsante, se forman líneas de corriente discretas; la figura 13.18 muestra ese patrón. El suministro de agua estándar por lo general contiene suficientes electrolitos para mantener una corriente, aun cuando la adición de un electrolito como el sulfato de sodio aumenta en mucho la generación de burbujas. El uso de un hilo extremadamente delgado (0.025 a 0.05 mm de diámetro) con velocidades adecuadas (los números de Reynolds basados en el diámetro del hilo deben ser menores que 20) puede crear burbujas lo suficientemente pequeñas para suprimir los efectos de flotación.

Indicadores químicos. Ciertos productos químicos orgánicos cambian de color cuando cambia el pH del agua. Por ejemplo, la solución azul de timol es de color

Fig. 13.18 Líneas de corriente de burbujas de hidrógeno mostrando un flujo separado alrededor de una superficie hidrodinámica giratoria. (Cortesía de M. Koochesfahani.)

Fig. 13.19 Estela turbulenta detrás de un cilindro circular en Re = 1760. (Cortesía de R. E. Falco.)

amarillo a un pH de 8.0 y de color azul a un pH de 9.2; la solución de rojo de fenol es de color amarillo a un pH de 6.8 y de color rojo a un pH de 8.2. Entonces un cambio en el pH causado por la inyección de una solución base cambia el color del líquido. La vida útil del agua coloreada depende de la difusión molecular de los iones de hidrógeno y de la turbulencia. Una ventaja de esta técnica es que los residuos de color pueden ser eliminados al cambiar el pH. Una aplicación es en estudios de fenómenos de transporte de fase sólido-líquido; si el indicador químico está en contacto con una superficie metálica y a ésta se le proporciona una carga negativa, la solución en inmediato contacto con la placa cambiará de color.

Partículas en aire. Las partículas en aire pueden ser introducidas como burbujas de helio. Si se selecciona en forma apropiada una mezcla de jabón y agua, se pueden producir burbujas llenas de helio que no tienen flotabilidad; es posible producir diámetros de burbujas del orden de 4 mm. También pueden utilizarse partículas sólidas o gotitas de líquido, pero deben ser extremadamente pequeñas para evitar los efectos gravitacionales. Con estos pequeños tamaños se debe emplear una fuente luminosa muy fuerte para visualizar el flujo.

El humo se ha utilizado con éxito para estudiar la estructura detallada de fenómenos de flujo complejos. El humo es el agente más popular empleado para la visualización del flujo en túneles de viento. Una técnica de inyección es el denominado método del hilo humeante, donde el humo se genera al vaporizar aceite de un hilo delgado calentado eléctricamente. El método puede aplicarse a flujos donde el número de Reynolds basado en el diámetro del hilo sea menor que 20. Un ejemplo de tal estructura de flujo se da en la figura 13.19. El humo también puede liberarse de un tubo de diámetro pequeño o "rastrillo" para crear una o más líneas de corriente.

Velocimetría. La medición simultánea de dominios de flujo en dos y tres dimensiones ha conducido a la definición de un velocímetro de luz pulsante genérica (figura 13.20). Consta de una fuente de luz pulsante que ilumina pequeñas partículas arrastradas por el fluido durante tiempos breves de exposición, y una cámara que está sincronizada con la luz para registrar la ubicación de las partículas. La velocidad de cada marcador está entonces dada por $\Delta s/\Delta t$, donde Δs es el desplazamiento del marcador y Δt es el tiempo entre exposiciones. La técnica se denomina *velocimetría mediante imágenes de partículas* (VIP). Los marcadores suelen ser partículas que varían en tamaño de 1 a 20 μm. Un ejemplo de la VIP se muestra en la figura 13.21. Además de la VIP, se han hecho avances en el uso de marcadores moleculares tales como tintes fotocromáticos en líquidos, aerosoles fotocromáticos en gases, y fosforescencia molecular en líquidos y gases. Un ejemplo de la *velocimetría por marcación molecular* (VMM) se muestra en la figura 13.22, en la que se marca una cuadrícula no invasiva y posteriormente se desplaza durante un breve interva-

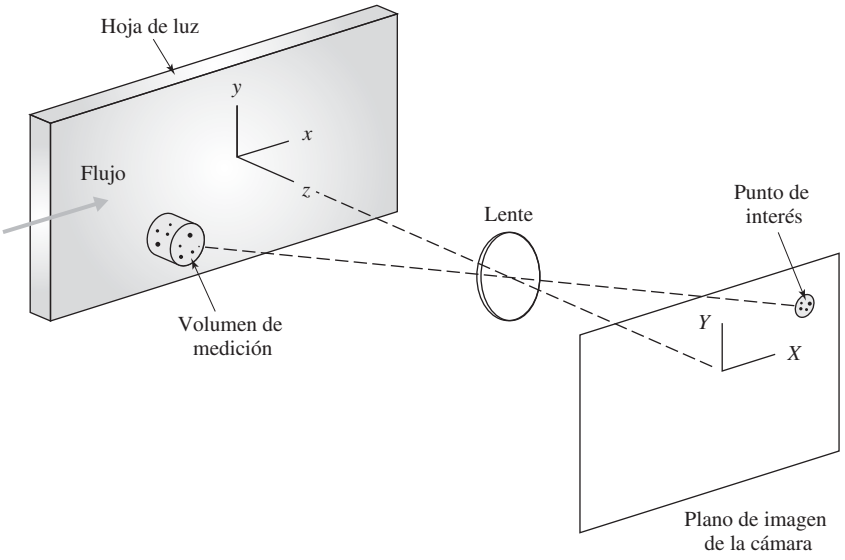


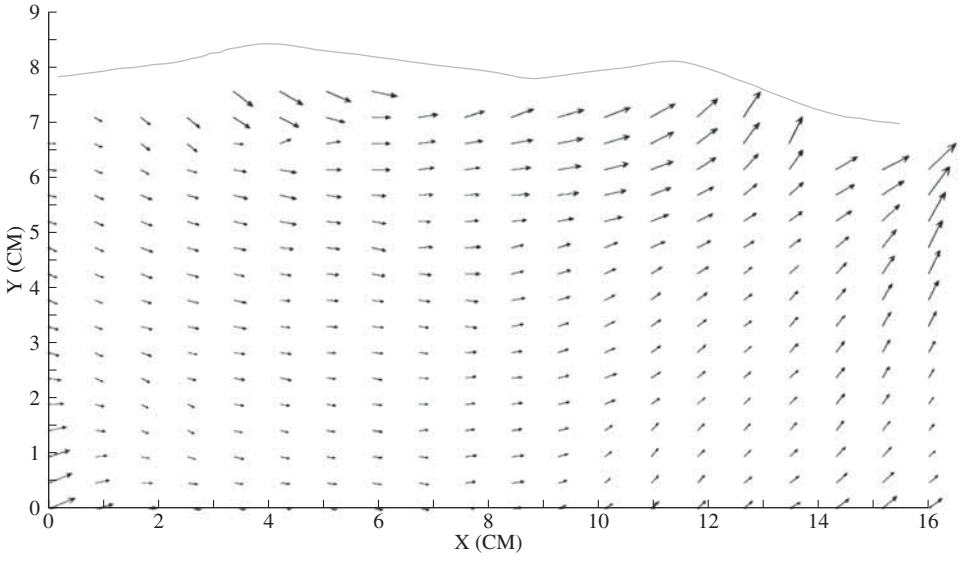
Fig. 13.20 Velocímetro de luz pulsante. (Cortesía de R. Adrian.)

lo. Las dos cuadrículas son captadas por una cámara acoplada a carga y analizadas para producir el campo de velocidad mostrado en la figura 13.22c. En esa figura, sólo se muestra la mitad izquierda del campo de velocidad. El eje de simetría está indicado por la línea discontinua y el cuadro delimita la región que contiene vectores derivados de las figuras 13.22a y b. Los métodos de velocimetría son particularmente útiles en los estudios de explosiones, fenómenos transitorios en canales y conductos, flujo en máquinas de combustión interna, crecimiento y colapso de burbujas, interacción fluido-sólido, así como la estructura del flujo turbulento.

Borlas y películas de aceite. La visualización de un flujo a lo largo de una superficie puede lograrse si se adhieren borlas a la superficie, o si ha de observarse el flujo lejos de ésta, pueden ser sostenidas sobre alambres. Las borlas de superficie pueden usarse para observar la transición de movimiento laminar a turbulento. También pueden usarse para estudiar cualitativamente la separación de un flujo, donde el movimiento violento de las borlas o la tendencia de éstas para apuntar en la dirección corriente arriba identifica que está teniendo lugar la separación. En el aire, los patrones de flujo sobre una superficie también pueden ser visualizados si se distribuye aceite sobre la superficie sólida de modo tal que se desarrollan patrones veteados claros. La interpretación de los patrones no siempre es fácil, en particular cuando suceden inversiones de flujo; la razón es que los patrones veteados no indican la dirección del flujo.

Fotografía e iluminación. Se usan muchas clases de cámaras para la visualización del flujo, incluyendo cámaras de fotografía fija, en estéreo y cinemáticas (Adrian, 1986). La cámara de video se ha hecho cada vez más popular debido a avances en su resolución, siendo posible conectar ciertos modelos a una computadora para obtener datos cuantitativos. Los estroboscopios, así como la iluminación con rayos láser, de tungsteno y de xenón, se utilizan comúnmente para visualizar los trazadores. Dependiendo de la aplicación, se pueden producir imágenes usando una luz continua para generar líneas de corriente; alternativamente, se pueden producir imágenes usando pulsos de luz que son disparados por el obturador de una cámara o un estroboscopio para congelar el movimiento. Si se desea la visualización en dos dimensiones, el campo de flujo puede ser iluminado al crear una hoja angosta de luz dirigida a través de una ventana en la sección de prueba. La figura 13.23 demuestra

(a)



(b)

Fig. 13.21 Velocimetría mediante imágenes de partículas (VIP): (a) fotografía de líneas de trayectoria de partículas; (b) vectores velocidad a escala. (Cortesía de R. Bouwmeester).

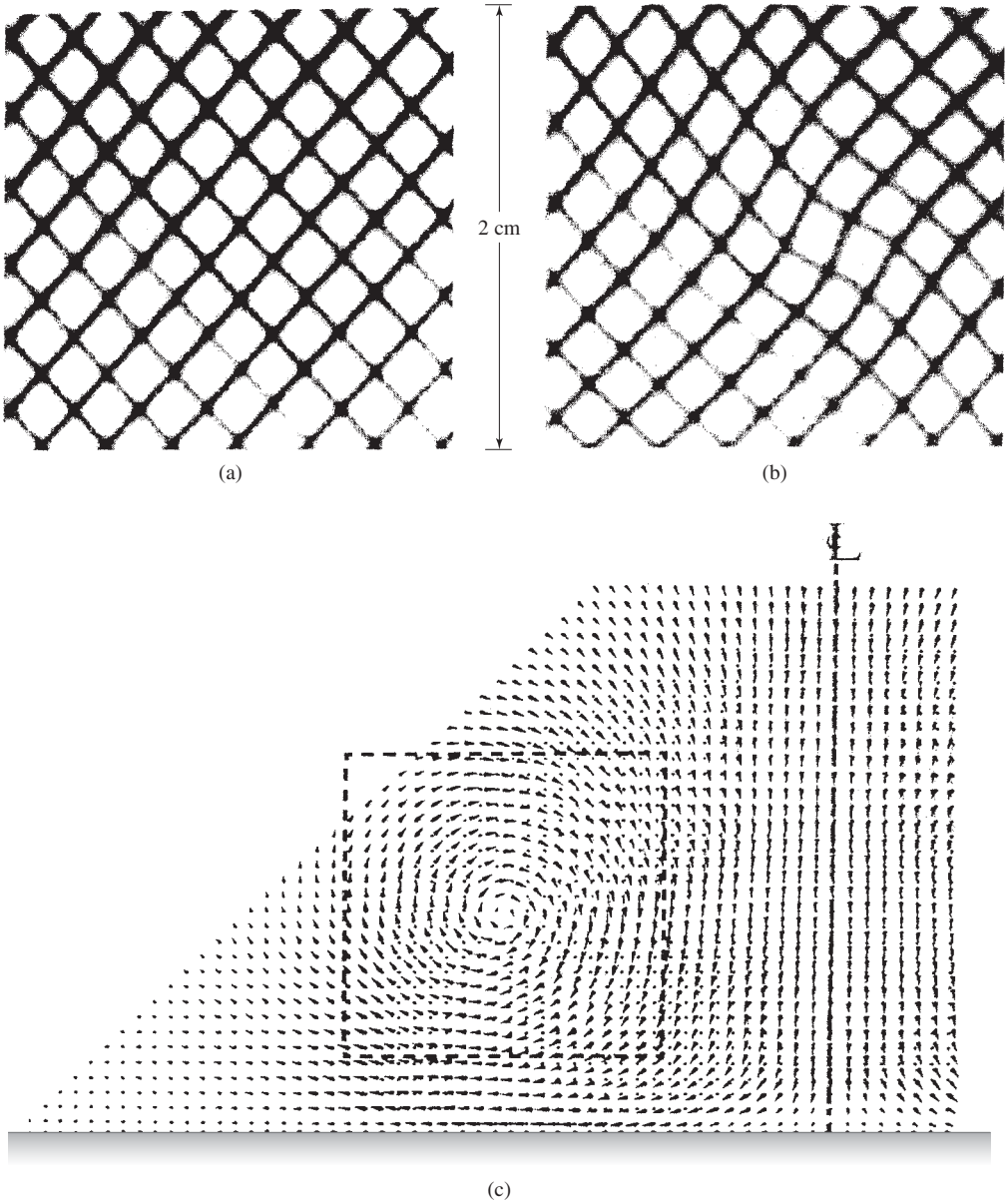
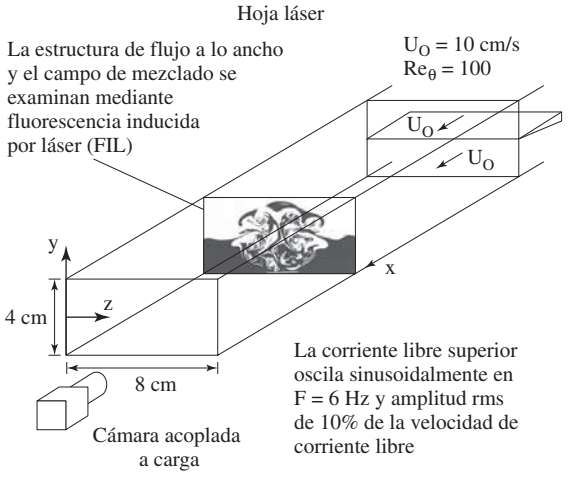


Fig. 13.22 Velocimetría por marcación molecular (VMM): (a) cuadrícula de muestra dentro de un anillo vorticial inmediatamente después de la marcación con láser; (b) cuadrícula desplazada 6 ms después; (c) campo de velocidad del anillo vorticial aproximándose a una pared. (Cortesía de C. MacKinnon y M. Koochesfahani.)

la técnica de fluorescencia inducida por láser (FIL) para visualizar una estructura de flujo a lo ancho y un campo de mezclado en un campo de flujo de estela no permanente. Pueden obtenerse imágenes en tres dimensiones por medio de imágenes estereoscópicas o mediante el uso de holografía.

(a)



(b)

Fig. 13.23 Fluorescencia inducida por láser (FIL): (a) configuración experimental; (b) detalle de la estructura de un flujo a lo ancho medida por FIL. (Cortesía de C. MacKinnon y M. Koochesfahani.)

13.4.2 Métodos del índice de refracción

Las tres técnicas del índice de refracción son la estrioscopia, el umbrógrafo y la interferometría. Se usan para tratar de visualizar flujos cuando las diferencias de densidad son alteradas en forma natural o artificial; pueden usarse medios gaseosos o líquidos. Los métodos dependen de la variación del índice de refracción en un medio fluido transparente y la deflexión resultante de un haz luminoso dirigido a través del medio. Con frecuencia los flujos a estudiar son en dos dimensiones, y el haz luminoso se dirige normal al campo de flujo; el resultado es una medición integrada a lo largo de la sección de prueba. El índice de refracción es una función del estado termodinámico del fluido y comúnmente depende sólo de la densidad. Los ejemplos de flujos que son investigados con estas técnicas son flujos de alta

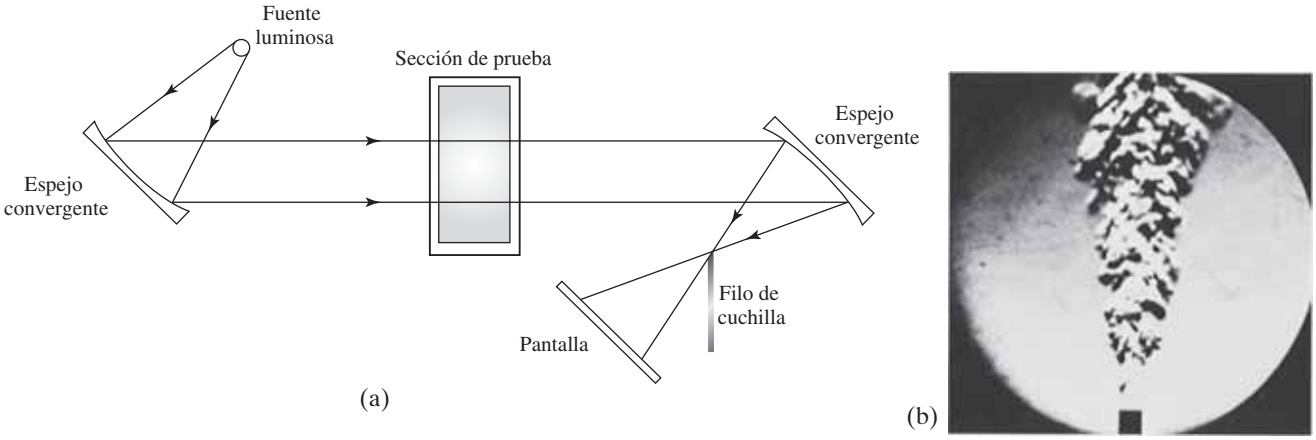


Fig. 13.24 Sistema estrioscópico: (a) esquema; (b) chorro de helio entrando en aire atmosférico. (Cortesía de R. Goldstein.)

velocidad con ondas de choque, flujos de convección, campos de flujo de flamas y de combustión, mezcla de fluidos de diferentes densidades, y flujos de convección forzada con transferencia de calor o de masa.

En un sistema *estrioscópico*, se mide el ángulo del haz luminoso después que ha pasado por la sección de prueba y emerge en el aire circundante (figura 13.24a); el ángulo es proporcional a la primera derivada espacial del índice de refracción. El haz luminoso es desviado en la dirección del índice de refracción creciente, o para casi todos los medios, hacia la región de densidad más alta. Una imagen estrioscópica representativa se muestra en la figura 13.24b. Un sistema de *umbrografía* mide el desplazamiento lineal de la luz perturbada (figura 13.25). En contraste con las imágenes estrioscópicas, el patrón luminoso en una umbrografía está determinado por la segunda derivada del índice de refracción.

Los sistemas de umbrografía y estrioscópico suelen emplearse para la visualización cualitativa de un flujo, mientras que los interferómetros con frecuencia se usan en estudios cuantitativos.

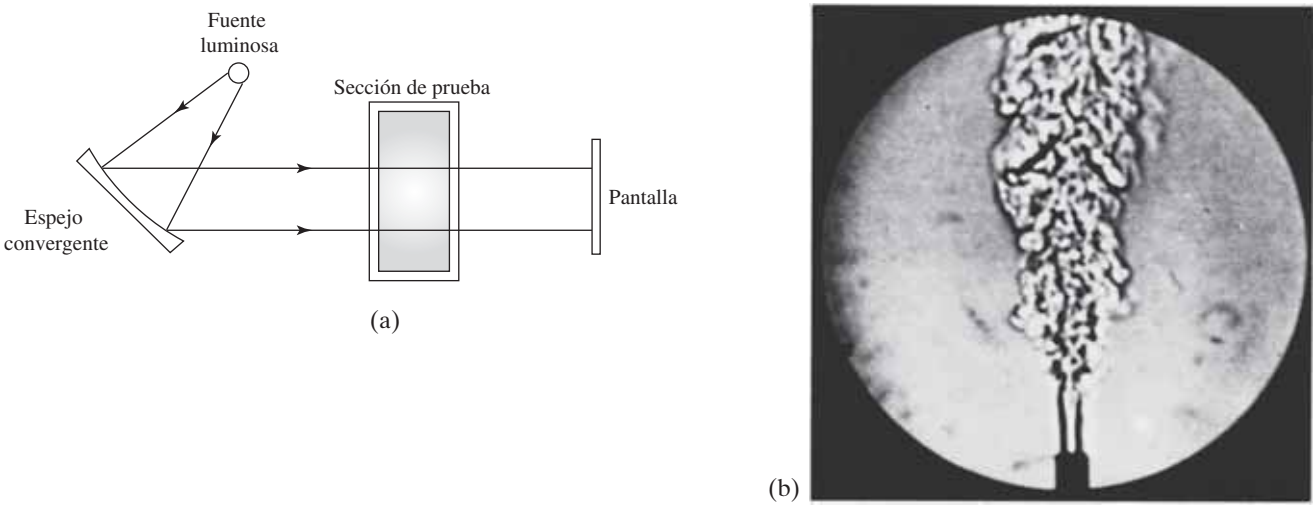


Fig. 13.25 Sistema de umbrografía: (a) esquema; (b) chorro de helio entrando en aire atmosférico. (Cortesía de R. Goldstein.)

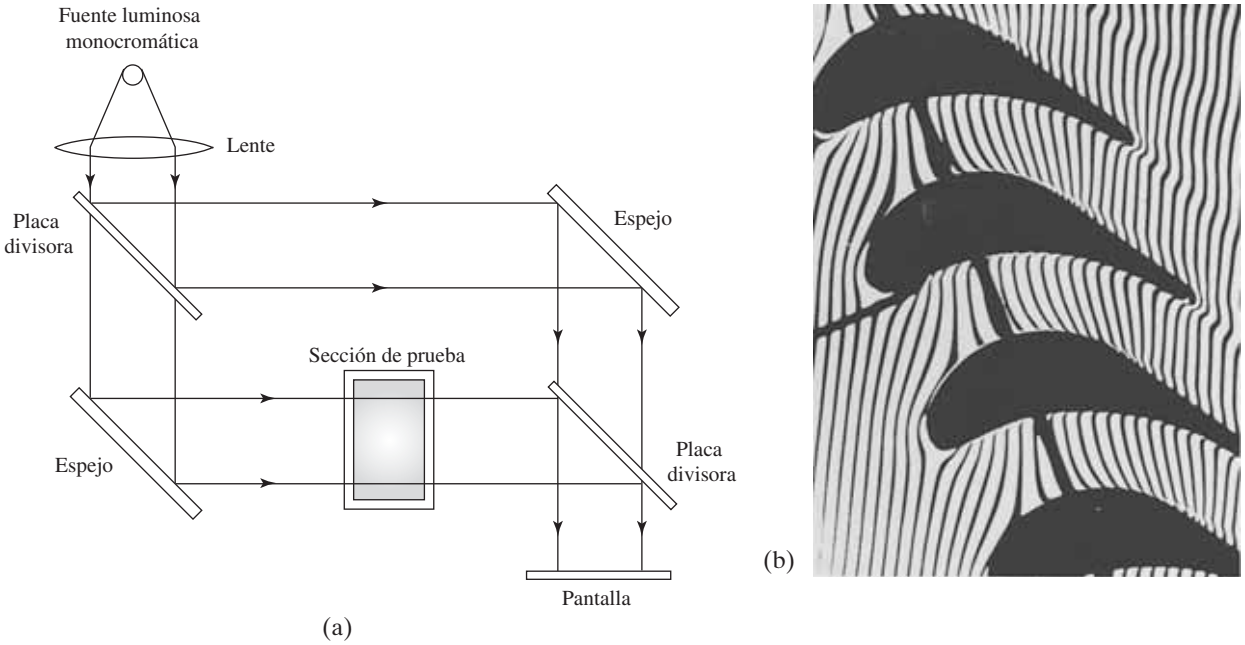


Fig. 13.26 Interferómetro de Mach-Zehnder: (a) esquema; (b) flujo de gas caliente sobre álabes de una turbina. (Cortesía de R. Goldstein.)

Un interferómetro responde a diferencias de longitud de trayectoria óptica; como un campo de flujo con una densidad variable representa una perturbación óptica, la fase de las ondas de luz transmitidas se cambia respecto a las ondas no perturbadas. Un interferómetro de dos haces luminosos está diseñado para medir esa diferencia de fase (figura 13.26a). Cuando los haces luminosos perturbados y no perturbados se recombinan, aparecen franjas de interferencia en la pantalla que son una medida de la variación de la densidad en el campo de flujo. Un ejemplo de un interferómetro se muestra en la figura 13.26b.

13.5 ADQUISICIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Esta sección empieza con una breve introducción a la adquisición automatizada de datos de flujo usando para ello computadoras personales. A continuación se presenta la metodología para tratar la incertidumbre de datos, incluyendo la forma en la que estas incertidumbres se propagan cuando un parámetro de flujo se representa en forma indirecta como resultado de medir otros. Por último, como varias relaciones de flujo comprenden formulaciones exponenciales, se presenta un medio para ajustar la curva de datos exponenciales.

13.5.1 Registro digital de datos

Algunas de las mediciones que se han descrito en secciones previas se hacen simplemente por la lectura directa de un instrumento; es probable que esas lecturas sean de estado permanente, promediadas respecto al tiempo o quizá con valores de la raíz media cuadrática. Los ejemplos incluyen la lectura de un manómetro conectado a un medidor de flujo de orificio, el monitoreo de una lectura digital de rpm de un anemómetro de veleta, y el registro de la presión indicada en un manómetro

de Bourdon. Los datos adquiridos en esta forma suelen ser de precisión suficiente para el objetivo deseado; de hecho, cualquier refinamiento adicional que se use para recolectar datos podría ser costoso e innecesario. Por otra parte, existen situaciones que requieren de medios más complejos de adquisición de datos. Por ejemplo, monitorear presiones transitorias en una tubería usando un transductor deformimétrico, u observar fluctuaciones de velocidad turbulenta en un flujo de corriente libre, requieren un registro continuo y preciso de datos. Otra ilustración es la captura del movimiento de un gran número de partículas en movimiento en un plano bidimensional para determinar un campo de flujo no permanente. Estas mediciones requieren que los datos sean registrados en forma automática, rápida y precisa.

El advenimiento de la computadora personal ha revolucionado la adquisición automática de datos de flujo. Muchos de los transductores en uso dan una señal de salida de voltaje (una señal analógica) que debe ser convertida en una señal digital antes de que la computadora pueda guardar y procesar los datos. En la actualidad existe una variedad de tarjetas analógicas de entrada/salida (I/O) enchufables específicamente diseñadas para computadoras personales, que pueden insertarse en el colector colectivo de la unidad central de procesamiento. Estas tarjetas de I/O cuentan con multiplexores de entrada, un amplificador de entrada, un circuito de muestreo y retención, uno o más convertidores de salida de digital a analógico, así como circuitería para interfaz y temporización. Además, algunas incluyen memoria de acceso aleatorio integrada, memoria sólo de lectura y relojes de tiempo real. Se dispone de software compatible por lo que la programación es innecesaria o requiere de un mínimo esfuerzo.

13.5.2 Análisis de incertidumbre

Cuando se hacen mediciones de flujo, es importante tener en cuenta que ningún valor registrado de un parámetro es perfectamente preciso. Los instrumentos no miden el llamado "valor verdadero" del parámetro, sino que darán una estimación de ese valor. Junto con cada medición, uno debe tratar de contestar la importante pregunta: ¿Qué tan precisa es esa medición? Las imprecisiones asociadas con las mediciones pueden ser consideradas como incertidumbres y no como errores. Un *error* es la diferencia fija e inalterable entre el valor verdadero y el valor registrado, mientras que una *incertidumbre* es el valor estadístico que un error puede asumir en cualquier medición determinada.

El propósito de esta sección es describir una técnica para propagar las incertidumbres de mediciones de flujo en los resultados. Tiene varios usos, entre ellos ayudarnos a determinar si los cálculos concuerdan con los datos recolectados o se encuentran más allá de ciertos límites aceptables. Lo que es quizá más importante es que puede ayudarnos a mejorar un experimento determinado o procedimiento de medición. No tiene la finalidad de sustituir calibraciones precisas y técnicas experimentales sensatas; más bien, debe ser vista como ayuda adicional para obtener resultados buenos y confiables. Aquí presentamos sólo una breve introducción; se recomienda la lectura de Coleman y Steele (1989) y Kline (1985) para un tratamiento más completo del tema.

Una incertidumbre puede dividirse en tres categorías: (1) la debida a la calibración de los instrumentos, (2) la debida a la adquisición de datos, y (3) la que resulta de la reducción de datos. La incertidumbre total es la suma de la desviación y la precisión. *Desviación* es la incertidumbre sistemática que está presente durante una prueba; se considera que permanece constante durante las mediciones repetidas de un cierto conjunto de parámetros. No existe una fórmula estadística que pueda aplicarse para estimar la desviación, por lo cual su valor debe estar basado en estima-

ciones. Las calibraciones y mediciones independientes ayudarán en su estimación. La *precisión* se conoce alternativamente como *repetitividad*; se encuentra al tomar mediciones repetidas de la población de parámetros y usar la desviación estándar como un índice de precisión. Para la situación en la que no se toman mediciones repetidas (lo cual ocurre con frecuencia para mediciones de flujo), debe usarse un solo valor pero se obtendrá menos precisión. La figura 13.27 ilustra cómo están definidas las incertidumbres. Se muestra que un muestreo de datos (línea continua) está distribuido de una forma gausiana. El parámetro x_i es una variable particular medida, o mensurando, $<x_i>$ es el promedio de todas las variables medidas, y δx_i es el intervalo de incertidumbre, o precisión, asociado con x_i. La incertidumbre para el mensurando puede darse como

$$x_i = < x_i > \pm \delta x_i \tag{13.5.1}$$

Además, es necesario expresar la desviación y la probabilidad P de registrar la magnitud con la precisión expresada.

Además de definir incertidumbres en los datos, es necesario propagar estas incertidumbres en los resultados. Un proceso de dos pasos se describe como sigue.

1. *Describir la incertidumbre para los mensurandos.* Se supone que cada magnitud es una observación independiente, y debe provenir de una población gausiana. También, la precisión para cada mensurando debe estar citada a la misma probabilidad P. Por ejemplo, considere un experimento para calibrar un vertedero, en el que los mensurandos son el nivel de agua corriente arriba del vertedero y la descarga. El nivel de agua se mide usando un medidor de nivel de agua, y la descarga se registra midiendo el tiempo que toma llenar un volumen conocido. Entonces los dos mensurandos son independientes. Además, con base en la experiencia y quizás en algunas mediciones repetidas, uno puede expresar razonablemente que (1) no hay desviación y (2) la precisión registrada para cada mensurando tiene una probabilidad de $P = 0.95$; esto es, 20 de cada 21 lecturas de ese mensurando darían el valor registrado más o menos la precisión expresada.

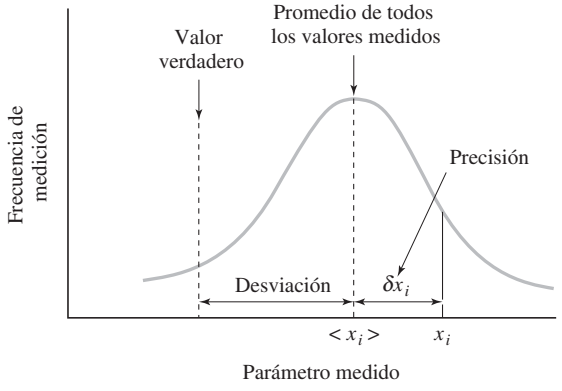


Fig. 13.27 Incertidumbres asociadas con un muestreo de datos.

2. *Calcular el intervalo de incertidumbre total.* Representemos con R el resultado calculado de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; esto es, $R = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aquí suponemos que R es continua y que tiene derivadas continuas en el dominio deseado. Además, suponemos que las variables y los intervalos de incertidumbre no están correlacionados; esto es, son independientes entre sí. Entonces la incertidumbre total en el resultado δR puede obtenerse al desarrollar R en una serie de Taylor respecto a las magnitudes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y obtener el resultado cuadrático resultante

$$\delta R = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\,\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\,\delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n}\,\delta x_n\right)^2\right]^{1/2} \tag{13.5.2}$$

Existen situaciones donde la expresión para R se hace tan complicada que es difícil obtener las derivadas parciales en la ecuación 13.5.2. En tal caso, se pueden emplear aproximaciones de diferencia finita de las derivadas parciales para simplificar el análisis. Por ejemplo, considere una aproximación de diferencia finita progresiva para la primera derivada parcial:

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} \approx \frac{R(x_1 + \delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{(x_1 + \delta x_1) - x_1} \tag{13.5.3}$$

Aquí hemos supuesto que en el denominador el intervalo de diferencia finita es equivalente al intervalo de incertidumbre δx_1. El numerador de la ecuación 13.5.1 es la diferencia entre R evaluada en $x_1 + \delta x_1$ y x_1 con las variables restantes fijas. Expresando las otras derivadas parciales de la ecuación 13.5.2 en forma similar y sustituyendo los resultados de nuevo en la relación, tenemos el resultado deseado:

$$\delta R \approx \left\{\begin{array}{l}[R(x_1 + \delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 \\ \quad + [R(x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots, x_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 \\ \qquad + \cdots + [R(x_1, x_2, \ldots, x_n + \delta x_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2\end{array}\right\}^{1/2} \tag{13.5.4}$$

La ecuación 13.5.4 puede evaluarse fácilmente usando un algoritmo de hoja de cálculo.

El uso ya sea de la ecuación 13.5.2 o la 13.5.4 da una estimación de δR. El intervalo de incertidumbre total es una estimación de la desviación estándar de la población de todos los experimentos posibles como el realizado.

Ejemplo 13.1

Datos de descarga y presión se recolectan para un flujo de agua a través de un medidor de orificio en el tubo de la figura E13.1a. El diámetro del orificio es 35.4 mm y el diámetro del tubo es 50.8 mm. Los datos originales se reducen a la forma que se ilustra en la tabla siguiente. La segunda columna es la descarga Q; la precisión δQ (desviación cero, $P = 0.95$) se da en la tercera columna; y los datos de la carga de presión $\Delta h = h_1 - h_2$ se presentan

en la cuarta columna. Además, la precisión para cada una de las mediciones de presión se determina que es la misma, es decir, $\delta(\Delta h) = 0.025$ m (cero desviación, $P = 0.95$). La quinta y sexta columnas muestran los números de Reynolds y el coeficiente de flujo K calculados usando la ecuación 13.3.8. Determine las incertidumbres en el resultado K como consecuencia de las incertidumbres estimadas en los measurandos Q y Δh.

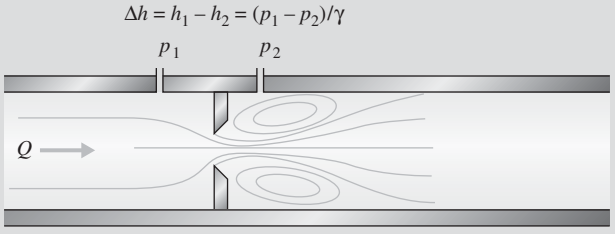


Fig. E13.1a

Solución

La ecuación 13.3.8 se usa junto con la ecuación 13.5.4 para propagar las incertidumbres de Q y Δh en K. Por ejemplo, considere los datos para $i = 6$. El cálculo de δK procede de la siguiente manera. El área del orificio es

$$A_0 = \frac{\pi}{4} 0.0354^2 = 9.84 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$$

Dato núm. i	Q (m^3/s)	δQ (m^3/s)	Δh (m)	Re	K	δK
1	0.00119	0.00010	0.139	42 800	0.732	0.085
2	0.00162	0.00012	0.265	58 300	0.722	0.062
3	0.00200	0.00015	0.403	71 900	0.723	0.058
4	0.00223	0.00015	0.517	80 200	0.711	0.051
5	0.00251	0.00015	0.655	90 300	0.711	0.045
6	0.00276	0.00017	0.781	99 300	0.716	0.046
7	0.00294	0.00018	0.907	105 700	0.708	0.045
8	0.00314	0.00019	1.008	112 900	0.717	0.045
9	0.00330	0.00016	1.134	118 700	0.711	0.035
10	0.00346	0.00017	1.247	124 400	0.711	0.036
11	0.00373	0.00017	1.386	134 200	0.727	0.034
12	0.00382	0.00017	1.512	137 400	0.713	0.032
13	0.00408	0.00018	1.663	146 700	0.726	0.033
14	0.00424	0.00019	1.852	152 500	0.715	0.032
15	0.00480	0.00021	2.293	172 600	0.727	0.032

y la razón entre diámetros es

$$\beta = \frac{35.4}{50.8} = 0.697 \simeq 0.7$$

Con la ecuación 13.3.8, se determinan valores para $(Q, \Delta h)$, $(Q + \delta Q, \Delta h)$, y $(Q, \Delta h + \delta(\Delta h))$:

(*continúa*)

$$K(Q, \Delta h) = \frac{0.00276}{9.84 \times 10^{-4}\sqrt{2 \times 9.81 \times 0.781}} = 0.716$$

$$K(Q + \delta Q, \Delta h) = \frac{0.00276 + 0.00017}{9.84 \times 10^{-4}\sqrt{2 \times 9.81 \times 0.781}} = 0.761$$

$$K(Q, \Delta h + \delta(\Delta h)) = \frac{0.00276}{9.84 \times 10^{-4}\sqrt{2 \times 9.81 \times (0.781 + 0.025)}} = 0.705$$

Éstas se sustituyen entonces en la ecuación 13.5.4, con la variable K sustituyendo la R resultante en esa relación:

$$\begin{aligned}\delta K &= \{[K(Q + \delta Q, \Delta h) - K(Q, \Delta h)]^2 + [K(Q, \Delta h + \delta(\Delta h)) - K(Q, \Delta h)]^2\}^{1/2} \\ &= [(0.761 - 0.716)^2 + (0.705 - 0.716)^2]^{1/2} \\ &= 0.046\end{aligned}$$

Los resultados de todas las magnitudes se evalúan de modo similar y se muestran en la última columna de la tabla. Además, se grafican en la figura E13.1b, donde las líneas verticales, o bandas de incertidumbre, asociadas con cada valor de K tienen la magnitud de $2\delta K$. Las bandas pueden interpretarse como la precisión estimada para K, con base en una desviación cero y $P = 0.95$ para los dos mensurandos. Observe que la precisión δK se estabiliza en aproximadamente 0.032 para los números de Reynolds más altos y que la magnitud de δK es mayor para los números de Reynolds más bajos. Una forma alterna de expresar esto es que la incertidumbre de K disminuye con números de Reynolds crecientes. Los datos de la figura deben compararse con la curva de orificio marcada $\beta = 0.7$ en la figura 13.10.

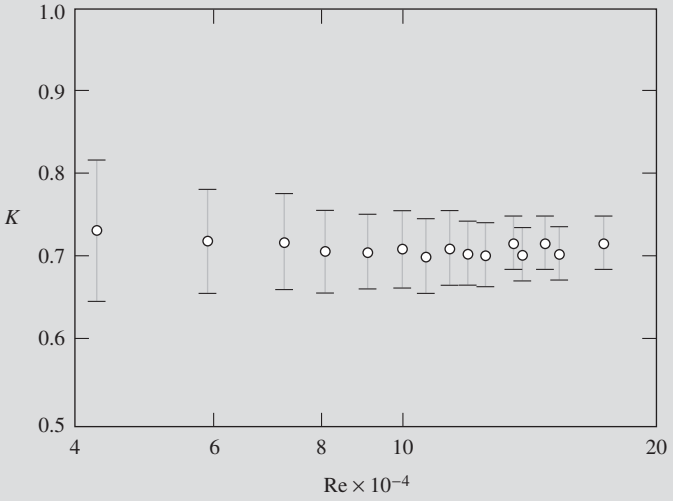


Fig. E13.1b

En la figura 13.28 se muestra una solución con Mathcad del ejemplo 13.1

Datos de entrada:

$D := 0.0354 \qquad ORIGEN := 1 \qquad N := 15 \qquad v := 1.006 \times 10^{-6} \qquad g := 9.81$

$$Q := \begin{pmatrix} 0.00119 \\ 0.00162 \\ 0.002 \\ 0.00223 \\ 0.00251 \\ 0.00276 \\ 0.00294 \\ 0.00314 \\ 0.0033 \\ 0.00346 \\ 0.00373 \\ 0.00382 \\ 0.00408 \\ 0.00424 \\ 0.0048 \end{pmatrix} \quad \delta Q := \begin{pmatrix} 0.00010 \\ 0.00012 \\ 0.00015 \\ 0.00015 \\ 0.00015 \\ 0.00017 \\ 0.00018 \\ 0.00019 \\ 0.00016 \\ 0.00017 \\ 0.00017 \\ 0.00017 \\ 0.00018 \\ 0.00019 \\ 0.00021 \end{pmatrix} \quad \Delta h := \begin{pmatrix} 0.139 \\ 0.265 \\ 0.403 \\ 0.517 \\ 0.655 \\ 0.781 \\ 0.907 \\ 1.008 \\ 1.134 \\ 1.247 \\ 1.386 \\ 1.512 \\ 1.663 \\ 1.852 \\ 2.293 \end{pmatrix} \quad \delta \Delta h := \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

Defina función para calcular K: $K(q, \Delta H) := \Delta \qquad \dfrac{q}{\left(\dfrac{\pi \cdot D^2}{4}\right)} \cdot (2 \cdot g \cdot \Delta H)^{-0.5}$

Calcule incertidumbre en K:

$i := 1 \ldots N$

$KK_i := K(Q_i, \Delta h_i)$

$\delta K_i := \sqrt{(K(Q_i + \delta Q_i, \Delta h_i) - K(Q_i, \Delta h_i))^2 + (K(Q_i, \Delta h_i + \delta \Delta h_i) - K(Q_i, \Delta h_i))^2}$

$Re_i := \dfrac{4 \cdot Q_i}{\pi \cdot v \cdot D}$

Fig. 13.28 Solución con Mathcad del ejemplo 13.1.

Gráfica de K contra Re:

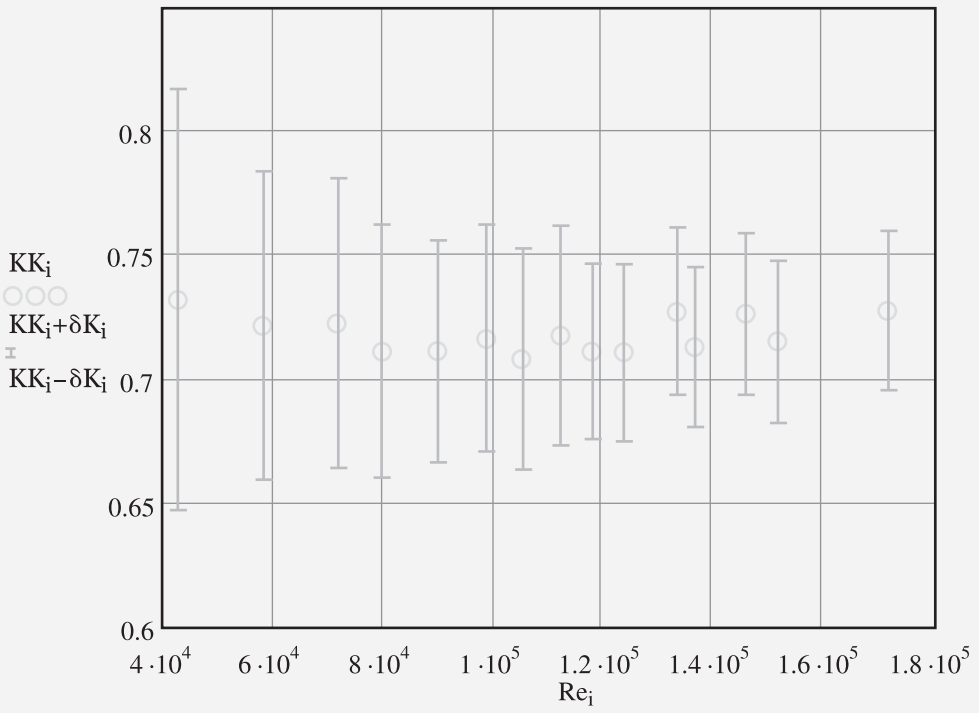


Fig. 13.28 (*continuación*)

13.5.3 Análisis de regresión

Una gran variedad de dispositivos de medición de flujo correlacionan la descarga con la caída de presión o carga de acuerdo con la fórmula general

$$Y = CX^m \tag{13.5.5}$$

en la que Y es el resultado derivado, X es el mensurando, y C y m son constantes. Si tomamos varias mediciones independientes de X y de Y, podemos hallar estimaciones de C y de m. Un método sistemático para determinar C y m es hallar las mejores estimaciones basadas en el método de mínimos cuadrados. Si se obtiene el logaritmo de cada lado de la ecuación 13.5.5, se convierte en

$$\ln Y = \ln C + m \ln X \tag{13.5.6}$$

que es de la forma

$$y = b + mx \tag{13.5.7}$$

Por asociación, observamos que la ecuación 13.5.6 es lineal siempre que $y = \ln Y$, $b = \ln C$, y $x = \ln X$.

Considere el conjunto de datos X_i, Y_i, $i = 1, \ldots, n$. El objetivo es generar una recta a través de los logaritmos de los datos (x_i, y_i) tal que los errores de estimación sean pequeños. Ese error se define como la diferencia entre el valor observado y_i y el valor correspondiente en la recta; en la figura 13.29, s_i es el error asociado con el punto de datos (x_i, y_i). El método de mínimos cuadrados requiere que para minimizar el error, la suma de los cuadrados de los errores de todos los datos sea tan pequeña como sea posible. De la ecuación 13.5.7,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - (b + mx_i)]^2 \end{aligned} \tag{13.5.8}$$

El parámetro S se minimiza al formar las derivadas parciales de S respecto a b y a m, igualando a cero las ecuaciones algebraicas resultantes y despejando b y m. Se deja como ejercicio para el lector derivar los resultados:

$$m = \frac{\Sigma\, x_i y_i - (\Sigma\, x_i\, \Sigma\, y_i)/n}{\Sigma\, x_i^2 - (\Sigma\, x_i)^2/n} \tag{13.5.9}$$

$$b = \frac{\Sigma\, y_i - m\, \Sigma\, x_i}{n} \tag{13.5.10}$$

$$C = e^b \tag{13.5.11}$$

Es posible elaborar un algoritmo de cómputo simple para evaluar m y C con base en un conjunto de datos de entrada (X_i, Y_i) o, alternativamente, puede usarse una solución en una hoja de cálculo.

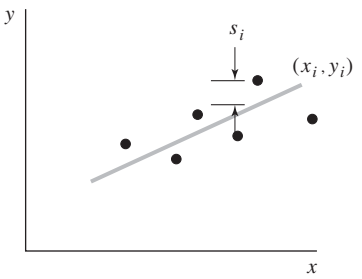


Fig. 13.29 Método de mínimos cuadrados.

Ejemplo 13.2

Con los datos dados en el ejemplo 13.1, realice una regresión de mínimos cuadrados para determinar el coeficiente C y el exponente m en la ecuación 13.5.5. Compare el resultado con la ecuación 13.3.8.

Solución

Las ecuaciones 13.5.9 a 13.5.11 se emplean para evaluar C, b y m. En las ecuaciones 13.5.9 y 13.5.10, x es sustituida por $\ln \Delta h = \ln(h_1 - h_2)$, y y es sustituida por $\ln Q$. Los cálculos están tabulados en la tabla siguiente.

i	$x_i = \ln \Delta h$	$y_i = \ln Q$	x_i^2	$x_i y_i$
1	−1.9733	−6.7338	3.8939	13.2878
2	−1.3280	−6.4253	1.7636	8.5328
3	−0.9088	−6.2146	0.8259	5.6478
4	−0.6597	−6.1058	0.4352	4.0280
5	−0.4231	−5.9875	0.1790	2.5333
6	−0.2472	−5.8925	0.06111	1.4566
7	−0.09761	−5.8293	0.009528	0.5690
8	0.007968	−5.7635	0.00006349	−0.0459
9	0.1258	−5.7138	0.01583	−0.7188
10	0.2207	−5.6665	0.04871	−1.2506
11	0.3264	−5.5913	0.1065	−1.8250
12	0.4134	−5.5675	0.1709	−2.3016
13	0.5086	−5.5017	0.2587	−2.7982
14	0.6163	−5.4632	0.3798	−3.3670
15	0.8299	−5.3391	0.6887	−4.4309
Σ	−2.5886	−87.7954	8.8374	19.3173

Sustituya en las ecuaciones 13.5.9 a 13.5.11 los valores sumados:

$$m = \frac{19.3173 - (-2.5886)(-87.7954)/15}{8.8374 - (-2.5886)^2/15} = 0.497$$

$$b = \frac{-87.7954 - 0.497(-2.5886)}{15} = -5.7673$$

$$C = \exp(-5.7673) = 0.00313$$

De aquí que la descarga está correlacionada con Δh mediante la curva de regresión

$$Q = 0.00313\ \Delta h^{0.497}$$

Con base en el análisis realizado en el ejemplo 13.1, el valor promedio de K es 0.718. El área del orificio es $A_0 = 9.84 \times 10^{-4} \text{m}^2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación 13.3.8, encontramos que

$$Q = 0.00313\ \Delta h^{0.500}$$

Entonces los dos resultados son muy similares. Los datos y la recta de regresión están graficados en la figura E13.2.

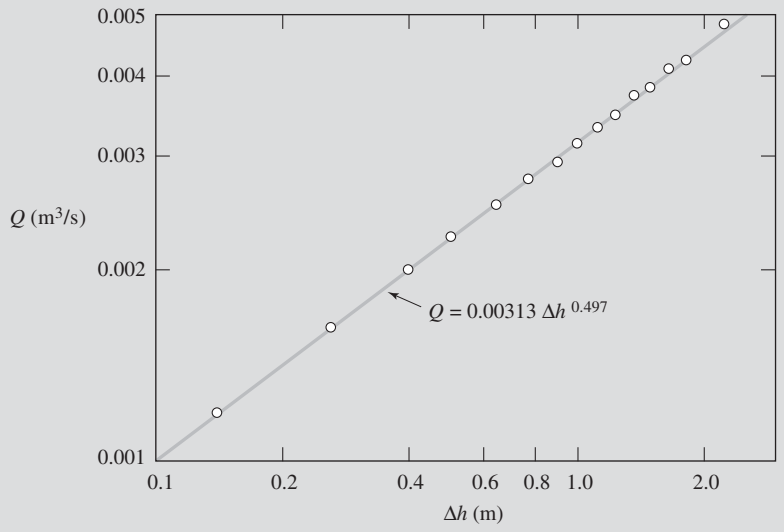


Fig. E13.2

Una solución con Mathcad para el ejemplo 13.2 se encuentra en la figura 13.30.

Datos de entrada:

$n := 15$

$$\begin{pmatrix} 0.00119 & 0.139 \\ 0.00162 & 0.265 \\ 0.002 & 0.403 \\ 0.00223 & 0.517 \\ 0.00251 & 0.655 \\ 0.00276 & 0.781 \\ 0.00294 & 0.907 \\ 0.00314 & 1.008 \\ 0.0033 & 1.134 \\ 0.00346 & 1.247 \\ 0.00373 & 1.386 \\ 0.00382 & 1.512 \\ 0.00408 & 1.663 \\ 0.00424 & 1.852 \\ 0.0048 & 2.293 \end{pmatrix}$$

Fig. 13.30 Solución con Mathcad del ejemplo 13.2.

Convierta a forma logarítmica: $X := \ln(M^{\langle 1 \rangle})$ $Y := \ln(M^{\langle 0 \rangle})$

Calcule m, b y C:

$$m := \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot Y_i\right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{\sum_{i=0}^{n-1} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right)^2 \cdot \frac{1}{n}} \qquad b := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i - m \cdot \sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \qquad C := \exp(b)$$

$m = 0.496$ $b = -5.767$ $C = 3.128 \times 10^{-3}$

Grafique Q contra Δh:

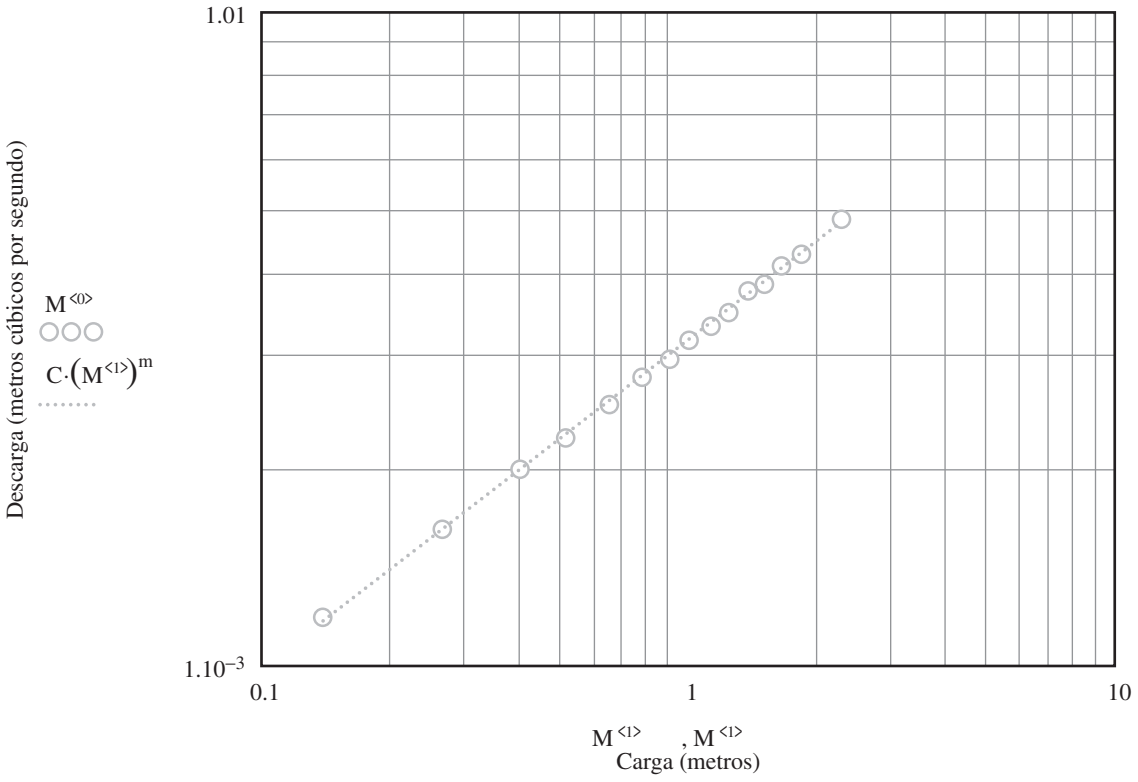


Fig. 13.30 (*continuación*)

13.6 RESUMEN

Existen numerosos aparatos para medir los parámetros de un flujo; hemos presentado algunos de los más comunes. En primer término examinamos el monitoreo de la presión y la velocidad en lugares discretos en campos de flujo, seguido por descripciones de mediciones de gasto integrado o descarga. Se utilizan diversos aparatos para la medición de estos parámetros, que van desde los puramente mecánicos hasta los electromecánicos.

La visualización del flujo es una técnica importante que se utiliza en laboratorios industriales y de investigación para estudiar campos complejos de flujo, en especial los turbulentos. Se presentaron los usos de los trazadores y de los métodos del índice de refracción. De estos métodos, las técnicas de velocimetría están ganando rápidamente la preferencia debido a avances recientes en el campo de obtención de imágenes por computadora y al desarrollo de tintes activados por láser.

En la actualidad, una variedad importante de mediciones están automatizadas y pueden requerir de una interfaz analógica o digital con los registradores de datos o con las computadoras personales. Cualquiera que sea la forma en la que se adquieran y almacenen datos, quien tome los datos debe estar consciente de las incertidumbres que están presentes y que son inevitables en el proceso de adquisición de datos. Hemos mostrado cómo las incertidumbres presentes en los parámetros medidos pueden ser propagadas en los resultados usando para ello un análisis en hojas de cálculo o software computacional. Estas técnicas son útiles, por ejemplo, para determinar qué tan preciso o confiable puede ser un medidor de flujo, o para diseñar un experimento para calibrar un medidor de velocidad que asegure un grado de precisión determinado. Por último, se aplicó el análisis de regresión para determinar los parámetros que describen una relación exponencial que correlaciona la descarga con la caída de presión o carga.

PROBLEMAS

13.1 Un manómetro inclinado a 20º, colocado en una abertura de un piezómetro, se usa para medir la presión en la pared producida por un flujo de aire. Si la lectura medida es de 4 cm de mercurio, calcule la presión en la pared.

13.2 Se ha de utilizar una sonda estática Pitot para mediciones repetidas de la velocidad de una corriente de aire atmosférico. Se desea relacionar la velocidad V con la lectura del manómetro h en centímetros de mercurio (es decir, $V = C\sqrt{h}$). Calcule el valor de la constante C para un laboratorio a 20 ºC situado:

(a) Al nivel del mar

(b) A una elevación de 2000 m

13.3 Se propone una sonda estática Pitot, conectada a un manómetro que tiene agua como fluido del manómetro, como el dispositivo medidor para un flujo de aire con velocidad de 8 m/s. ¿Qué lectura del manómetro se espera? Comente respecto al uso del dispositivo propuesto.

13.4 Agua a 75 ºF fluye a través de un tubo de 0.1 in de diámetro que entra en un tanque calibrado. Si 2 cuartos de galón se colectan en 10 minutos, calcule el gasto (ft^3/s), el flujo másico (slug/s), y la velocidad promedio (ft/s). ¿Es el flujo laminar, turbulento, o no puede determinarlo?

13.5 Una velocidad transversal en un canal rectangular, que mide 10 cm por 100 cm, está representada por los datos siguientes. Estime el gasto y la velocidad promedio suponiendo un flujo plano simétrico.

y (cm)	0	0.5	1	2	3	4	5
u (m/s)	0	5.2	8.1	9.2	9.8	10	10

13.6 Una velocidad transversal en un tubo de 10 cm de diámetro está representada por los datos siguientes. Estime el gasto y la velocidad promedio suponiendo un flujo simétrico.

r (cm)	0	1	2	3	4	4.5
u (m/s)	10	10	9.8	9.2	8.1	5.2

13.7 El gasto de agua a través de un tubo de 12 cm de diámetro se mide con un medidor Venturi de 6 cm de diámetro, encontrándose que es 0.09 m³/s. ¿Cuál es la deflexión esperada en un manómetro de agua-mercurio? Suponga que la temperatura del agua es 20 ºC.

13.8 Se desea determinar el gasto de un flujo de agua a 20 ºC a través de un tubo de 24 cm de diámetro. Si un manómetro de agua-mercurio lee 12 cm, calcule la descarga si el manómetro está conectado a:

(a) Un orificio de 15 cm de diámetro

(b) Una tobera de 15 cm de diámetro

13.9 Calcule el gasto de agua a 40 ºC a través de los tubos mostrados en la figura P13.9.

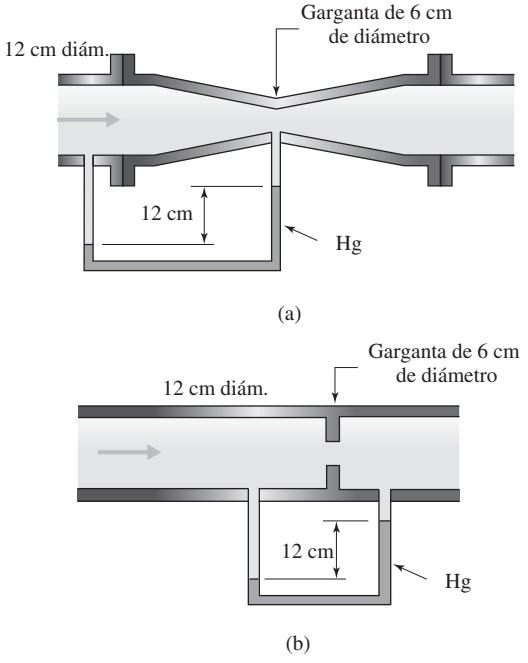


Fig. P13.9

13.10 Se mide una diferencia de presión a través de un codo en una tubería de agua. Estime el gasto en la tubería. La diferencia de presión, el diámetro del tubo y el radio de curvatura son, respectivamente:

(a) 80 kPa, 10 cm, 20 cm

(b) 80 kPa, 5 cm, 20 cm

(c) 10 psi, 4 in, 8 in

(d) 10 psi, 2 in, 8 in

Use agua a una temperatura de 20 ºC.

13.11 Se utiliza un tubo Pitot para medir la velocidad de gasolina que fluye por una tubería. La estimación de la velocidad está dada por la ecuación

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T - p_1)}$$

en la que v_1 es la velocidad local en la ubicación 1, ρ es la densidad del líquido, p_T es la presión total medida por el tubo, y p_1 es la presión estática en la ubicación 1. Se estima que la densidad es 680 ± 50 kg/m³ (P = 0.95, desviación 0).

(a) Suponga que las dos presiones se miden separadamente usando manómetros individuales: p_T = 102 ± 1 kPa (P = 0.95, desviación 0), p_1 = 95 ± 1 kPa (P = 0.95, desviación 0). Estime la incertidumbre para v_1.

(b) Suponga que la diferencia de presión $p_T - p_1$ se mide usando un solo manómetro de presión diferencial: $p_T - p_1$ = 7 ± 1 kPa (P = 0.95, desviación 0). Estime la incertidumbre para v_1.

(c) ¿Cuál configuración es preferible, (a) o (b)?

13.12 En la tabla siguiente están tabulados unos datos experimentales que se emplean para calibrar descargas de agua en un medidor Venturi. El diámetro de la garganta del medidor es 33.3 mm y el diámetro en la ubicación de la toma corriente arriba del manómetro es de 54.0 mm. La precisión δQ de las mediciones de descarga tiene una desviación cero y P = 0.95, y la precisión para todas las mediciones del manómetro es $\delta(\Delta h)$ = 2 mm Hg, con desviación cero y P = 0.95. Observe que las lecturas del manómetro están dadas en mm Hg. Con el uso de la ecuación 13.3.8, determine las incertidumbres en K como resultado de las incertidumbres en los dos mensurandos. Grafique los resultados en una forma semejante a los del ejemplo 13.1 y compare la curva con la figura P13.10.

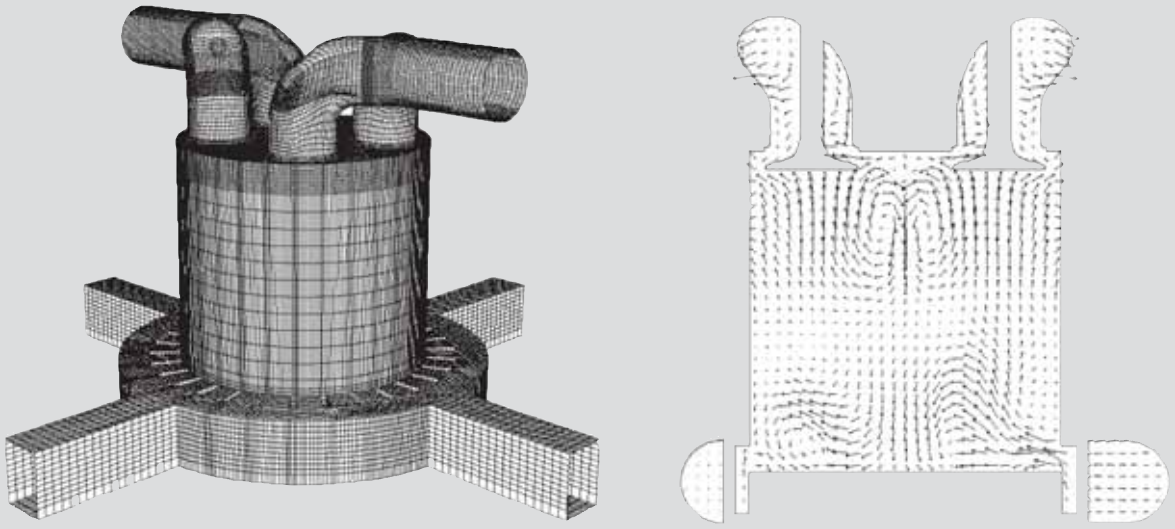
Dato núm. i	Q (m³/s)	δQ (m³/s)	Δh (mm Hg)	Re
1	0.00168	0.00011	13	64 200
2	0.00208	0.00014	22	79 500
3	0.00249	0.00016	32	95 100
4	0.00281	0.00019	40	107 400
5	0.00328	0.00022	54	125 300
6	0.00355	0.00024	62	135 600
7	0.00372	0.00025	70	142 100
8	0.00402	0.00023	82	153 600
9	0.00415	0.00024	91	158 600
10	0.00444	0.00025	100	169 700
11	0.00479	0.00027	113	183 000
12	0.00493	0.00028	123	188 400
13	0.00523	0.00030	134	199 800
14	0.00533	0.00035	140	203 700
15	0.00509	0.00029	140	194 500

13.13 Con los resultados numéricos obtenidos en el ejemplo 13.1, grafique la incertidumbre relativa $\delta K/K$ contra Re en una escala lineal. ¿Qué conclusiones puede sacar?

13.14 Usando los datos del problema 13.12, realice una regresión de mínimos cuadrados y determine el coeficiente C y el exponente m en la ecuación 13.5.5. Compare el resultado con la ecuación 13.3.8. Observe que las lecturas del manómetro están dadas en mm de Hg.

13.15 Establezca una relación profundidad-descarga de la forma $Q = CY^m$, para un vertedero de cresta afilada triangular a 60º, usando los datos de la tabla siguiente. En la ecuación, Y es la distancia vertical desde el vértice del vertedero hasta la superficie no perturbada del agua corriente arriba y Q es la descarga (vea la figura 10.11). Compare el resultado con la ecuación 10.4.27.

Dato núm. i	Q (ft^3/s)	Y (ft)
1	0.1390	0.387
2	0.1300	0.378
3	0.1280	0.374
4	0.1140	0.357
5	0.0963	0.336
6	0.0937	0.320
7	0.0809	0.312
8	0.0781	0.306
9	0.0751	0.302
10	0.0697	0.297
11	0.0518	0.263
12	0.0435	0.244
13	0.0418	0.238
14	0.0319	0.206



Análisis de dinámica de fluidos computacional del cilindro del diseño propuesto de un motor. A la izquierda está la malla con áreas de la cuadrícula refinada en zonas de flujo crítico; a la derecha, una gráfica de los vectores velocidad que muestran el campo de flujo en una sección transversal plana. (Cortesía de Bassem Ramadan.)

14

Dinámica de fluidos computacional

Esquema

14.1 Introducción
14.2 Ejemplos de métodos de diferencia finita
  14.2.1 Discretización del dominio
  14.2.2 Discretización de las ecuaciones regentes
  14.2.3 Definición del algoritmo de solución
  14.2.4 Comentarios sobre la elección de operadores de diferencia
14.3 Estabilidad, convergencia y error
  14.3.1 Consistencia
  14.3.2 Estabilidad numérica
  14.3.3 Convergencia
  14.3.4 Errores numéricos
14.4 Solución del flujo de Couette
14.5 Solución de flujo potencial de estado permanente bidimensional
14.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar una introducción a los métodos de diferencia finita.
- Presentar ideas sobre consistencia, estabilidad numérica, convergencia y errores.
- Presentar métodos de diferencias finitas.
- Presentar una solución de diferencia finita para el flujo de Couette transitorio.
- Presentar una solución de diferencia finita para el flujo potencial de estado permanente.

14.1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que rigen los problemas de flujo de fluidos son las de *continuidad*, las de *Navier-Stokes* y las *ecuaciones de energía*. Estas ecuaciones, deducidas en el capítulo 5, forman un sistema de *ecuaciones diferenciales parciales* (EDP) acopladas casi en forma lineal. Debido a los términos no lineales en estas EDP, los métodos analíticos pueden dar muy pocas soluciones. En general, las soluciones analíticas son posibles sólo si estas EDP pueden hacerse lineales, ya sea porque los términos no lineales se cancelan naturalmente (por ejemplo, los flujos desarrollados por completo en conductos y flujos que son irrotacionales en todas partes) o porque los términos no lineales son pequeños cuando se comparan con otros términos de modo que puedan pasarse por alto (por ejemplo, los flujos donde el número de Reynolds es menor que la unidad). Yih (1969) y Schlichting & Gersten (2000) describen la mayoría de las soluciones analíticas mejor conocidas. Si las no linealidades en las ecuaciones diferenciales parciales regentes no pueden ignorarse, que es la situación para la mayoría de los flujos en ingeniería, entonces se requiere de métodos numéricos para obtener soluciones.

Páginas 669-672, 807, 821 de soluciones de dinámica de fluidos computacional

La *dinámica de fluidos computacional*, o simplemente DFC, se ocupa de obtener soluciones numéricas para problemas de flujo de fluidos mediante el uso de computadoras. La llegada de computadoras de alta velocidad y gran capacidad de memoria ha hecho posible que la DFC obtenga soluciones para muchos problemas de flujo, incluyendo los que son compresibles o incompresibles, laminares o turbulentos, químicamente reactivos o no reactivos, de una fase o de múltiples fases. De los métodos numéricos desarrollados para resolver ecuaciones que rigen problemas de flujo de fluidos, los *métodos de diferencia finita* (MDF) y los *métodos de volumen finito* (MVF) son los de uso más generalizado. En este capítulo, damos una introducción a los MDF y presentamos las soluciones para dos problemas de flujos de fluido clásicos usando diferencias finitas (DF).

Como se usan computadoras para obtener soluciones, es importante entender las restricciones que imponen. De estas restricciones, cuatro son críticas. La primera es que las computadoras pueden ejecutar sólo operaciones aritméticas (es decir, +, −, × y ÷) y lógicas (es decir, verdadero o falso). Esto significa que las operaciones no aritméticas, por ejemplo derivadas e integrales, deben representarse en términos de operaciones aritméticas y lógicas. La segunda restricción es que las computadoras representan números usando un número finito de dígitos. Esto significa que hay errores de redondeo y que éstos deben ser controlados. La tercera restricción es que las computadoras tienen memorias de almacenamiento limitadas. Esto significa que pueden obtenerse soluciones sólo con un número finito de puntos en el espacio y el tiempo. Por último, las computadoras ejecutan un número finito de operaciones por unidad de tiempo. Esto significa que los procedimientos de solución deben reducir al mínimo el tiempo de cómputo necesario para ejecutar una tarea computacional al utilizar completamente todos los procesadores disponibles en una computadora y reducir al mínimo el número de operaciones.

Con estas restricciones, los métodos DF (de diferencias finitas) generan soluciones para las EDP por medio de los siguientes tres pasos principales:

1. **Discretización del dominio.** El dominio espacial y temporal continuo del problema debe ser sustituido por uno discreto compuesto de puntos de una cuadrícula o celdas y niveles de tiempo. El proceso ideal de discreción usa el menor número de puntos/celdas de cuadrícula y niveles de tiempo para obtener soluciones con la precisión deseada.

2. **Discretizar las EDP.** Las EDP que rigen el problema deben ser sustituidas por un conjunto de ecuaciones algebraicas, con los puntos/celdas de cuadrícula y los niveles de tiempo como su dominio. Idealmente las ecuaciones algebraicas, conocidas como ecuaciones de diferencia finita (EDF), deben describir la misma física que las descritas por las EDP regentes.
3. **Especificar el algoritmo.** El procedimiento paso a paso mediante el cual las soluciones en los puntos/celdas de cuadrícula se obtienen de las ecuaciones DF, cuando avancen de un nivel de tiempo al siguiente, debe describirse en detalle. Idealmente, el algoritmo debe asegurar no sólo soluciones precisas sino también eficiencia al utilizar una computadora.

Estos pasos se ilustran por medio de problemas de ejemplo en las secciones 14.4 y 14.5.

14.2 EJEMPLOS DE MÉTODOS DE DIFERENCIA FINITA

Para ilustrar los métodos de diferencia finita (MDF), considere el flujo laminar no permanente, incompresible, de un fluido con viscosidad cinemática constante v entre dos placas paralelas separadas una distancia H, como se muestra en la figura 14.1. Inicialmente, ambas placas están estacionarias y el fluido entre ellas está estancado. Súbitamente en el tiempo $t = 0$, la placa inferior se mueve horizontalmente hacia la derecha (en la dirección x positiva) a una velocidad constante V_0.

Las ecuaciones que rigen este flujo son la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes de las componentes x y y. Como el flujo es paralelo (es decir, $v = 0$) y la presión es la misma en todas partes, estas ecuaciones se reducen a la siguiente ecuación diferencial parcial lineal única:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14.2.1}$$

Las condiciones iniciales y límite para la ecuación 14.2.1 son, suponiendo $u = u(y, t)$,

$$\begin{aligned} &u(y, t = 0) = 0, \qquad u(0, t) = V_0 \qquad u(y = H, t) = 0 \\ &u(y, 0) = 0 \qquad u(0, t) = V_0 \qquad u(H, t) = 0 \end{aligned} \tag{14.2.2}$$

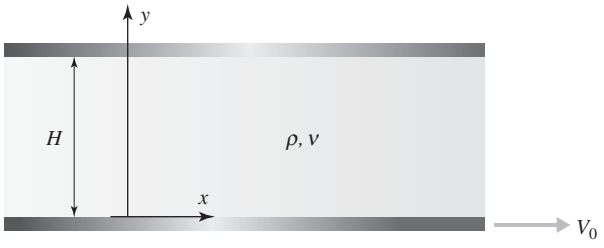


Fig. 14.1 Flujo entre placas paralelas estacionarias y móviles.

Como la ecuación 14.2.1 es lineal y las condiciones límite dadas por la ecuación 14.2.2 son homogéneas, la separación de las variables puede dar la solución analítica exacta

$$u/V_0 = 1 - y/H - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi y/H) \exp(-n^2\pi^2 \nu t/H^2) \qquad (14.2.3)$$

Esta solución exacta puede usarse para evaluar la precisión de los MDF a presentar.

Como se menciona, se requieren tres pasos para generar soluciones para las EDP usando un MDF. Estos tres pasos se ilustran a continuación, uno a la vez para las ecuaciones 14.2.1 y 14.2.2.

14.2.1 Discretización del dominio

Para discretizar el dominio, observamos que el dominio espacial es un segmento de recta entre 0 y H, y que el dominio temporal es un rayo que emana cuando $t = 0$. Aun cuando el dominio temporal es de extensión infinita, la duración de interés es finita, por ejemplo de $t = 0$ a $t = T$, donde T es el tiempo cuando se alcanza el estado permanente. Aquí, el dominio espacial, $0 \le y \le H$, se discretiza al sustituirlo con J puntos estacionarios de cuadrícula igualmente distribuidos, y el dominio temporal, $0 \le t \le T$ se discretiza al sustituirlo con niveles de tiempo igualmente incrementados (vea la figura 14.2). Esta discretización del dominio es uno de muchos casos. Por ejemplo, los puntos de la cuadrícula no tienen que estar distribuidos de manera uniforme ni tienen que estar estacionarios.

Cada punto en el dominio discretizado, mostrado en la figura 14.2, tiene coordenadas (y_j, t^n), dadas por

$$y_j = (j-1)\,\Delta y, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, J \qquad (14.2.4)$$

$$t^n = n\,\Delta t, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (14.2.5)$$

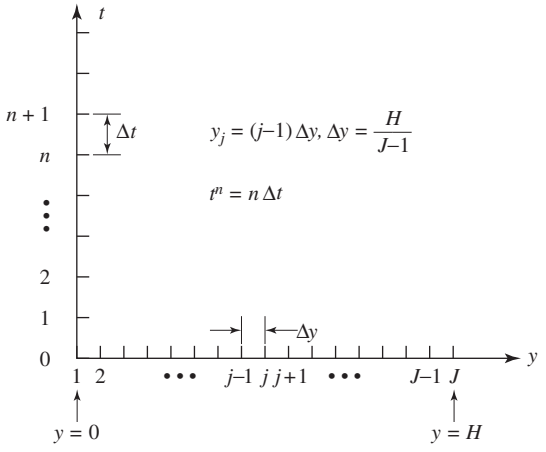


Fig. 14.2 Sistema de cuadrícula y niveles de tiempo para el problema descrito en la figura 14.1.

donde $\Delta y = H/(J-1)$ es la distancia entre dos puntos adyacentes de la cuadrícula (o la separación de la cuadrícula), y Δt es el incremento de tiempo. Las dimensiones de la separación de la cuadrícula y el incremento de tiempo dependen de las escalas de longitud y tiempo que necesitan ser resueltas y también dependen de las propiedades de las EDP discretizadas para obtener soluciones.

La solución buscada, es decir $u(y,t)$ en la ecuación 14.2.1, se obtendrá sólo en los puntos de la cuadrícula y en los niveles de tiempo. Esa solución está denotada como

$$u_j^n = u(y_j, t^n) \tag{14.2.6}$$

donde los subíndices denotan las ubicaciones de los puntos de la cuadrícula y los exponentes denotan niveles de tiempo.

14.2.2 Discretización de las ecuaciones regentes

Con el dominio discretizado, el siguiente paso es sustituir las EDP que rigen el problema por un conjunto de ecuaciones de diferencia finita (EDF), o algebraicas, que usan los puntos de la cuadrícula y los niveles de tiempo como el dominio. Con los métodos de diferencia finita (MDF), las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) se discretizan sustituyendo derivadas con operadores de diferencia. Entonces, la discretización comprende dos partes. Primero, derivar los *operadores de diferencia.* A continuación, seleccionar operadores de diferencia.

Derivación de los operadores de diferencia. Existen muchas formas diferentes de derivar operadores de diferencia. Para problemas con soluciones uniformes (es decir, soluciones sin discontinuidades tales como ondas de choque), con frecuencia se usa un método basado en el siguiente teorema: *Si una función, u, y sus derivadas son continuas, de un solo valor y finitas, entonces el valor de esa función en cualquier punto puede ser expresado en términos de u y sus derivadas en cualquier otro punto si se usa un desarrollo de la serie de Taylor, siempre que el otro punto se encuentre dentro del radio de convergencia de la serie.* Con este teorema, u_{j+1} y u_{j-1} pueden expresarse en términos de u_j y sus derivadas como

$$u_{j+1} = u_j + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{\Delta y^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{\Delta y^3}{3!} + \cdots \tag{14.2.7}$$

$$u_{j-1} = u_j - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{\Delta y^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{\Delta y^3}{3!} + \cdots \tag{14.2.8}$$

De las dos series de Taylor anteriores, podemos derivar fácilmente los siguientes cuatro operadores de diferencia despejando $(\partial u/\partial y)_j$ y $(\partial^2 u/\partial y^2)_j$ ya sea directamente o al sumar o restar las dos ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta y} + \mathrm{O}(\Delta y) \tag{14.2.9}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta y} + \mathrm{O}(\Delta y) \tag{14.2.10}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta y} + \mathrm{O}(\Delta y^2) \tag{14.2.11}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta y^2} + \mathrm{O}(\Delta y^2) \tag{14.2.12}$$

En los operadores de diferencia previos, $O(\Delta y)$ y $O(\Delta y^2)$ denotan los errores de truncado (o redondeo, es decir, términos de la serie de Taylor que han sido truncados). En las ecuaciones 14.2.9 y 14.2.10, la potencia de Δy en $O(\Delta y)$ es uno porque el término principal de los errores de truncado para estos dos operadores de diferencia se multiplica por Δy elevado a la primera potencia. Se dice que estos operadores de diferencia son precisos en primer grado. En las ecuaciones 14.2.11 y 14.2.12, la potencia es dos porque el término principal en los errores de truncado se multiplica por Δy elevado a la segunda potencia. Se dice que estos operadores de diferencia son precisos en segundo grado. Cuanto más alto sea el grado de precisión, mayor es el número de términos retenidos en la serie de Taylor truncada. Para Δy suficientemente pequeño, un operador de diferencia preciso en mayor grado es una representación más precisa de una función uniforme que un operador de diferencia preciso en menor grado. En general, la precisión de segundo grado es adecuada.

Los puntos de cuadrícula empleados para construir un operador de diferencia forman la plantilla de ese operador de diferencia. Si la plantilla para un operador de diferencia en y_j comprende sólo puntos de la cuadrícula con índices mayores que o iguales a j como la ecuación 14.2.9, entonces se dice que es un operador de diferencia adelantado. Si todos los puntos de la cuadrícula tienen índices menores que o iguala a j como la ecuación 14.2.10, entonces se dice que es un operador de diferencia atrasado. Si el número de puntos de la cuadrícula delante y detrás de j son exactamente iguales como en las ecuaciones 14.2.11 y 14.2.12, se dice que es un operador de diferencia central. Si el número de puntos de la cuadrícula adelante y después de j no son iguales, se dice que el operador de diferencia está desviado hacia atrás o hacia adelante.

La serie de Taylor puede usarse para derivar operadores de diferencia para cualquier derivada a cualquier grado de precisión y usando cualquier plantilla. Para ilustrar, considere la derivación de un operador de diferencia para una derivada de primer grado, $(\partial u/\partial y)_j$, con las siguientes especificaciones: precisión de tercer grado, $O(\Delta y^3)$, con una plantilla que incluye sólo un punto de cuadrícula corriente abajo. La derivación de este operador de diferencia comprende los cuatro pasos siguientes:

Paso 1: Determinar el número de términos a mantener en cada serie de Taylor. Ese número, denotado como N, es igual al grado de la derivada para la cual se busca el operador de diferencia más el grado de precisión deseado. Para este caso, el grado de la derivada es 1, y el grado de precisión deseado es 3. Entonces, N es 4.

Paso 2: Decidir respecto a una plantilla basada en N puntos para el operador de diferencia en el punto j. Para este caso con $N = 4$ y $u > 0$, los 4 puntos de la plantilla son $j-2, j-1, j, j+1$. Otras plantillas posibles incluyen: $(j-3, j-2, j-1, j)$ o completamente a la inversa, $(j-1, j, j+1, j+2)$ o desviada hacia delante y $(j, j+1, j+2, j+3)$ o completamente adelantado.

Paso 3: Construir $N-1$ series de Taylor truncadas respecto a u_j desde u en todos los puntos de la plantilla excepto el punto j. Realizando esta operación tendremos

$$u_{j+1} = u_j + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{\Delta y^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{\Delta y^3}{3!} + O(\Delta y^4) \tag{14.2.12}$$

$$u_{j-1} = u_j - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{\Delta y^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{\Delta y^3}{3!} + O(\Delta y^4) \tag{14.2.13}$$

$$u_{j-2} = u_j - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j 2\Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{(2\Delta y)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{(2\Delta y)^3}{3!} + O(\Delta y^4) \tag{14.2.14}$$

En las tres ecuaciones anteriores, las incógnitas son la primera, segunda y tercera derivadas, y deben ser expresadas en términos de u en los puntos de la plantilla.

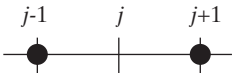
Paso 4: Despejar el operador de diferencia buscado de las $N - 1$ ecuaciones lineales acopladas. Para la primera derivada, resolviendo las tres ecuaciones anteriores tendremos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j = \frac{2u_{j+1} + 3u_j - 6u_{j-1} + u_{j-2}}{6\Delta y} + O(\Delta y^3) \tag{14.2.15}$$

Los operadores de diferencia para la segunda y tercera derivadas también se derivan en el proceso de despejar el operador de diferencia previo. Los grados de precisión de estos operadores de diferencia son de segundo grado para la segunda derivada y de primer grado para la tercera derivada.

En la tabla 14.1 se resumen algunos operadores de diferencia que se usan comúnmente. Observe que si j y Δy son sustituidas por n y Δt, entonces los operadores de diferencia también pueden usarse para derivadas respecto al tiempo.

Tabla 14.1 Resumen de operadores de diferencia de uso común.

Descripción	*Diferencia finita*	*Plantilla*
Primera derivada: $(\partial u/\partial y)_j$		
central, $O(\Delta y^2)$	$(u_{j+1} - u_{j-1})/2\Delta y$	
retrasada, $O(\Delta y)$	$(u_j - u_{j-1})/\Delta y$	
adelantada, $O(\Delta y)$	$(u_{j+1} - u_j)/\Delta y$	
retrasada, $O(\Delta y^2)$	$(3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2})/2\Delta y$	
adelantada, $O(\Delta y^2)$	$(-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2})/2\Delta y$	
Segunda derivada: $(\partial^2 f/\partial y^2) = (\partial u/\partial y)_j, u = \partial f/\partial y$		
central, $O(\Delta y^2)$	$(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})/\Delta y^2$	
retrasada, $O(\Delta y)$	$(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})/\Delta y^2$	
adelantada, $O(\Delta y)$	$(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})/\Delta y^2$	

Seleccionar operadores de diferencia. Para seleccionar operadores de diferencia, aplicamos la ecuación diferencial parcial (EDP) regente a ser discretizada (ecuación 14.2.1) en un punto de cuadrícula interior arbitrario (un punto de cuadrícula no localizado en el límite) y en un tiempo entre t^n y t^{n+1}:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^{n'} \tag{14.2.16}$$

donde n' es n, $n + 1$, o algún valor entre n y $n + 1$. En esta ecuación, se supone que la solución en el tiempo t^n es conocida y que se busca la solución en t^{n+1}. Esta suposición es generalmente aplicable porque la solución es siempre conocida en el nivel de tiempo anterior. Por ejemplo, en el nivel de tiempo ceroésimo ($n = 0$), la solución es la condición inicial.

Un método explícito. Si $n' = n$ en la ecuación 14.2.16, entonces todas las derivadas espaciales se evalúan en el tiempo t^n, el nivel de tiempo anterior donde se conoce la solución. Si elegimos el operador de diferencia adelantado dado por la ecuación 14.2.9 para $(\partial u/\partial t)_j^n$ (excepto que se sustituyen y y j con t y n) y el operador de diferencia central dado por la ecuación 14.2.12 para $(\partial^2 u/\partial y^2)_j^n$, entonces la ecuación 14.2.16 se convierte en

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + \mathrm{O}(\Delta t, \Delta y^2) \tag{14.2.17}$$

La ecuación de diferencia finita (EDF) previa es precisa en primer grado y precisa en segundo grado en el espacio como lo indica $\mathrm{O}(\Delta t, \Delta y^2)$. En esta ecuación, u_j^{n+1} es la incógnita buscada, y despejándola tendremos

$$u_j^{n+1} = \beta u_{j-1}^n + (1 - 2\beta)u_j^n + \beta u_{j+1}^n, \qquad \beta = \nu\, \Delta t/\Delta y^2 \tag{14.2.18}$$

La EDF en forma de la ecuación 14.2.17 o 14.2.18 puede aplicarse a cualquier punto interior de la cuadrícula ($j = 2, 3, \ldots, J - 1$). Las EDF en los puntos de cuadrícula en el límite ($j = 1$ y J) se obtienen usando *condiciones límite*. Para este sencillo problema, las condiciones límite, dadas por la ecuación 14.2.2, fácilmente dan las siguientes EDF:

$$u_1^n = u_1^{n+1} = V_0 \tag{14.2.19}$$

$$u_J^n = u_J^{n+1} = 0 \tag{14.2.20}$$

Observe que las EDF dadas por las ecuaciones 14.2.17 y 14.2.20 tienen sólo una incógnita en ellas, es decir, u_j^{n+1}, una consecuencia de hacer $n' = n$ en la ecuación 14.2.16. Se dice que un método es explícito cuando está compuesto exclusivamente de estas ecuaciones de diferencia finita. Este método explícito particular con una deferenciación en el tiempo adelantado con precisión de primer grado se conoce como el *esquema explícito de Euler*.

Un método implícito. Si $n' = n + 1$ en la ecuación 14.2.16, entonces todas las derivadas espaciales se evalúan en t^{n+1}, el nuevo nivel de tiempo donde la solución es desconocida. Si elegimos el operador de diferencia atrasada dado por la ecuación 14.2.10 para $(\partial u/\partial t)_j^{n+1}$ para acoplar t^{n+1} con t^n y el operador de diferencia central dado por la ecuación 14.2.11 para $(\partial^2 u/\partial y^2)_j^{n+1}$, entonces la ecuación 14.2.16 se convierte en

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \mathrm{O}(\Delta t, \Delta y^2) \tag{14.2.21}$$

que se puede reescribir como

$$-\beta u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\beta)u_j^{n+1} - \beta u_{j+1}^{n+1} = u_j^n, \quad \beta = \nu\, \Delta t/\Delta y^2 \tag{14.2.22}$$

Similar a la ecuación 14.2.18, la precisión de la ecuación anterior es de primer grado en el tiempo y de segundo grado en el espacio. Pero difiere en que hay tres incógnitas, u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}, y u_{j+1}^{n+1} en lugar de una en la ecuación de diferencia finita. Esta diferencia es una consecuencia de evaluar las derivadas espaciales en t^{n+1} en lugar de en t^n. Al aplicar la ecuación 14.2.22 en cada punto interior de la cuadrícula y con el uso de las ecuaciones 14.2.19 y 14.2.20 para los puntos de la cuadrícula en el límite, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{14.2.23}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & & & & & \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta & & & & \\ & -\beta & 1+2\beta & -\beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\beta & 1+2\beta & -\beta & \\ & & & & -\beta & 1+2\beta & \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u_2^n + \beta V_0 \\ u_3^n \\ u_4^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{bmatrix} \tag{14.2.24}$$

En el sistema de ecuaciones anterior, las EDF en $j = 1$ y 2 y en $j = J - 1$ y J se han combinado. Un método en el que cada EDF contiene más de una incógnita, de modo que se requieren soluciones de ecuaciones simultáneas, se dice que es implícito. Este método implícito en particular, con una diferenciación retrasada en el tiempo y precisión de primer grado, se conoce como el *esquema implícito de Euler.*

Un método generalizado. Si n' es un valor entre n y $n + 1$, entonces la ecuación 14.2.16 se puede escribir como

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \theta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1} + (1 - \theta)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n, \; 0 < \theta < 1 \tag{14.2.25}$$

donde las derivadas respecto al tiempo se igualan a las derivadas espaciales de acuerdo con la EDP que se resuelva (por ejemplo, $\partial u/\partial t = \nu \partial^2 u/\partial y^2$). Si elegimos el operador de diferencia central dado por la ecuación 14.2.11 para $(\partial^2 u/\partial y^2)$, entonces la ecuación previa se convierte en

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \theta\nu \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right) + (1 - \theta)\nu \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2}\right) \tag{14.2.26}$$

De inmediato puede verse que la ecuación anterior se reduce al esquema explícito dado por la ecuación 14.2.18 y al esquema implícito dado por la ecuación 14.2.22 cuando $\theta = 0$ y 1, respectivamente. Cuando $\theta = \frac{1}{2}$, la precisión de la ecuación anterior es de segundo grado en el espacio y el tiempo. La fórmula resultante de la diferenciación respecto al tiempo se conoce como método *trapezoidal* o de *Crank-Nicolson*.

14.2.3 Definición del algoritmo de solución

Con el dominio y las ecuaciones regentes discretizadas, el paso final es especificar el algoritmo de solución (es decir, el proceso paso a paso para obtener una solución). Como se han derivado tres conjuntos de ecuaciones de diferencia finita (EDF) para las ecuaciones 14.2.1 y 14.2.2 existen tres algoritmos de solución diferentes.

Para el método explícito dado por las ecuaciones 14.2.18 y 14.2.20, el algoritmo de solución es como sigue:

1. Especificar el problema ingresando valores para H, V_0 y ν.
2. Especificar el número de puntos de cuadrícula deseados al ingresar J. Como se indicó, cuanto mayor sea el número de puntos de cuadrícula, mayor será la precisión.
3. Especificar el incremento de tiempo Δt y la duración de interés T. Después, encontraremos que la especificación de Δt depende no sólo de la precisión temporal buscada sino también de Δy.
4. Calcular la separación de la cuadrícula con $\Delta y = H/(J - 1)$.
5. Calcular las constantes: $\beta = \nu\, \Delta t/\Delta y^2$ y $N = T/\Delta t$.
6. Ajustar a 0 el contador del nivel de tiempo n.
7. Especificar la solución en cada punto de la cuadrícula en el nivel de tiempo n usando la condición inicial dada por la ecuación 14.2.2 ($u_j^n = 0$ para todos los valores de j).
8. Calcular u_j^{n+1} en cada punto interior de la cuadrícula ($j = 2, 3, ..., J-1$) mediante el uso de la ecuación 14.2.18.
9. Calcular u_j^{n+1} en cada punto límite de la cuadrícula ($j = 1$ y J) mediante el uso de las ecuaciones 14.2.18 y 14.2.20.
10. Escribir la solución en el nivel de tiempo n en el disco para el análisis de los datos, si se desea.
11. Incrementar en 1 el contador de nivel de tiempo; es decir, igualar n a $n+1$.
12. Si $n < N$, repetir los pasos 7 a 12.

Para el método implícito dado por las ecuaciones 14.2.22, 14.2.19 y 14.2.20, el algoritmo de solución es idéntico al descrito antes para el método explícito, excepto que el paso 8 se sustituye por lo siguiente:

8. Calcular u_j^{n+1} en cada punto interior de la cuadrícula al resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por la ecuación 14.2.24.

Para las ecuaciones de diferencia finita (EDF) dadas por las ecuaciones 14.2.26, 14.2.19 y 14.2.20, el algoritmo de solución depende del valor de θ. Si $\theta = 0$ o 1, entonces los algoritmos de solución son idénticos a los que acabamos de resumir. Si θ es mayor que 0 pero menor que 1, entonces el algoritmo de solución es idéntico al dado para el método implícito, excepto que los elementos en la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ de la ecuación 14.2.24 deben ser sustituidos por los correspondientes a la ecuación 14.2.26 en lugar de los de la ecuación 14.2.22.

La solución exacta dada por la ecuación 14.2.3 se puede usar para evaluar la precisión de los métodos explícito de Euler, implícito de Euler y el de Crank-Nicolson, así como obtener directrices sobre la separación de la cuadrícula y del incremento del tiempo necesario para obtener soluciones con la precisión deseada.

Antes de concluir esta sección, presentamos el *algoritmo de Thomas*, que es un método altamente eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices de coeficientes que son tridiagonales como la ecuación 14.2.2.4. Estos sistemas de ecuaciones se encuentran con frecuencia en la dinámica de fluidos computacional (DFC). Para ilustrar el algoritmo de Thomas, considere el siguiente sistema de N ecuaciones lineales independientes:

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{14.2.27}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & & & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & & & & \\ & C_3 & A_3 & B_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & C_{N-1} & A_{N-1} & B_{N-1} \\ & & & & & C_N & A_N \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix} \tag{14.2.28}$$

Los elementos de $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ se conocen, y se buscan los elementos de $\boldsymbol{x}$. El primer paso en el algoritmo de Thomas es factorizar la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en dos matrices bidiagonales $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} L_1 & & & & & \\ P_2 & L_2 & & & & \\ & P_3 & L_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & P_{N-1} & L_{N-1} & \\ & & & & P_N & L_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Q_1 & & & & \\ & 1 & Q_2 & & & \\ & & 1 & Q_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & Q_{N-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{14.2.29}$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 & L_1Q_1 & & & & \\ P_2 & P_2Q_1 + L_2 & L_2Q_2 & & & \\ & P_3 & P_3Q_2 + L_3 & L_3Q_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & P_{N-1} & P_{N-1}Q_{N-2} + L_{N-1} & L_{N-1}Q_{N-1} \\ & & & & P_N & P_NQ_{N-1} + L_N \end{bmatrix} \tag{14.2.30}$$

De lo anterior, puede verse que el producto de las dos matrices bidiagonales es una matriz tridiagonal. El siguiente paso es determinar los elementos de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$. Esto puede lograrse igualando la ecuación 14.2.30 a $\mathbf{A}$ de la ecuación 14.2.28 y comparando término a término. Esto da la siguiente fórmula recursiva para calcular los elementos en $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$, siempre que $L_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} &P_i = C_i,\ i = 2, 3, \ldots, N;\ L_1 = A_1;\ Q_1 = B_1/L_1 \\ &L_i = A_i - P_i Q_{i-1} \text{ y } Q_i = B_i/L_i,\ i = 2, 3, \ldots, N \end{aligned} \tag{14.2.31}$$

El tercer paso es sustituir la factorización **LU** de **A** en la ecuación 14.2.27:

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{14.2.32}$$

y luego descomponerla como

$$\mathbf{L}\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \tag{14.2.33}$$

$$\mathbf{U}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \tag{14.2.34}$$

El cuarto paso y final es despejar z en la ecuación 14.2.33 por sustitución directa:

$$z_1 = b_1/L_1;\ z_i = (b_i - P_i z_{i-1})/L_i,\ i = 2, 3, \ldots, N \tag{14.2.35}$$

y despejar **x** en la ecuación 14.2.34 por sustitución inversa; es decir,

$$x_N = z_N;\ x_i = z_i - Q_i x_{i+1},\ i = N - 1, N - 2, \ldots, 1 \tag{14.2.36}$$

Esto completa el algoritmo de Thomas, que requiere sólo $(5N - 4)$ operaciones aritméticas para obtener una solución. Si **A** dada por la ecuación 14.2.28 es diagonalmente dominante (es decir, $|A_i| > |B_i| + |C_i|$ para $i = 1, 2, \ldots, N$), entonces puede demostrarse que los errores de redondeo no crecerán, lo cual implica que N puede ser muy grande (hasta 100 000 o mayor) y todavía generar soluciones muy precisas.

14.2.4 Comentarios sobre la elección de operadores de diferencia

De la sección 14.2.2, es claro que la ecuación de diferencia finita para una ecuación diferencial parcial no es única porque pueden usarse varios operadores de diferencia por cada derivada. Si la derivada respecto al tiempo de orden superior es uno (que es el caso para las ecuaciones de continuidad, de Navier-Stokes y de energía), entonces las derivadas espaciales de segundo orden representan la difusión, y las derivadas espaciales de primer orden representan la convección o advección (corriente horizontal). Como la difusión esparce una perturbación en todas direcciones, las derivadas espaciales de segundo orden son sustituidas por operadores de diferencia central. Como la convección es direccional, los operadores contra el viento y con desviación contra el viento son preferidos para las derivadas espaciales de primer orden. Los operadores contra el viento y con desviación contra el viento son operadores cuyas plantillas tienen más puntos de cuadrícula en un lado que en el otro. El lado con más puntos de cuadrícula es aquel desde donde proviene el flujo. Por ejemplo, si $u > 0$, entonces debe usarse un operador de diferencia retrasado o de desviación retrasada. Si $u < 0$, entonces debe usarse un operador de diferencia adelantado o de desviación adelantada. Para más detalles, vea la obra de Hirsch (1991) y Tannehill *et al.* (1997).

El operador de diferencia empleado para sustituir la derivada respecto al tiempo es muy importante, porque determina si las ecuaciones de diferencia finita para una ecuación diferencial parcial en diferentes puntos de la cuadrícula se acoplarán o no entre sí (es decir, implícita o explícita). En la sección 14.2.2, un operador de diferencia respecto al tiempo generalizado que comprende dos niveles de tiempo

está dado por la ecuación 14.2.25. Un operador de diferencia respecto al tiempo generalizado que comprende tres niveles de tiempo es como sigue (Beam & Warming, 1978):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\theta}{1+\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1} + \frac{(1-\theta)}{1+\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}\right) \tag{14.2.37}$$

donde θ y γ son constantes especificadas por el usuario. La fórmula anterior incluye la ecuación 14.2.25 como un caso especial ($\gamma = 0$). Similar a la ecuación 14.2.25, la ecuación 14.2.37 es explícita cuando θ es igual a 0 e implícita en caso contrario. Además, tiene una precisión de segundo grado cuando $\theta = \gamma + \frac{1}{2}$ y de primer grado en caso contrario. Algunos operadores de diferencia respecto al tiempo de uso común que pueden obtenerse de la ecuación 14.2.37 seleccionando valores apropiados de θ y γ son como sigue: el explícito de Euler ($\theta = \gamma = 0$), implícito de Euler ($\theta = 1$ y $\gamma = 0$), el de Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$ y $\gamma = 0$), y el de tres puntos retrasado ($\theta = 1$ y $\gamma = 1/2$).

Los operadores de diferencia respecto al tiempo en las ecuaciones 14.2.25 y 14.2.37 pertenecen a la clase de operadores de "una sola etapa" que se usan para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que son problemas de valor inicial (PVI). De hecho, cualquier método para integrar las EDO que son problemas de valor inicial (PVI), ya sea de una sola etapa o de etapas múltiples, puede usarse o generalizarse para utilizarse como operadores de diferencia para las derivadas respecto al tiempo en las ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Entonces, uno podría usar cualquiera de los operadores de integración las EDO de una sola etapa dados por las *fórmulas de Adams-Bashforth* o las *fórmulas de Adams-Moulton.* Las fórmulas de Adams-Bashforth son explícitas y pueden escribirse como

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{mk}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n-k} + \mathrm{O}(\Delta t^{m+1}) \tag{14.2.38}$$

Los coeficientes α_{mk} en la ecuación anterior para una precisión hasta de cuarto grado son como sigue: Para precisión de anterior grado, $m = 0$ y $\alpha_{00} = 1$, que da la fórmula explícita de Euler. Para precisión de segundo grado, $m = 1$, $\alpha_{10} = 3/2$ y $\alpha_{11} = -1/2$. Para precisión de tercer grado, $m = 2$, $\alpha_{20} = 23/12$, $\alpha_{21} = -16/12$ y $\alpha_{22} = 5/12$. Para precisión de cuarto grado, $m = 3$, $\alpha_{30} = 55/24$, $\alpha_{31} = -59/24$, $\alpha_{32} = 37/24$ y $\alpha_{33} = -9/24$.

Las fórmulas de Adams-Moulton son implícitas y pueden escribirse como

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sum_{k=0}^{m} \beta_{mk}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{(n+1)-k} + \mathrm{O}(\Delta t^{m+1}) \tag{14.2.39}$$

Los coeficientes β_{mk} de la ecuación anterior para una precisión hasta de cuarto grado son como sigue: Para precisión de primer grado, $m = 0$ y $\beta_{00} = 1$, que da la fórmula implícita de Euler. Para precisión de segundo grado, $m = 1$, $\beta_{10} = 1/2$ y $\beta_{11} = 1/2$, que es la *fórmula de Crank-Nicolson*. Para precisión de tercer grado, $m = 2$, $\beta_{20} = 5/12$, $\beta_{21} = 8/12$ y $\beta_{22} = -1/12$. Para precisión de cuarto grado, $m = 3$, $\beta_{30} = 9/24$, $\beta_{31} = 19/24$, $\beta_{32} = -5/24$ y $\beta_{33} = 1/24$.

Cuando se usen las fórmulas de Adams-Bashforth y Adams-Moulton, observe que las fórmulas de orden superior no son "de inicio automático", de modo que las fórmulas de orden inferior deben usarse para iniciar los cálculos. También, observe que cuanto más alto sea el grado de precisión, mayor será el número de niveles de tiempo involu-

crado, lo cual aumenta la cantidad de memoria de computadora necesaria puesto que las soluciones en cada uno de esos niveles de tiempo debe almacenarse. Comúnmente, deseamos guardar soluciones con no más de dos a tres niveles de tiempo.

Como alternativa para los operadores de una sola etapa, uno podría usar operadores de integración PVI, EDO "de etapas múltiples" como los de Runge-Kutta. Las *fórmulas de Runge-Kutta* se construyen interpolando y extrapolando derivadas previamente calculadas. Todos los métodos de Runge-Kutta son explícitos y de inicio automático, cualquiera que sea el grado de precisión. Un operador de segundo grado de Runge-Kutta es como sigue:

$$\frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{\Delta t/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \tag{14.2.40}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+12} \tag{14.2.41}$$

Observe que los términos $\partial u/\partial t$ en las ecuaciones 14.2.25 y 14.2.37 a 14.2.41 deben de ser sustituidos por derivadas espaciales de acuerdo con la ecuación diferencial parcial (EDP) como se ilustra en las ecuaciones 14.2.25 y 14.2.26.

En resumen, puede usarse una amplia variedad de operadores de una etapa o de etapas múltiples para aproximar las derivadas respecto al tiempo en las ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Cuál usar dependerá de si se buscan soluciones permanentes o no permanentes. Cuando son de interés únicamente las soluciones de estado permanente, la precisión temporal no tiene significado y el operador de diferencia en el tiempo se elige para acelerar la convergencia a estado permanente. Comúnmente, se usa el operador implícito en el tiempo con una precisión de grado más bajo, que es el operador implícito de Euler. Cuando son de interés soluciones no permanentes, podrían usarse operadores ya sean explícitos o implícitos. El grado de precisión en el tiempo es dos por lo general para operadores de diferencia de una sola etapa, para evitar problemas de inicio automático y necesidades de más memoria. Para operadores de etapas múltiples como los de Runge-Kutta, el grado de precisión puede ser más alto que dos sin aumentar la necesidad de memoria, aun cuando las necesidades de tiempo de la unidad central de procesamiento si se incrementan.

14.3 ESTABILIDAD, CONVERGENCIA Y ERROR

En la sección previa, se obtuvieron varias ecuaciones de diferencia finita (EDF) para la ecuación diferencial parcial (EDP) dada por la ecuación 14.2.1. La pregunta ahora es, ¿cómo podemos juzgar si una EDF es análoga algebraica de una EDP? También, ¿cómo podemos estar seguros de que los errores de redondeo no crecen cuando la solución avanza de un nivel de tiempo a otro? Por último, ¿cómo podemos evaluar los errores en las soluciones calculadas?

Las respuestas a estas preguntas pueden hallarse al examinar la consistencia, estabilidad numérica, convergencia y errores numéricos, que se explican en las siguientes subsecciones siguientes. Para facilitar la presentación de estos conceptos, definimos lo siguiente:

$u_j^n =$ solución exacta de una EDP en el punto de la cuadrícula y_j y nivel de tiempo t^n

$U_j^n =$ solución exacta de la EDF en el punto de la cuadrícula y_j y nivel de tiempo t^n (es decir, no existen errores de redondeo)

N_j^n = solución numérica de la EDF en el punto de la cuadrícula y_j y nivel de tiempo t^n (es decir, existen errores de redondeo)

Con base en las definiciones anteriores, el error total E_j^n de una solución en el punto de cuadrícula y_j y nivel de tiempo t^n está dado por

$$E_j^n = u_j^n - N_j^n = (u_j^n - U_j^n) + (U_j^n - N_j^n) \tag{14.3.1}$$

De la ecuación previa, puede verse que el error total consta de dos partes. La primera parte, $u_j^n - U_j^n$, es el error al discretizar el dominio y la EDP. Por tanto, se conoce como error de discretización:

$$u_j^n - U_j^n = \text{error de discretización} \tag{14.3.2}$$

La segunda parte, $u_j^n - U_j^n$ se refiere a la propagación de los errores de redondeo. Este error se conoce como error de estabilidad:

$$U_j^n - N_j^n = \text{error de estabilidad} \tag{14.3.3}$$

Observe que el error de estabilidad depende sólo de la EDF, y es independiente de la EDP que se supone representa.

El error de truncamiento, TE, de una EDF se define como

$$\text{TE} = \text{FDE} - \text{EDP} \tag{14.3.4}$$

14.3.1 Consistencia

Se dice que una EDF es consistente si para cada j y n, lo siguiente es verdadero:

$$\lim_{\Delta y, \Delta t \to 0} \text{TE}_j^n = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{\Delta y, \Delta t \to 0} \text{EDF}_j^n = \text{EDP}_j^n \tag{14.3.5}$$

Entonces, la consistencia mide qué tan bien una EDF aproxima una EDP en el límite de separación cero de la cuadrícula e incremento de tiempo.

Para ilustrar cómo se analiza la consistencia, considere la EDF dada por la ecuación 14.2.17 para la EDP dada por la ecuación 14.2.1. Por comodidad, esa EDP se repite:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{14.3.6}$$

Como la EDF dada antes es algebraica, es necesario convertirla en una EDP antes que pueda sustituirse en la ecuación 14.3.5. Esto puede hacerse al desarrollar todos los términos de la EDF respecto a un punto común en la cuadrícula y nivel de tiempo, usando para ello una serie de Taylor. Para la ecuación 14.3.6, elegimos desarrollar u_j^{n+1}, u_{j+1}^n y u_{j-1}^n respecto a u_j^n:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n \frac{\Delta t^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_j^n \frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots \tag{14.3.7}$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j^n \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^n \frac{\Delta y^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j^n \frac{\Delta y^3}{3!} + \cdots \tag{14.3.8}$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j^n \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^n \frac{\Delta y^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j^n \frac{\Delta y^3}{3!} + \cdots \tag{14.3.9}$$

Sustituyendo las tres ecuaciones anteriores en la ecuación 14.3.6 tendremos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n \frac{\Delta t}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_j^n \frac{\Delta t^2}{3!} + \cdots = \nu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^n + 2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_j^n \frac{\Delta y^2}{4!} + \cdots\right] \tag{14.3.10}$$

que se convierte en el límite cuando Δt y Δy tienden a cero

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^n \tag{14.3.11}$$

Como la ecuación anterior es idéntica a la EDP dada por la ecuación 14.3.1 en (y_j, t^n), se dice que la EDF dada por la ecuación 14.3.6 es consistente.

En lo que se refiere a la consistencia, es importante diferenciar entre consistencia incondicional y condicional. La consistencia incondicional implica que la EDF tiende a la EDP sin importar cómo Δt y Δy tiendan a cero, que es el caso para la ecuación 14.3.10. La consistencia condicional se refiere a las EDF que tienden a la EDP sólo si Δt y Δy tienden a cero en cierta forma prescrita (por ejemplo, Δt debe tender a cero primero, antes que Δy pueda tender a cero). Una EDF consistente condicionalmente puede tender a una EDP que sea fundamentalmente diferente de la EDP que tiene la intención de representarse cuando la separación de cuadrícula y el incremento de tiempo se reducen (vea un ejemplo en el problema 14.10). Entonces, para una EDF consistente condicionalmente, reducir la separación de cuadrícula o incremento de tiempo podría aumentar en lugar de reducir los errores porque la EDF tiende a una EDP diferente. También, observe que cualquier término multiplicado por Δx^p o Δt^p (por ejemplo, $\Delta y^4 u_i^n$, $\Delta t^2 u_i^n$) puede sumarse a cualquier EDF sin violar la consistencia. Por último, como Δy y Δt nunca son cero, una EDF consistente es muy diferente de la EDP original (compare las ecuaciones 14.3.10 y 14.3.11). Entonces, la consistencia, aun cuando es importante, es claramente inadecuada para asegurar la precisión.

14.3.2 Estabilidad numérica

Se dice que una EDF es estable si el error de estabilidad dado por la ecuación 14.3.3 tiende a cero o está limitado cuando n tiende al infinito. Esto es, el error de redondeo decae o no crece conforme la solución avanza de un nivel de tiempo a otro. Observe que esta definición es sólo válida para las EDP con una coordenada semejante al tiempo. También, advierta que la estabilidad depende sólo de la EDF y es independiente de la EDP que la EDF tiene intención de representar.

Resulta que la estabilidad de una EDF depende de si algún parámetro ϕ que relaciona la separación de cuadrícula y el incremento de tiempo se satisface o no:

$$\phi \leq \phi_{\text{cr}} \tag{14.3.12}$$

Como ejemplo, para el método explícito de Euler dado por la ecuación 14.2.18, la estabilidad se asegura si Δy y Δt satisfacen los siguientes criterios:

$$\frac{\nu \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \tag{14.3.13}$$

Entonces, $\phi = \nu\, \Delta t/\Delta y^2$ y $\phi_{\text{cr}} = \frac{1}{2}$. Para esta ecuación, si la separación de la cuadrícula es Δy_1, entonces el incremento de tiempo máximo permitido es $\Delta t_{\text{máx}} = (\Delta y_1)^2/2\nu$. Si la Δt usada es mayor que $\Delta t_{\text{máx}}$, entonces la solución oscilará sin control de un punto de cuadrícula a otro con la amplitud de las oscilaciones creciendo de un nivel de tiempo a otro, de modo que un "desborde" finalmente ocurrirá (los números se hacen tan grandes que la computadora ya no puede representarlos). Se dice que estas soluciones en las que los errores de redondeo siguen creciendo son inestables. Si la Δt usada es menor que o igual a $\Delta t_{\text{máx}}$, entonces la solución obtenida tendrá errores de redondeo que tienden a cero o permanecerá limitada. Se dice que estas soluciones son estables. Observe, no obstante, que aun cuando las soluciones estables están libres de errores de redondeo, todavía pueden ser imprecisas debido a errores de discretización (vea las ecuaciones 14.3.1 y 14.3.2), un tema que abordaremos en la sección 14.3.4.

Para el criterio de estabilidad dado por la ecuación 14.3.13, $\phi_{\text{cr}} = 1/2$, que es finita y mayor que cero. Las ecuaciones de diferencia finita (EDF), cuyos criterios de estabilidad tienen ϕ_{cr} finitas y diferentes de cero, se dice son condicionalmente estables. Las EDF de la mayoría de los métodos explícitos son condicionalmente estables. Si ϕ_{cr} es infinita, entonces se dice que la EDF es incondicionalmente estable. Para estas EDF no hay restricciones en el tamaño del incremento de tiempo en lo referente a estabilidad, pero, para la precisión, el tamaño del incremento de tiempo debe ser pequeño lo suficiente para resolver la física temporal. Las EDF de casi todos los métodos implícitos son incondicionalmente estables (esto sólo puede demostrarse si la ecuación diferencial parcial (EDP) es lineal. Si ϕ_{cr} es igual a cero, entonces se dice que la ecuación de diferencia finita (EDF) es incondicionalmente inestable puesto que, para una determinada separación de cuadrícula, no hay tamaño del incremento de tiempo, que no sea cero, que pueda usarse. Es claro que las EDF incondicionalmente inestables son inútiles. El problema 14.14 muestra un método que parece razonable pero que es incondicionalmente inestable.

Existen muchas formas de analizar la estabilidad numérica de las EDF. Un método popular y versátil es el *método de Fourier*, que analiza la estabilidad numérica por medio de los tres pasos siguientes. Primero, introduce una perturbación arbitraria en cada punto de la cuadrícula en algún nivel arbitrario de tiempo t^n. Esta perturbación representa un error de redondeo aleatorio. A continuación, desarrolla esa perturbación en una serie de Fourier. Por último, sigue por separado la evolución de cada componente de Fourier. Si alguna componente de Fourier crece, entonces se dice que la EDF es inestable. Si ninguna crece, entonces se dice que la EDF es estable.

Para ilustrar el método de Fourier para analizar la estabilidad, considere la EDF dada por la ecuación 14.2.17, que se repite para comodidad:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu\, \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{14.3.14}$$

Como ya se mencionó, el primer paso es introducir una perturbación arbitraria en la solución en cada punto de la cuadrícula en t^n. Hacer esto produce

$$\frac{(u+\varepsilon)_j^{n+1} - (u+\varepsilon)_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{(u+\varepsilon)_{j+1}^n - 2(u+\varepsilon)_j^n + (u+\varepsilon)_{j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{14.3.15}$$

Restar la ecuación 14.3.14 a la ecuación 14.3.15 da una ecuación de evolución para la perturbación, ε:

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{14.3.16}$$

El siguiente paso es representar la perturbación en una serie de Fourier. Como el dominio tiene un número finito de puntos de cuadrícula igualmente distribuidos (vea la figura 14.2), la serie de Fourier más general es finita y está dada por

$$\varepsilon_j^n = \sum_{m=-M}^{M} A_m^n \exp\left(Ik_m x_j\right) \tag{14.3.17}$$

donde $I = \sqrt{-1}$ es el número imaginario; $M = (IL - 1)/2$ es el número máximo de componentes de Fourier que puede ser resuelto en una cuadrícula con IL puntos de cuadrícula igualmente espaciados; y $k_m = \pi m/(M\,\Delta y)$ es el número de onda, que está relacionado con la longitud de onda por $\lambda_m = 2\pi/k_m$. Sustituyendo la ecuación 14.3.17 en la ecuación 14.3.16 y observando que $y_{j\pm1/2} = y_j \pm \Delta y$ y $\exp(y_{j\pm1/2}) = \exp(y_j)\exp(\pm\,\Delta y)$, obtenemos

$$\sum_{m=-M}^{M} \left[\frac{(A_m^{n+1} - A_m^n)e^{Ik_m y_j}}{\Delta t} - \nu \frac{(A_m^n e^{Ik_m \Delta y} - 2A_m^n + A_m^n e^{-Ik_m \Delta y})e^{Ik_m y_j}}{\Delta y^2} \right] = 0 \tag{14.3.18}$$

Como no hay interacciones entre las componentes de Fourier (es decir, no hay multiplicación de dos componentes de Fourier diferentes), la ecuación 14.3.18 requiere que cada componente de Fourier sea cero. Esto, acoplado con $\exp(\pm I\phi) = \cos\phi \pm I\,\text{sen}\,\phi$ da

$$\begin{aligned} A_m^{n+1} &= A_m^n + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} A_m^n \left(e^{Ik_m\Delta y} - 2 + e^{-Ik_m\Delta y}\right) \\ &= A_m^n \left[1 - 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}(1 - \cos(k_m\Delta y))\right] \\ &= A_m^n \left[1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta y}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{14.3.19}$$

Ahora, defina el factor de amplificación como

$$G_m = A_m^{n+1}/A_m^n \tag{14.3.20}$$

El paso tercero y final es seguir la evolución del factor de amplificación cuando n tiende al infinito. Para estabilidad numérica, es claro que la siguiente condición debe satisfacerse para toda componente de Fourier:

$$|G_m| \leq 1 \tag{14.3.21}$$

De las ecuaciones 14.3.19 y 14.3.20, la ecuación anterior implica lo siguiente para cada m:

$$-1 \leq 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta y}{2}\right) \leq 1 \tag{14.3.22}$$

Esta desigualdad se hace crítica cuando $\text{sen}^2\,(k_m\Delta y/2)$ llega a un máximo de la unidad. En este punto crítico, obtenemos el criterio correcto de estabilidad, que es (vea la ecuación 14.3.13)

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \tag{14.3.23}$$

Del ejemplo anterior, hacemos varias observaciones. Primero, la componente de Fourier más inestable es $m = M$, que corresponde al número de onda más grande pero a la longitud de onda más corta. Esto resulta generalmente verdadero para la mayoría de las EDF. En segundo término, este análisis supone condiciones límite periódicas por el uso de la serie de Fourier. Entonces, no puede considerar las EDF en los límites. Si las EDF en puntos de cuadrícula límites pueden imponer un criterio de estabilidad más estricto, entonces puede usarse el método de estabilidad de matriz. En tercer lugar, este análisis puede aplicarse únicamente a las EDF lineales dado que sólo entonces cada componente de Fourier puede ser analizada por separado. Las EDF no lineales deben ser linealizadas antes que puedan analizarse. Por último, A_m^n en el desarrollo de la serie de Fourier de ε_m^n de la ecuación 14.3.17 puede ser sustituida por $(G_m)^{(n)}A_m^0$ porque $A_m^{n+1} = G_mA_m^n = G_mG_mA_m^{n-1} = \cdots = (G_m)^{(n+1)}A_m^0$, donde (n) y $(n+1)$ denotan la potencia (vea la ecuación 14.3.20). Para métodos que comprenden más de dos niveles de tiempo, esto será más conveniente. Para las EDF que comprenden dos dimensiones, sustituya la ecuación 14.3.17 por

$$\varepsilon_{ij}^n = \sum_{m_x=-M_x}^{M_x}\sum_{m_y=-M_y}^{M_y} A_{m_xm_y}^n \exp\left[I(k_{m_x}x_i + k_{m_y}y_j)\right] \tag{14.3.24}$$

La forma tridimensional de la ecuación previa es una extensión directa.

14.3.3 Convergencia

Se dice que una EDF es convergente si sus soluciones se aproximan la solución exacta de la ecuación diferencial parcial (EDP) en el límite infinitesimal de Δy y Δt:

$$\lim_{\Delta y,\Delta t\to 0} N_j^n = u_j^n \tag{14.3.25}$$

La ecuación 14.3.25 indica que, para una EDF convergente, uno puede obtener una solución numérica con cualquier precisión deseada simplemente al reducir la separación de la cuadrícula y el incremento de tiempo. Para las EDF de las EDP lineales, la convergencia siempre puede ser analizada analíticamente aun cuando el proceso pueda ser tedioso. Por suerte, existe una teoría general conocida como *teorema de equivalencia de Lax*, que expresa que *una EDF de una EDP lineal bien planteada es convergente si esa EDF es consistente y estable.* Con este teorema, se garantiza que una EDF de una EDP lineal bien planteada es convergente si podemos demostrar que es consistente y estable, como se explica en las secciones 14.3.1 y 14.3.2. Como la consistencia y la estabilidad son mucho más fáciles de analizar que la convergencia, el teorema de equivalencia de Lax es muy útil.

Para las EDF de las EDP que no son lineales (por ejemplo, las EDP casi lineales o no lineales), no sabemos cómo comprobar la convergencia. Pero, esta incapacidad para comprobar la convergencia no implica que estas EDF no sean convergentes. Para estas EDF, el teorema de equivalencia de Lax todavía es útil, excepto que se hace una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia. Para estas EDF, puede ser necesaria una comparación entre soluciones numéricas y valores experimentales medidos.

14.3.4 Errores numéricos

De las explicaciones sobre consistencia, estabilidad numérica y convergencia dadas en las tres subsecciones anteriores, observamos lo siguiente. Primero, si es estable, entonces el error total dado por la ecuación 14.3.1 se reduce a

$$E_j^n = u_j^n - N_j^n = (u_j^n - U_j^n) + (U_j^n - N_j^n) \approx u_j^n - U_j^n \qquad (14.3.26)$$

Esto es, el error de discretización domina siendo insignificante el error de estabilidad. En segundo término, cuando la separación de la cuadrícula y el incremento de tiempo son finitos, que siempre es el caso, entonces los análisis de consistencia muestran que las EDF difieren considerablemente de las EDP originales que se supone representan (compare las ecuaciones 14.3.10 y 14.3.11). Resulta que las EDF son, en general, mucho más complejas. Contienen modos espurios (soluciones no contenidas en las EDP originales). Entonces, incluso si una EDF es convergente, todavía necesitamos hacer las siguientes preguntas para asegurar que se obtengan soluciones físicamente significativas:

- ¿Cuáles son algunas de las propiedades más importantes que una EDF debe poseer cuando la separación de la cuadrícula y los incrementos de tiempo son finitos?
- ¿Cómo se elige la separación de la cuadrícula y el incremento de tiempo para asegurar soluciones precisas?

Las respuestas a algunas de estas preguntas se describen brevemente a continuación.

Propiedad de conservación. Una de las propiedades más importantes de las EDP que rigen los problemas de flujo de fluido es el principio de conservación. Por ejemplo, la masa no puede ser creada ni destruida; la cantidad de movimiento debe estar equilibrada; y la energía total se conserva. Entonces, es importante que las EDF representen este principio correctamente lo que por suerte es fácil de hacer. Simplemente asegúrese que en toda cara común entre dos celdas adyacentes, lo que sale de una celda debe entrar en la otra. Pero, para hacer esto se requiere que la EDP sea escrita en lo que se conoce como la forma conservadora. Una EDP se escribe en forma conservadora si son constantes todos los coeficientes que estén fuera de todas

las derivadas más externas. Si algún coeficiente es una variable, entonces esa EDP se escribe en forma no conservadora. Así, por ejemplo, $\partial u/\partial t + \frac{1}{2}\partial u^2/\partial x = 0$ se escribe en forma conservadora, no así $\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = 0$. Los problemas 14.16 y 14.17 ilustran las dificultades asociadas al usar las EDF hechas en forma no conservadora.

Propiedad de transporte. Para un fluido, una perturbación en cualquier lugar en el campo de flujo puede difundirse a otros lugares por convección debido al movimiento del fluido, por difusión debido al movimiento molecular aleatorio, y por ondas de presión. La convección puede transportar una perturbación sólo en la dirección de la velocidad del fluido. La difusión y las ondas de presión pueden difundir una perturbación en todas direcciones. Las EDF deben poseer las mismas propiedades de transporte que las EDP a las que intentan representar. De lo contrario, existe un error de transporte. Resulta que esto no es fácil de hacer correctamente. Como se hizo notar en la sección 14.2.4, las derivadas que representan convección se diferencian contra el viento o con desviación contra el viento, y las derivadas que representan difusión y presión se diferencian centralmente. Para flujos compresibles, los términos convectivos y de presión deben tratarse colectivamente, y la diferenciación está basada en la teoría característica (vea Hirsh, 1991). Desafortunadamente, la teoría de diferenciación contra el viento es rigurosa sólo para flujos unidimensionales.

Propiedad de disipación. Un error importante en muchas EDF es la excesiva difusión artificial o numérica (es decir, los coeficientes de difusión "efectivos" tales como viscosidad o conductividad en las EDF son mucho más altos que los de las EDP). Esto puede hacer que las capas de cortante, las fuerzas viscosas, la transferencia térmica superficial y la conversión de energía mecánica a térmica se calculen incorrectamente. Existen dos culpables principales de una alta difusión numérica. El primero es la forma en que se diferencian los términos de convección. Si se usa diferenciación contra el viento, entonces las fórmulas de primer orden pueden producir una excesiva difusión numérica. Si se usan fórmulas de diferenciación contra el viento de segundo orden, entonces pueden obtenerse resultados razonables. Los esquemas de diferenciación de alta resolución, tales como la división de la diferencia de flujo con limitadores, están enfocados a obtener las propiedades correctas de transporte con una mínima difusión artificial (vea Hirsch, 1991). El segundo culpable es tener celdas con altas proporciones dimensionales y no alinear las líneas de la cuadrícula con las direcciones del flujo.

Solución independiente de la cuadrícula. Incluso para un conjunto de EDF convergente, pueden obtenerse muchas soluciones diferentes, algunas totalmente incorrectas, algunas cualitativamente correctas pero cuantitativamente incorrectas, y algunas con precisión suficiente. La solución que se obtenga depende de la separación de la cuadrícula y del incremento de tiempo que se use. Entonces, una vez que se genere una solución en una cuadrícula, es importante generar otra solución en una cuadrícula más fina y con un incremento de tiempo correspondientemente más pequeño. En una situación ideal, este proceso debe repetirse hasta que la diferencia relativa entre soluciones sucesivas obtenidas en cuadrículas cada vez más finas se aproxime al nivel de los errores de redondeo (o de truncamiento). Por desgracia, para complicados problemas de ingeniería, con frecuencia no es factible obtener soluciones independientes de la cuadrícula debido a restricciones de recursos. Si la solución generada no es independiente de la cuadrícula, entonces su interpretación debe ser manejada con extremo cuidado.

14.4 SOLUCIÓN DEL FLUJO DE COUETTE

Consideremos el problema del flujo de Couette de la sección 14.2. La ecuación diferencial regente es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14.4.1}$$

con condiciones límite

$$u = V_0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{14.4.2}$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = H \tag{14.4.3}$$

y condición inicial

$$u = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{14.4.4}$$

Primero, no dimensionalice el problema al definir las siguientes variables adimensionales:

$$Y = \frac{y}{H} \quad \theta = v\frac{t}{H^2} \quad U = \frac{u}{V_0} \tag{14.4.5}$$

La ecuación diferencial se escribe entonces como

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \tag{14.4.6}$$

Del mismo modo, las condiciones de frontera e inicial se convierten en

$$U = 1 \quad \text{en} \quad Y = 0 \tag{14.4.7}$$

$$U = 0 \quad \text{en} \quad Y = 1 \tag{14.4.8}$$

$$U = 0 \quad \text{en} \quad \theta = 0 \tag{14.4.9}$$

Usando diferencias finitas (vea la tabla 14.1) y el método explícito descrito en la sección 14.2, la ecuación 14.4.6 se convierte en (vea la ecuación 14.2.17)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta\theta} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta Y^2} \tag{14.4.10}$$

Reacomodando la ecuación anterior para U_j^{n+1}, la EDP (ecuación 14.4.1) toma la forma de diferencia finita

$$U_j^{n+1} = RU_{j+1}^n + (1 - 2R)U_j^n + RU_{j-1}^n \tag{14.4.11}$$

donde $R = \Delta\theta/\Delta Y^2$. La única incógnita en la ecuación anterior es U_j^{n+1}, puesto que los términos del lado derecho de la ecuación se conocen del incremento de tiempo previo, donde los valores iniciales de U^n (para $n = 0$) se conocen de la condición inicial. Por tanto, la solución se obtiene resolviendo la ecuación 14.4.11 en cada nodo interior en cada incremento de tiempo. El siguiente ejemplo demuestra el uso de diferencias finitas para obtener la solución de un flujo de Couette.

Ejemplo 14.1

Agua estancada a 20 ºC está contenida entre dos placas paralelas que están a 2 cm una de otra. La placa inferior se mueve de pronto con una velocidad constante de 0.5 m/s. Resuelva este problema de flujo de Couette usando diferencias finitas y el método explícito. Use incrementos de espacios de 10 y un intervalo de tiempo de 1.6 s. Grafique el perfil de la velocidad a diversos valores de tiempo y compare con la solución exacta dada en la ecuación 14.2.3.

Solución
Primero, calcule ΔY y $\Delta\theta$. Son

$$\Delta Y = \frac{\Delta y}{H} = \frac{0.002}{0.02} = 0.1 \quad \Delta\theta = \frac{\nu \Delta t}{H^2} = \frac{10^{-6} \times 1.6}{0.02^2} = 0.004$$

Entonces $R = 0.004 / 0.01^2 = 0.4$. Observe que R debe ser menor que 0.5 (vea la ecuación 14.3.23) para que el método sea estable. Como $\Delta Y = 0.1$, como se muestra en la figura E14.1, y la longitud del dominio (separación entre las placas) es 1, usando cantidades adimensionales, el número de puntos de la cuadrícula es $J = 1 + 1/0.1 = 11$. No obstante, como la velocidad está especificada en los límites, entonces $U_1 = 1$ y $U_{11} = 0$. Por tanto, sólo necesitamos despejar la velocidad en los puntos interiores ($j = 2, 3,..., 10$). Esto se hace despejando $j = 2, 3,..., 10$ de la ecuación 14.4.11.

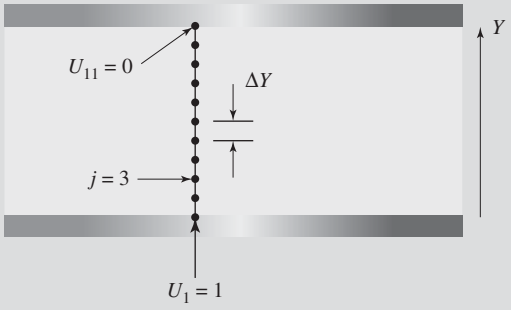


Fig. E14.1

La solución se inicia usando la condición inicial $U_j^0 = 0$ en los puntos de la cuadrícula. Por ejemplo, para el punto de la cuadrícula 2, la ecuación 14.4.11 da

$$U_2^{n+1} = 0.4U_3^n + (1 - 0.8)U_2^n + 0.4U_1^n$$

Empezando con $n = 0$ ($\theta = 0$), la ecuación anterior da

$$U_2^1 = 0.4U_3^0 + 0.2U_2^0 + 0.4U_1^0 = 0.4U_1^0 = 0.4$$

El procedimiento se repite para los otros puntos de la cuadrícula. Después de que la velocidad se haya calculado en todos los puntos de la cuadrícula, el procedimiento se repite para $n = 1$ ($\theta = 0.004$) y luego para $n = 2$ y así sucesivamente hasta que, por ejemplo, se logre el estado permanente. Para este ejemplo el estado permanente se alcanza en $n = 180$. Observe que esta solución es consistente con la solución analítica de estado permanente dada por $U = Y$ o $u(y) = V_0 (1 - y/H)$. La tabla que sigue es una lista de la solución en los puntos de la cuadrícula para varios valores de θ.

θ	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
	$Y = 0$	$Y = 0.1$	$Y = 0.2$	$Y = 0.3$	$Y = 0.4$	$Y = 0.5$
0.000 ($n = 0$)	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.064 ($n = 16$)	1.000	0.784	0.583	0.410	0.271	0.167
0.140 ($n = 35$)	1.000	0.851	0.707	0.573	0.451	0.344
0.280 ($n = 70$)	1.000	0.888	0.777	0.669	0.563	0.461
0.716 ($n = 180$)	1.000	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500

θ	$j = 7$	$j = 8$	$j = 9$	$j = 10$	$j = 11$
	$Y = 0.6$	$Y = 0.7$	$Y = 0.8$	$Y = 0.9$	$Y = 1.00$
0.000 ($n = 0$)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.064 ($n = 16$)	0.096	0.051	0.024	0.010	0.000
0.140 ($n = 35$)	0.252	0.175	0.109	0.052	0.000
0.280 ($n = 70$)	0.363	0.269	0.109	0.088	0.000
0.716 ($n = 180$)	0.400	0.300	0.200	0.100	0.000

La solución analítica dada en la ecuación 14.2.3 se escribe en forma adimensional como

$$U = 1 - Y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi Y) \exp(-n^2\pi^2\theta)$$

La tabla muestra una comparación entre valores de la velocidad en $Y = 0.3$ obtenidos de la solución exacta y la solución de diferencia finita para valores diferentes de θ. Los números muestran que la solución de diferencia finita es razonablemente precisa. El porcentaje de error es la diferencia entre las dos soluciones expresado como un porcentaje de la solución exacta.

θ	*Y = 0.3 Diferencia finita*	*Y = 0.3 Solución exacta*	*Diferencia*	*Porcentaje de error*
0.064	0.410	0.402	0.008	1.99
0.140	0.573	0.569	0.004	0.70
0.280	0.669	0.668	0.001	0.15
0.716	0.700	0.700	0.000	0.00

La figura E14.2 muestra comparaciones adicionales entre las soluciones exacta y de diferencia finita para todo el dominio y el mismo número de incrementos de tiempo. Las líneas continuas son para la solución exacta, y los puntos son para la solución de diferencia finita.

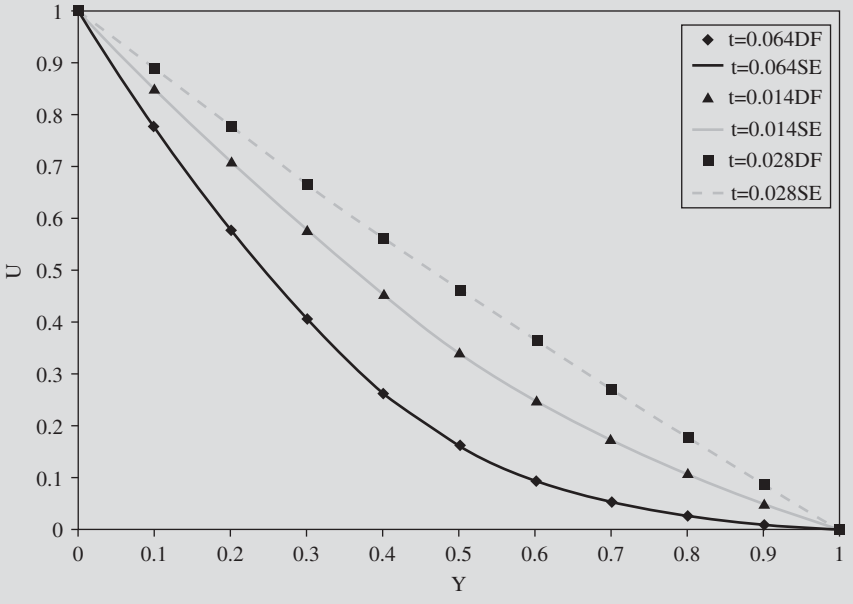


Fig. E14.2

14.5 SOLUCIÓN DE FLUJO POTENCIAL DE ESTADO PERMANENTE BIDIMENSIONAL

El flujo permanente bidimensional de un fluido incompresible no viscoso satisface la ecuación de Laplace; usando la función de corriente ψ (vea la ecuación 8.5.10), es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{14.5.1}$$

Usando la notación $\psi_{i,j} = \psi(x_i, y_j)$ y la diferenciación central (consulte la tabla 14.1) para la segunda derivada, la ecuación 14.5.1 se representa en forma discretizada por

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \tag{14.5.2}$$

Reacomodando la ecuación anterior tendremos

$$2\psi_{i,j}\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) = \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{14.5.3}$$

La ecuación 14.5.3 muestra que el valor de $\psi_{i,\,j}$ está relacionado con los valores de la función de corriente en los puntos circundantes, como se muestra en la figura 14.3.

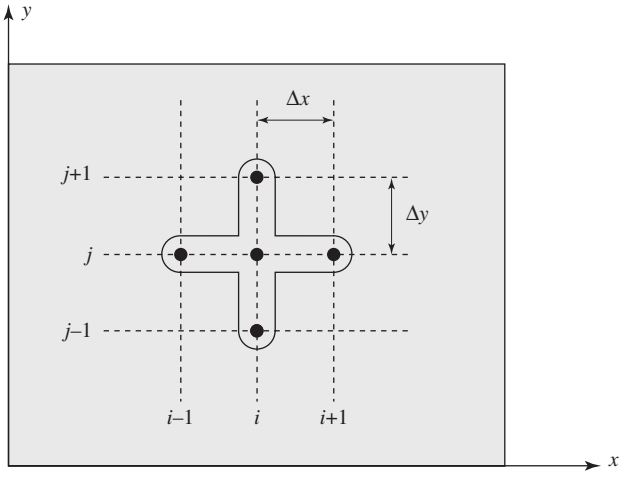


Fig. 14.3 Cuadrícula rectangular uniforme.

La ecuación (14.5.3) está escrita para cada uno de los N puntos de cuadrícula seleccionados. Esto resulta en un sistema de N ecuaciones algebraicas lineales que pueden representarse en forma de matriz como

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{b} \tag{14.5.4}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Observe que, en general, cada fila tendrá cuando mucho cinco elementos diferentes de cero. Por tanto, la matriz **A** será una matriz escasa con muchos elementos cero. El sistema puede resolverse usando ya sea métodos directos o iterativos. Un ejemplo de un método directo es la inversión de la matriz, donde el vector solución se expresa como

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{14.5.5}$$

No obstante, este método es apropiado para sistemas con un número pequeño de ecuaciones y es ineficiente desde el punto de vista computacional para números grandes de ecuaciones porque requiere excesivos recursos de computadora. Para sistemas grandes, los métodos iterativos son más apropiados para usar puesto que son más eficientes desde el punto de vista computacional que los métodos directos.

Considere el *método iterativo de Gauss-Seidel*. Es uno de los métodos más eficientes para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que resulten de la aproximación de diferencia finita de una ecuación diferencial parcial elíptica. La rapidez de convergencia del método se maximiza cuando la matriz de coeficientes **A** es diagonalmente dominante; esto es, si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} |a_{ij}| \quad \text{para todas las } i, \text{ y si} \quad |a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} |a_{ij}| \quad \text{para al menos una } i$$

Esto significa que una condición suficiente para la convergencia es requerir para cada ecuación que el coeficiente de la diagonal sea mayor que o igual a la suma de los otros coeficientes en la ecuación. La condición de "mayor que" debe cumplirse al menos para una ecuación (punto nodal cerca de un límite).

El método puede todavía convergir incluso si el sistema no es diagonalmente dominante, pero la rapidez de convergencia será más lenta. Por fortuna, la diferenciación de la ecuación 14.5.1 produce una matriz de coeficientes diagonalmente dominante, tal que en la ecuación 14.5.3 el coeficiente de $\psi_{i,j}$ es siempre mayor que los coeficientes de las otras incógnitas de la ecuación.

Para demostrar el procedimiento iterativo, la ecuación 14.5.3 se reescribe como

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{\psi_{i+1,j}^{k} + \psi_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2(\psi_{i,j+1}^{k} + \psi_{i,j-1}^{k+1})}{2(1 + \beta^2)} \tag{14.5.6}$$

donde $\beta = \Delta x/\Delta y$ y el superíndice k representa el nivel de iteración. El procedimiento para resolver el sistema consiste en los siguientes pasos:

1. Se hace una suposición inicial para todos los valores desconocidos de $\psi_{i,j}^{k}$ en todos los puntos de la cuadrícula. Esto corresponde al nivel de iteración $k = 0$.

2. Usando la ecuación 14.5.6, calcule nuevos valores de $\psi_{i,j}^{k}$ con base en la suposición inicial ($k=0$) y en los valores más recientemente calculados ($k+1=1$).
3. Repita el paso 2 hasta alcanzar la convergencia; esto es, los valores recientemente calculados no son muy diferentes de los valores de la iteración previa. Este criterio de convergencia puede expresarse como

$$\left| \frac{\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^{k}}{\psi_{i,j}^{k}} \right| \leq \varepsilon \tag{14.5.7}$$

donde ε es un número muy pequeño, por lo general menor que 10^{-3}.

En resumen, es frecuente que el procedimiento de Gauss-Seidel se escriba como

$$\psi_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \psi_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} \psi_j^{k} \right) \tag{14.5.8}$$

donde $i = 1, 2, ..., N$ es el número de nodo. La ecuación 14.5.8 muestra que los nuevos valores de ψ_i^{k+1} se calculan a partir de los valores de ψ_i^{k+1} de la iteración actual para $1 \leq j \leq i-1$, y valores de ψ_j^{k} a partir de la iteración previa para $i+1 \leq j \leq N$.

Ejemplo 14.2

Considere un flujo potencial permanente de aire sobre un bloque cuadrado, como se muestra en la figura E14.2a. Estime el patrón de las líneas de corriente y el campo de velocidad alrededor del bloque.

Solución

La función de corriente está descrita por la ecuación 14.5.1. Como el flujo es simétrico consideraremos sólo un cuarto del dominio, como se muestra en la figura E14.2b. Este dominio se extiende, a una gran distancia corriente arriba del bloque donde el flujo es uniforme y la velocidad de corriente libre $U_\infty = 10$ m/s, y a una gran distancia arriba del bloque donde se espera que el flujo también sea uniforme. Las distancias exactas donde es necesario ubicar los límites izquierdo y superior dependen de las dimensiones del bloque y de la velocidad del fluido. Para fines de demostración del método de usar diferencias finitas para resolver flujos potenciales permanentes bidimensionales, seleccionaremos un dominio con un número razonable de puntos de cuadrícula con $\Delta x = \Delta y$, como se muestra en la figura E14.2c. Para este dominio, especificaremos $\psi = 0$ en el límite inferior; $\psi = U_\infty H$ en el límite superior; $\psi = U_\infty\, y$ en el límite izquierdo, puesto que se supone que el flujo es uniforme; y $\partial\psi/\partial x = 0$, debido a la simetría, en el límite derecho. El problema no se dimensionaliza al definir las siguientes variables adimensionales:

$$Y = \frac{y}{H}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad \Psi = \frac{\psi}{U_\infty H}$$

La forma adimensional de la ecuación 14.5.1 es

$$\partial^2\Psi / \partial X^2 + \partial^2\Psi / \partial Y^2 = 0$$

con las condiciones límite mostradas en la figura E14.2.c. Del mismo modo, la ecuación 14.5.3 se reescribe, con $\Delta x = \Delta y$, usando la función de corriente adimensional Ψ como

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4} \left[\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j+1} \right]$$

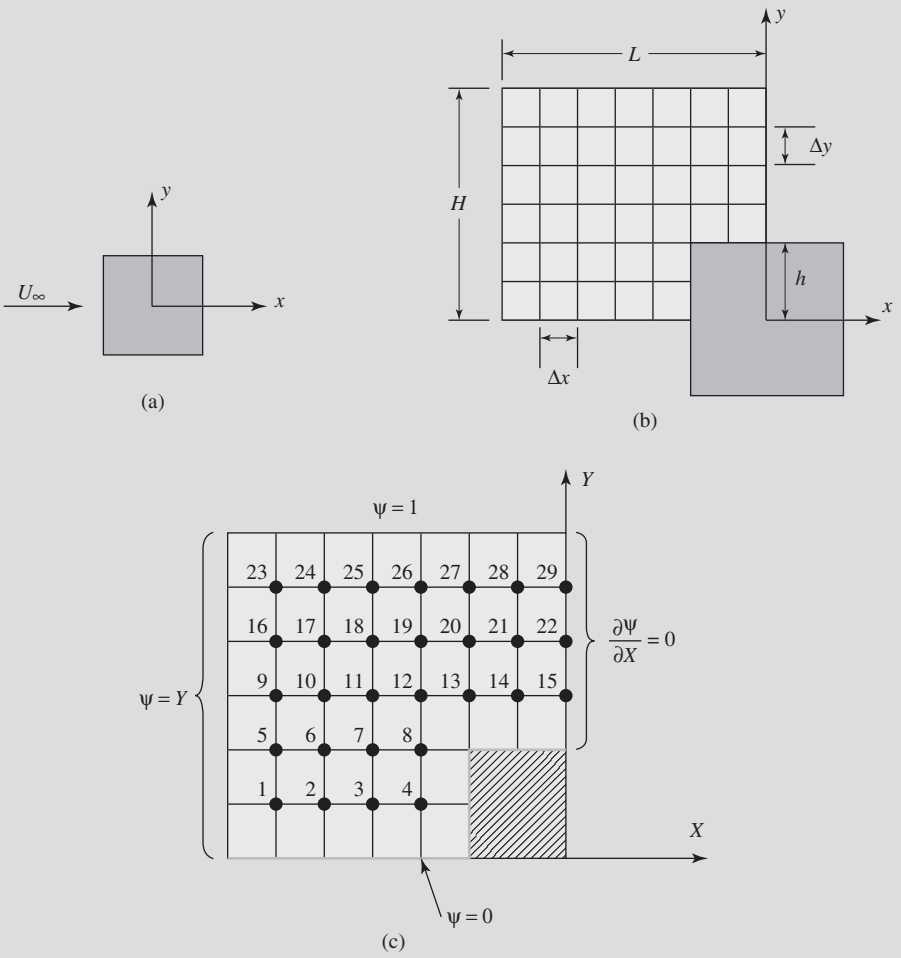


Fig. E14.2

La cuadrícula mostrada en la figura E14.2c tiene 29 puntos de cuadrícula. Para demostrar el método, la ecuación de diferencia se escribirá sólo para los nodos 1, 9, 11 y 22. Del mismo modo, las ecuaciones de diferencia pueden escribirse para los otros puntos de la cuadrícula. Por tanto,

$$\text{Nodo 1: } \Psi_2 + \Psi_5 + \Delta Y - 4\Psi_1 = 0$$

$$\text{Nodo 9: } \Psi_5 + \Psi_{10} + \Psi_{16} + 3\Delta Y - 4\Psi_9 = 0$$

$$\text{Nodo 11: } \Psi_7 + \Psi_{10} + \Psi_{12} + \Psi_{18} - 4\Psi_{11} = 0$$

$$\text{Nodo 22: } \Psi_{15} + 2\Psi_{21} + \Psi_{29} - 4\Psi_{22} = 0$$

donde hemos usado diferencias centrales para representar la condición límite derecha como

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial X} = \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_{i-1}}{2\Delta X} = 0 \qquad \therefore\ \Psi_{i+1} = \Psi_{i-1}$$

Después de escribir las ecuaciones de diferencia para todos los 29 puntos de la cuadrícula, resulta un sistema de 29 ecuaciones algebraicas lineales. El sistema se puede representar en forma de matriz como

$$\mathbf{A}\Psi = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & a_{N4} & a_{N5} & a_{N6} & a_{N7} & \dots & -4 \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo dado, los valores de b_i · s son como sigue:

$$b_1 = -\Delta Y, b_5 = -2\Delta Y, b_9 = -3\Delta Y, b_{16} = -4\Delta Y, b_{23} = -5\Delta Y - 1, b_{24} \dots b_{29} = -1$$
$$b_2 = b_3 = b_4 = b_6 = b_7 = b_8 = b_{10} \dots b_{15} = b_{17} \dots b_{22} = 0$$

Empezando con una suposición inicial de $\Psi_i = 0$ en todos los puntos de la cuadrícula y usando el método iterativo de Gauss-Seidel, resulta la siguiente solución. Los números de los puntos de la cuadrícula aparecen en las columnas sombreadas, y los valores de Ψ en los puntos de la cuadrícula correspondientes aparecen en las columnas adyacentes.

23	0.825	**24**	0.815	**25**	0.803	**26**	0.788	**27**	0.774	**28**	0.765	**29**	0.762
16	0.651	**17**	0.632	**18**	0.607	**19**	0.576	**20**	0.542	**21**	0.524	**22**	0.519
9	0.480	**10**	0.455	**11**	0.419	**12**	0.365	**13**	0.295	**14**	0.271	**15**	0.265
5	0.315	**6**	0.290	**7**	0.249	**8**	0.171						
1	0.155	**2**	0.140	**3**	0.115	**4**	0.072						

La solución también se muestra en la figura E14.2-1 como una gráfica de los contornos Ψ en el dominio seleccionado. La gráfica muestra la variación en los valores de Ψ como una función de X y Y.

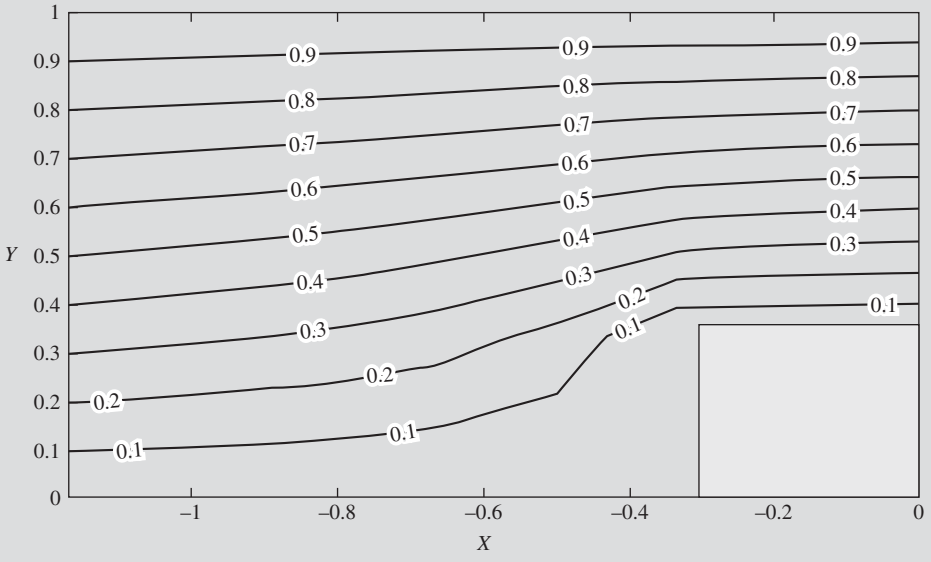


Fig. E14.2-1. Gráfica de contornos de Ψ en el dominio de solución. Los números de contorno son los valores de Ψ.

La velocidad presentada puede obtenerse al calcular las componentes de la velocidad u y v usando la función de corriente y la ecuación 8.5.11 como sigue:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En términos de cantidades adimensionales, las componentes de la velocidad pueden calcularse como

$$u = U_\infty \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \qquad \text{y} \qquad v = -U_\infty \frac{\partial \Psi}{\partial X}$$

Usando diferencias finitas, las derivadas se aproximan como

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta Y} \qquad \text{y} \qquad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta X}$$

Por ejemplo, para determinar la velocidad en el punto de cuadrícula 11 escribimos:

$$u_{11} = U_\infty \left(\frac{\Psi_{18} - \Psi_{11}}{\Delta Y} \right) = 10 \left(\frac{0.607 - 0.419}{1/6} \right) = 11.28 \text{ m/s}$$

$$v_{11} = -U_\infty \left(\frac{\Psi_{12} - \Psi_{11}}{\Delta X} \right) = -10 \left(\frac{0.365 - 0.419}{1/6} \right) = 3.24 \text{ m/s}$$

Del mismo modo, podríamos haber usado diferencias centrales para calcular las componentes de la velocidad en el punto 11 de cuadrícula como sigue:

$$u_{11} = U_\infty \left(\frac{\Psi_{18} - \Psi_{7}}{2\Delta Y} \right) = 10 \left(\frac{0.607 - 0.249}{2/6} \right) = 10.74 \text{ m/s}$$

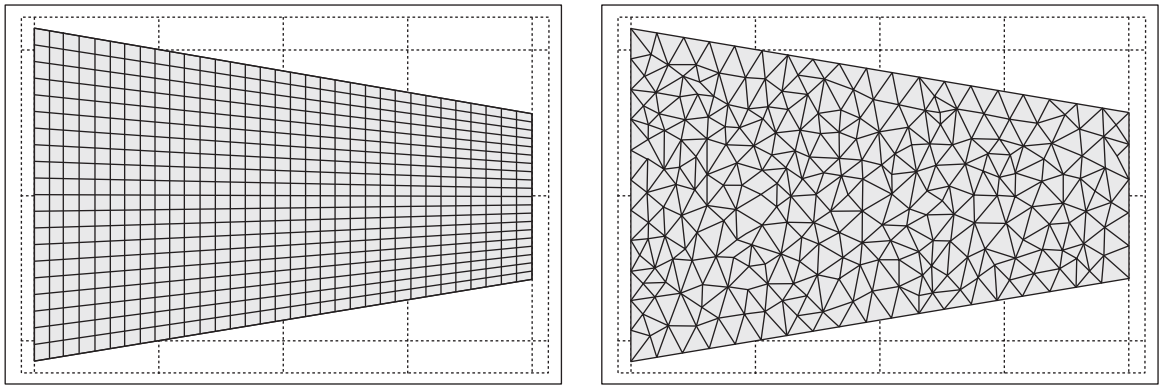
$$v_{11} = -U_\infty \left(\frac{\Psi_{12} - \Psi_{10}}{2\Delta X} \right) = -10 \left(\frac{0.365 - 0.455}{2/6} \right) = 2.7 \text{ m/s}$$

Observe que estos valores calculados son ligeramente diferentes de los previos, porque las aproximaciones de diferencia central son más precisas que las aproximaciones de diferencia adelantada. Los valores de u y v en todos los puntos de la cuadrícula pueden determinarse en una forma similar usando los valores calculados de Ψ.

14.6 RESUMEN

La dinámica de fluidos computacional (DFC) en general comprende un proceso de tres pasos: la generación de cuadrículas, el cálculo del flujo y el procesamiento posterior. El proceso de generación de cuadrículas es el primer paso involucrado para resolver problemas de flujo de fluido. Puede ser lento y tedioso, en especial al crear cuadrículas para complicadas geometrías tridimensionales, pero vale la pena emplear el tiempo y el esfuerzo necesarios para generar una cuadrícula bien hecha porque mejora mucho la precisión de los resultados. Es muy frecuente que una cuadrícula mal hecha produzca resultados deficientes. Además, muchas dificultades numéricas para obtener una solución o lograr la convergencia a una solución se deben con frecuencia a una cuadrícula mal hecha.

Las cuadrículas pueden ser de forma estructurada, no estructurada o híbrida. En un sistema de cuadrícula estructurada, la geometría debe ser segmentada en bloques y cada bloque es entramado en forma tal que la cuadrícula en sus límites sea consistente con la cuadrícula en los límites de los bloques de conexión. Los elementos de cuadrícula en cuadrículas estructuradas tienen una forma rectangular en un espacio bidimensional, tal como se muestra en la figura 14.4a, y son hexaédricas en un espacio tridimensional. Las cuadrículas no estructuradas se forman al usar elementos triangulares en 2D, como se muestra en la figura 14.4b, y tetraédricos en 3D. Las cuadrículas híbridas usan una combinación de cuadrículas estructuradas y no estructuradas. Las ventajas de usar una cuadrícula no estructurada es que el proceso puede ser automatizado usando una computadora y, por lo tanto, puede ser menos lenta que cuando se genera una cuadrícula estructurada, que es de trabajo más intensivo. No obstante, las cuadrículas no estructuradas requerirán más memoria de computadora y tiempo de la CPU que las cuadrículas estructuradas. Pero, el aumento en tiempo de la CPU para cuadrículas no estructuradas aun puede ser menor que las horas de trabajo necesarias para generar cuadrículas estructuradas, si bien eso depende de la eficiencia del programa para resolver el problema, puesto que los lugares de puntos de cuadrículas en cuadrículas no estructuradas y la conectividad son más aleatorios que en cuadrículas estructuradas. Otros factores a considerar incluyen la geometría de flujo y la capacidad para generar cuadrículas densas donde se requiera, tal como en capas límite. En general, es más fácil usar cuadrículas estructuradas cerca de límites sólidos y cuadrículas no estructuradas en algún otro lugar en el flujo. Los lectores interesados en aprender más acerca de estos tipos de cuadrículas encontrarán más información sobre el tema en Thompson *et al.* (1998).



(a) Estructurada (b) No estructurada

Fig. 14.4 Diagrama esquemático de cuadrículas estructuradas y no estructuradas en un conducto convergente.

Cuando se usa correctamente, la dinámica de fluidos computacional (DFC) puede ser una muy útil y poderosa herramienta para resolver complejos problemas de flujo de fluidos, en especial cuando los métodos experimentales no se puedan usar o no son posibles. Por ejemplo, la figura 14.5 muestra la forma en que se usó la DFC para determinar el efecto de agregar una tolva a una válvula de admisión para controlar el flujo de aire hacia un motor. La figura 14.5a muestra los vectores velocidad alrededor de una válvula sin tolva, y la figura 14.5b muestra los vectores de velocidad para una válvula con tolva.

La DFC permite resolver flujos transitorios, tridimensionales, compresibles o incompresible, laminares o turbulentos, reactivos y no reactivos. La DFC puede ayudar a identificar las variables regentes en un sistema de ingeniería para obtener

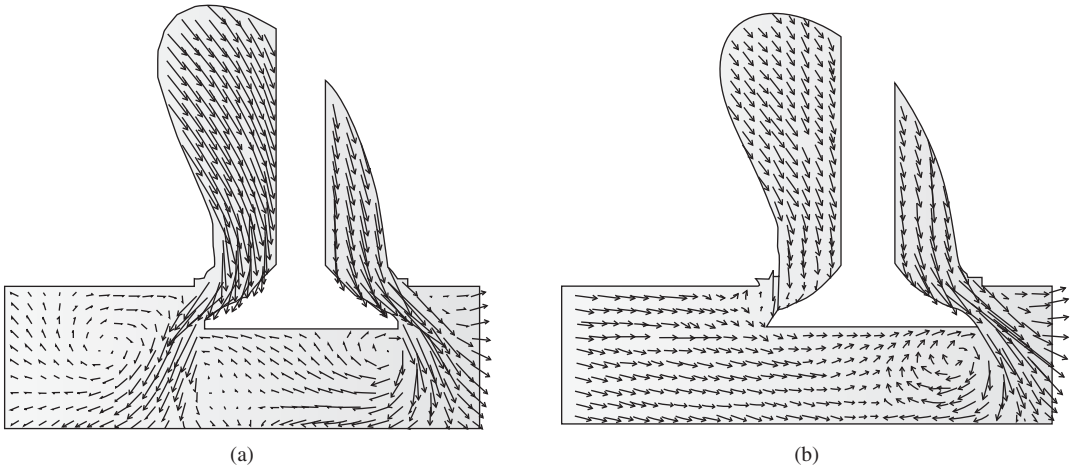


Fig. 14.5 Vectores velocidad para (a) una válvula sin tolva, y (b) una válvula con tolva.

directrices para esfuerzos de desarrollo experimental más racionales y por tanto menos de costosos. Las simulaciones de una DFC pueden predecir el comportamiento de un sistema sobre una amplia variedad de variables de diseño y de condiciones de operación, y para seleccionar conceptos antes de una construcción importante de implementos para determinar tendencias, desventajas y optimizar el diseño y el control. Recientes desarrollos de sistemas computacionales han hecho posible resolver complejos problemas de flujo de fluidos con las computadoras actuales. La potencia de procesamiento de cómputo y la capacidad de almacenamiento en memoria han mejorado considerablemente y continúan perfeccionando, lo cual va a mejorar la precisión y a reducir el tiempo computacional. No obstante, la solución obtenida usando la DFC puede no ser la respuesta correcta, y por tanto es siempre importante que el usuario de la DFC entienda la física del problema a resolver, usando las ecuaciones regentes adecuadas y las condiciones límite e iniciales correctas. Además, cuando se resuelvan flujos transitorios tridimensionales, la cantidad de datos generados por la DFC puede ser abrumadora e interpretar los resultados puede ser un gran desafío y consumir mucho tiempo. Además, los resultados de la DFC siempre deben ser verificados con soluciones teóricas o experimentales si es posible.

REFERENCIAS

Beam, R. M. y Warming, R. F., "An Implicit Factored Scheme for Compressible Navier–Stokes Equations", *AIAA Journal*,Vol. 16, 1978, pp. 393–402.

Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows—Vol 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley, Chichester, Utc, 1991.

Schlichting, H. y Gersten, K., *Boundary Layer Theory*, 8th Revised and Enlarged Ed., Springer, Berlin, 2000.

Tannehill, J. C., Anderson, A. A. y Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer,* 2nd Ed.,Taylor & Francis,Washington,D.C., 1997.

Thompson, J. F., Soni, B. y Weatherill, N., Ed., *Handbook on Grid Generation,* CRC Press, Boca Raton, Fierida,1998.

Yih, C. S., *Fluid Mechanics*, *A Concise Introduction*, McGraw-Hill, New York, 1969.

PROBLEMAS

14.1 Desarrolle $y = \exp(x)$ en una serie de Taylor respecto a $x = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie? Suponga que sólo se suman los primeros tres términos de la serie. Compare esa suma con la solución exacta tomada de la evaluación con una calculadora de $\exp(x)$, calculando el error relativo para $x = 0.1, 1$ y 2. Explique por qué el error aumenta cuando x aumenta. Si el lector desea un error relativo de 1% en la evaluación de $\exp(x)$, donde $x = 1$, ¿cuántos términos de la serie deben incluirse?

14.2 Escriba un programa de computadora para evaluar $\exp(x)$, usando una precisión simple (use siete dígitos para representar un número). Después, use el programa para evaluar exp(+20) y exp(–20). Explique por qué los resultados para exp(+20) son correctos y los resultados para exp(–20) son incorrectos, cuando se comparan con la solución correspondiente de una calculadora. Observe que la programación no es trivial. *Sugerencia:* Si n es grande, x^{n+1} y $(n + 1)!$ son números enormes, pero $x^{n+1}/(n + 1)!$ puede ser pequeño. Entonces: $x^{n+1}/(n + 1)! = [x/(n + 1)]\,[x/n!]$ o $[x/(n + 1)] \times$ [término previo].

14.3 Para $(\partial u/\partial y)$, deduzca un operador de diferencia adelantada y uno de diferencia retrasada que sea preciso de segundo grado en el espacio.

14.4 Programe el algoritmo de Thomas dado por las ecuaciones (14.2.28 a 14.2.36). Use el programa para calcular $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 5 & \\ 8 & 15 & 4 \\ & 12 & 14 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

14.5 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de eliminación de Gauss o el algoritmo de Thomas.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 16 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 5x_2 - 3x_3 - 6x_4 &= -10 \\ -4x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

14.6 Deduzca $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para la ecuación 14.2.26 aplicada en $j = 2, 3, \ldots, J-1$ junto con la ecuación 14.2.19 y 14.2.20.

14.7 Deduzca las ecuaciones de diferencia finita (EDF) para las ecuaciones 14.2.1 y 14.2.2 con una fórmula de diferenciación respecto al tiempo de Runge-Kutta de segundo orden.

14.8 Programe el algoritmo de solución para el método explícito en la sección 14.2.3. Genere soluciones con $H = 0.1$ m, $V_0 = 0.5$ m/s, $\nu = 10^{-3}$ m^2/s. Pruebe varios valores diferentes de J. En todos los casos, haga $\Delta t = \Delta y^2/2\nu$. Compare las soluciones generadas con la ecuación 14.2.3.

14.9 Modifique las EDF y el programa desarrollado en el problema 14.8 haciendo que la placa inferior oscile con el tiempo; es decir, $u(0, t) = V_0 \operatorname{sen} 2\pi\sigma t$). Obtenga soluciones con diferentes valores de σ. Examine los casos limitantes de σ alto y bajo.

14.10 Analice la consistencia de las ecuaciones 14.2.21.

14.11 Analice la consistencia de la siguiente EDF:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + \mathrm{O}\left(\Delta t^2, \Delta y^2, \frac{\Delta t^4}{\Delta y^2}\right)$$

Demuestre que puede converger a la siguiente ecuación diferencial parcial (EDP) cuando la separación de cuadrícula y el incremento de tiempo tienden a cero:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\nu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

14.12 Para el programa desarrollado para el problema 14.7, genere soluciones para diferentes incrementos de tiempo para examinar la estabilidad y la precisión (es decir, elimine el requisito de que $\Delta t = \Delta y^2/2\nu$).

14.13 Programe el algoritmo de solución para el método implícito de la sección 14.2.3. Genere soluciones con $H = 0.1$ m, $V_0 = 0.5$ m/s, $\nu = 10^{-3}$ m^2/s. Pruebe varios valores diferentes de J y Δt. Compare la solución generada con la ecuación 14.3.3. Si sólo la solución de estado permanente es de interés, entonces ¿cuál es el Δt óptimo (el tamaño del incremento de tiempo que hará posible alcanzar el estado permanente con menos incrementos de tiempo?

14.14 Analice la estabilidad numérica de las EDF dadas por las ecuaciones 14.2.21.

14.15 Analice la estabilidad numérica de la siguiente EDF:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + O(\Delta t^2, \Delta y^2)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + O\left(\Delta t^2, \Delta y^2, \frac{\Delta t^4}{\Delta y^2}\right)$$

14.16 Para la EDF dada por la ecuación 14.2.26, demuestre que es incondicionalmente estable si $\theta \in (0.5, 1)$ y condicionalmente estable si $\theta \in [0, 0.5]$.

14.17 Aun cuando las EDP $\partial u/\partial t + \frac{1}{2}\partial u^2/\partial x = 0$ y $\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = 0$ son analíticamente idénticas, difieren cuando se diferencian de manera finita. Si se usa el método explícito de Euler para la derivada respecto al tiempo, y se usa diferenciación retrasada de primer orden para la derivada espacial, ¿cuál EDF mantendrá la propiedad conservadora?

14.18 Programe las EDF derivadas en el problema 15.16. Obtenga soluciones para las siguientes condiciones iniciales: (a) $u = 0$ cuando $x < -1$ y > 1; $u = 1$, $u = x + 1$ cuando x está entre –1 y 0; $u = -x + 1$ cuando x está entre 0 y 1. (b) $u + 0$, cuando $x < -1$ y > 1; $u = 1$, cuando x está entre –1 y 1.

14.19 Considere un flujo de fluido transitorio bidimensional gobernado por la ecuación

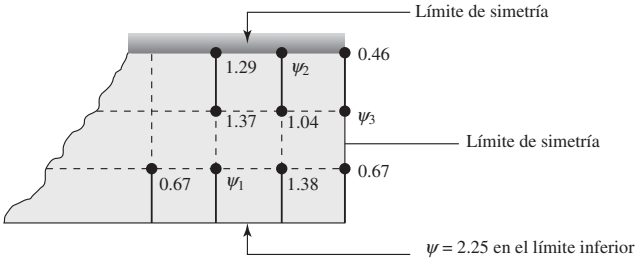
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

Usando diferencias finitas, escriba la forma discretizada de la EDP anterior usando (a) el método explícito, (b) el método implícito y (c) el método de Crank-Nicolson. Adopte la notación $U_{i,j}^{(n)} = u(x_i, y_j, t^n)$.

14.20 Los valores de estado permanente asociados con puntos nodales seleccionados de un flujo potencial bidimensional se muestran en el esquema siguiente. Use $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m.

(a) Escriba las ecuaciones de diferencias finitas para los nodos 1, 2 y 3.

(b) Use su resultado del inciso (a) y calcule los valores de ψ en los nodos 1, 2 y 3.

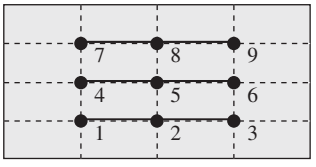


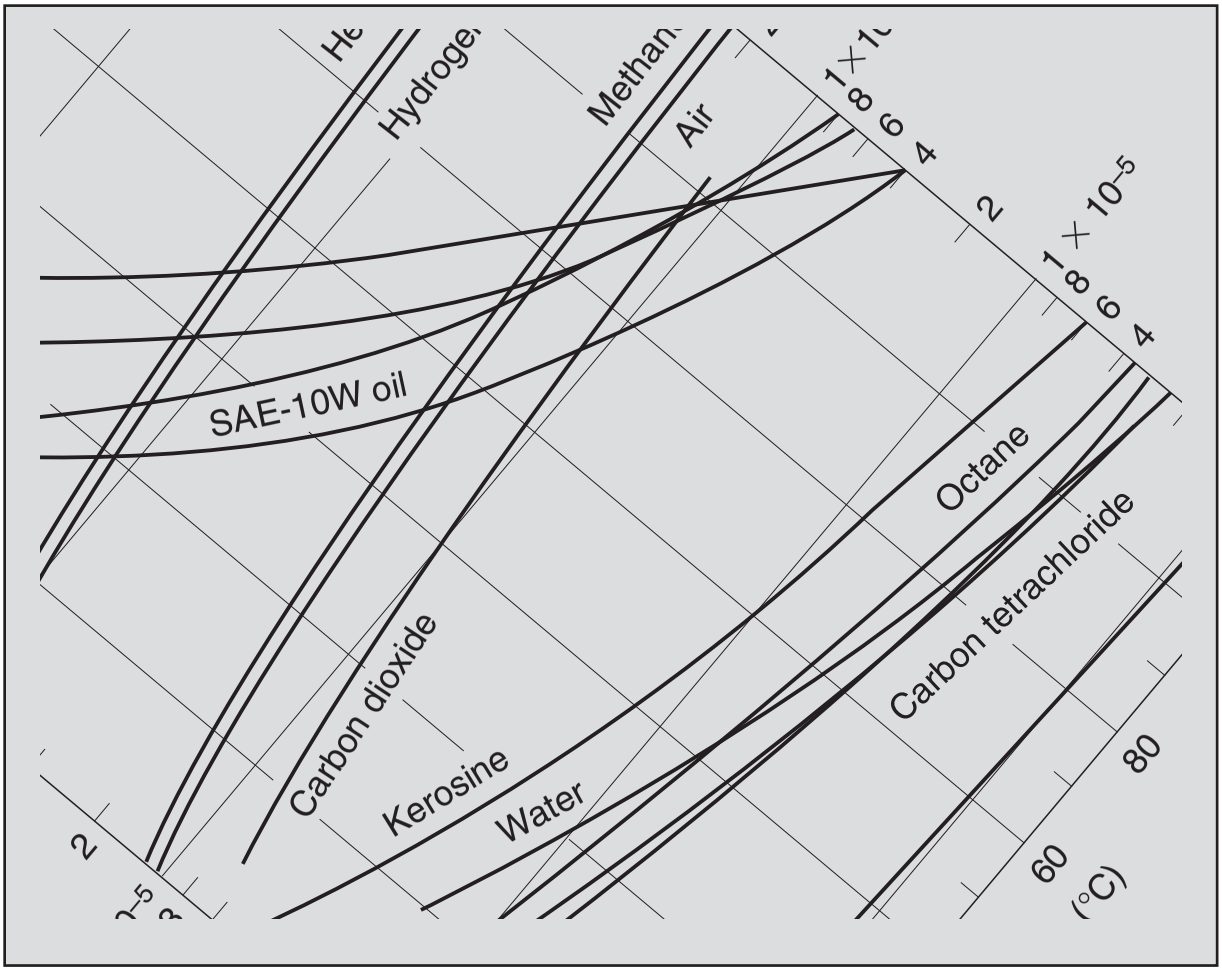
14.21 Considere un sistema de flujo de fluido transitorio en una dimensión. La tabla que sigue muestra los valores de la velocidad en nodos seleccionados como una función del tiempo. Determine V_3 en $t = 20$ s usando (a) el método explícito, (b) el método implícito, y (c) el método de Crank-Nicolson. Las velocidades están dadas en m/s. (Use $R = 0.3$.)

t	V_1	V_2	V_3	V_4
0	25	25	25	25
10	100	58	34	27
20	120			30

14.22 En un sistema de flujo de estado permanente bidimensional, los valores de la función de corriente en nodos seleccionados aparecen en la tabla que sigue. Se utilizó un método iterativo para determinar estos valores hasta la iteración número 2. Determine ψ_5 en la iteración actual usando el método de Gauss-Seidel y ($\Delta x = \Delta y$).

Iteración número	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9
0	0.450	0.440	0.430	0.400	0.390	0.370	0.350	0.320	0.300
1	0.457	0.443	0.435	0.431	0.412	0.387	0.366	0.307	0.289
2	0.459	0.445	0.437	0.434					




Hydroge
Methan
Air
1 × 10
8
6
4
2
1 × 10–5
8
6
4
SAE-10W oil
Octane
Carbon tetrachloride
Carbon dioxide
Kerosine
Water
2
80
60
(°C)

Apéndice

A. UNIDADES Y CONVERSIONES Y RELACIONES VECTORIALES

Tabla A.1 Unidades de ingeniería estadounidenses, Unidades SI y sus factores de conversión

Cantidad	*Unidades inglesas*	*Sistema internacional[a] SI*	*Factor de conversión*
Longitud	pulgada	milímetro	1 in. = 25.4 mm
	pie	metro	1 ft = 0.3048 m
	milla	kilómetro	1 milla = 1.609 km
Área	pulgada cuadrada	centímetro cuadrado	1 in^2 = 6.452 cm^2
	pie cuadrado	metro cuadrado	1 ft^2 = 0.09290 m^2
Volumen	pulgada cúbica	centímetro cúbico	1 in^3 = 16.39 cm^3
	pie cúbico	metro cúbico	1 ft^3 = 0.02832 m^3
	galón		1 gal = 0.003789 m^3
Masa	libra-masa	kilogramo	1 lb_m = 0.4536 kg
	slug		1 slug = 14.59 kg
Densidad	slug/pie cúbico	kilogramo/metro cúbico	1 slug/ft^3 = 515.4 kg/m^3
Fuerza	libra-fuerza	newton	1 lb = 4.448 N
Trabajo o par de torsión	pie-libra	newton-metro	1 ft-lb = 1.356 N·m
Presión	libra/pulgada cuadrada	newton/metro cuadrado (pascal)	1 psi = 6895 Pa
	libra/pie cuadrado		1 psf = 47.88 Pa
Temperatura	grado Fahrenheit	grado Celsius	___ °F = $\frac{9}{5}$ ___°C + 32
	grado Rankine	kelvin	___ °R = $\frac{9}{5}$ ___K
Energía	Unidad térmica británica	joule	1 Btu = 1055 J
	caloría		1 cal = 4.186 J
	pie-libra		1 ft-lb = 1.356 J
Potencia	caballo de potencia	watt	1 hp = 745.7 W
Velocidad	pie-libra/segundo		1 ft-lb/s = 1.356 W
Aceleración	pie/segundo	metro/segundo	1 ft/s = 0.3048 m/s
Frecuencia	pie/segundo cuadrado	metro/segundo cuadrado	1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2
Viscosidad	ciclo/segundo	hertz	1 cps = 1.000 Hz
	libra-segundo/pie cuadrado	newton-segundo/metro cuadrado	1 lb-s/ft^2 = 47.88 N·s/m^2

[a]Las iniciales invertidas en esta abreviación se derivan de la forma francesa del nombre: Systéme International.

Tabla A.2 Conversiones

Longitud	*Fuerza*	*Masa*	*Velocidad*
1 cm = 0.3937 in.	1 lb = 0.4536 kg	1 oz = 28.35 g	1 mph = 1.467 ft/s
1 m = 3.281 ft	1 lb = 0.4448 × 10^6 dinas	1 lb = 0.4536 kg	1 mph = 0.8684 nudos
1 km = 0.6214 millas	1 lb = 32.17 pdl	1 slug = 32.17 lb	1 ft/s = 0.3048 m/s
1 in. = 2.54 cm	1 kg = 2.205 lb	1 slug = 14.59 kg	1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft = 0.3048 m	1 pdl = 0.03108 lb	1 kg = 2.205 lb	1 km/h = 0.278 m/s
1 milla = 1.609 km	1 dina = 2.248 × 10^{-6} lb	1 kg = 0.06852 slug	
1 milla = 5280 ft	1 lb = 4.448 N		
1 milla = 1760 yd	1 N = 0.2248 lb		

Trabajo, energía y potencia	*Presión*	*Volumen*	*Gasto*
1 Btu = 778.2 ft-lb	1 psi = 2.036 in. Hg	1 ft^3 = 28.32 L	1 ft^3/min = 4.719 × 10^{-4} m^3/s
1 J = 10^7 ergs 1 J = 0.7376 ft-lb	1 psi = 27.7 in. H_2O	1 ft^3 = 7.481 gal (U.S.)	1 ft^3/s = 0.02832 m^3/s
1 cal = 3.088 ft-lb	14.7 psi = 22.92 in. Hg	1 gal (U.S.) = 231 in^3	1 m^3/s = 35.31 ft^3/s
1 cal = 0.003968 Btu	14.7 psi = 33.93 ft H_2O	1 gal (Brit.) = 1.2 gal (U.S.)	1 gal/min = 0.002228 ft^3/s
1 kWh = 3413 Btu	14.7 psi = 1.0332 kg/cm^2	1 m^3 = 1000 L	1 ft^3/s = 448.9 gal/min
1 Btu = 1.055 kJ	14.7 psi = 1.0133 bar	1 ft^3 = 0.02832 m^3	
1 ft-lb = 1.356 J	1 kg/cm^2 = 14.22 psi	1 m^3 = 35.31 ft^3	*Viscosidad*
1 hp = 550 ft-lb/s	1 in. Hg = 0.4912 psi		
1 hp = 0.7067 Btu/s	1 ft H_2O = 0.4331 psi		1 stoke = 10^{-4} m^2/s
1 hp = 0.7455 kW	1 psi = 6895 Pa		1 poise = 0.1 N·s/m^2
1 W = 1 J/s	1 psf = 47.88 Pa		1 lb-s /ft^2 = 47.88 N·s/m^2
1 W = 1.0 × 10^7 dina-cm/s	10^5 Pa = 1 bar		1 ft^2/s = 0.0929 m^2/s
1 erg = 10^{-7} J	1 kPa = 0.145 psi		
1 quad = 10^{15} Btu			
1 termia = 10^5 Btu			

Tabla A.3 Relaciones vectoriales

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}$

Si $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

Si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$

operador gradiente $= \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$

divergencia $\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$

rotacional de $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$

ecuación de Laplace $= \nabla^2\phi = 0$

campo vectorial irrotacional (conservador) $\nabla \times \mathbf{V} = 0$

teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$

teorema de Gauss $\oiint_A \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{V}\, d\mathcal{V}$

B. PROPIEDADES DE FLUIDOS

Tabla B.1 Propiedades del agua

Temperatura T (°C)	*Densidad* ρ (kg/m^3)	*Viscosidad* μ (N·s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν (m^2/s)	*Tensión superficial* σ (N/m)	*Presión de vapor* p_v (kPa)	*Módulo de volumen* B (Pa)
0	999.9	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	0.0762	0.610	204×10^7
5	1000.0	1.519	1.519	0.0754	0.872	206
10	999.7	1.308	1.308	0.0748	1.13	211
15	999.1	1.140	1.141	0.0741	1.60	214
20	998.2	1.005	1.007	0.0736	2.34	220
30	995.7	0.801	0.804	0.0718	4.24	223
40	992.2	0.656	0.661	0.0701	3.38	227
50	988.1	0.549	0.556	0.0682	12.3	230
60	983.2	0.469	0.477	0.0668	19.9	228
70	977.8	0.406	0.415	0.0650	31.2	225
80	971.8	0.357	0.367	0.0630	47.3	221
90	965.3	0.317	0.328	0.0612	70.1	216
100	958.4	0.284×10^{-3}	0.296×10^{-6}	0.0594	101.3	207×10^7

Tabla B.1 Unidades inglesas Propiedades del agua

Temperatura (°F)	*Densidad* (slug/ft^3)	*Viscosidad* (lb-s/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/s)	*Tensión superficial* (lb/ft)	*Presión de vapor* (psi)	*Módulo de volumen* (psi)
32	1.94	3.75×10^{-5}	1.93×10^{-5}	0.518×10^{-2}	0.089	293,000
40	1.94	3.23	1.66	0.514	0.122	294,000
50	1.94	2.74	1.41	0.509	0.178	305,000
60	1.94	2.36	1.22	0.504	0.256	311,000
70	1.94	2.05	1.06	0.500	0.340	320,000
80	1.93	1.80	0.93	0.492	0.507	322,000
90	1.93	1.60	0.83	0.486	0.698	323,000
100	1.93	1.42	0.74	0.480	0.949	327,000
120	1.92	1.17	0.61	0.465	1.69	333,000
140	1.91	0.98	0.51	0.454	2.89	330,000
160	1.90	0.84	0.44	0.441	4.74	326,000
180	1.88	0.73	0.39	0.426	7.51	318,000
200	1.87	0.64	0.34	0.412	11.53	308,000
212	1.86	0.59×10^{-5}	0.32×10^{-5}	0.404×10^{-2}	14.7	300,000

Tabla B.2 Propiedades del aire a presión atmosférica

Temperatura T (°C)	*Densidad* ρ (kg/m^3)	*Viscosidad* μ (N·s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν (m^2/s)	*Velocidad del sonido* c (m/s)
−50	1.582	1.46×10^{-5}	0.921×10^{-5}	299
−30	1.452	1.56	1.08×10^{-5}	312
−20	1.394	1.61	1.16	319
−10	1.342	1.67	1.24	325
0	1.292	1.72	1.33	331
10	1.247	1.76	1.42	337
20	1.204	1.81	1.51	343
30	1.164	1.86	1.60	349
40	1.127	1.91	1.69	355
50	1.092	1.95	1.79	360
60	1.060	2.00	1.89	366
70	1.030	2.05	1.99	371
80	1.000	2.09	2.09	377
90	0.973	2.13	2.19	382
100	0.946	2.17	2.30	387
200	0.746	2.57	3.45	436
300	0.616	2.93×10^{-5}	4.75×10^{-5}	480

Tabla B.2 Unidades inglesas Propiedades del aire a presión atmosférica

Temperatura (°F)	*Densidad* (slug/ft^3)	*Viscosidad* (lb-s/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/s)	*Velocidad del sonido* (ft/s)
−20	0.00280	3.34×10^{-7}	11.9×10^{-5}	1028
0	0.00268	3.38	12.6	1051
20	0.00257	3.50	13.6	1074
40	0.00247	3.62	14.6	1096
60	0.00237	3.74	15.8	1117
68	0.00233	3.81	16.0	1125
80	0.00228	3.85	16.9	1138
100	0.00220	3.96	18.0	1159
120	0.00213	4.07	18.9	1180
160	0.00199	4.23	21.3	1220
200	0.00187	4.50	24.1	1258
300	0.00162	4.98	30.7	1348
400	0.00144	5.26	36.7	1431
1000	0.000844	7.87×10^{-7}	93.2×10^{-5}	1839

Tabla B.3 Propiedades de la atmósfera estándar

Altitud (m)	*Temperatura* (K)	*Presión* (kPa)	*Densidad* (kg/m^3)	*Velocidad del sonido* (m/s)
0	288.2	101.3	1.225	340
500	284.9	95.43	1.167	338
1 000	281.7	89.85	1.112	336
2 000	275.2	79.48	1.007	333
4 000	262.2	61.64	0.8194	325
6 000	249.2	47.21	0.6602	316
8 000	236.2	35.65	0.5258	308
10 000	223.3	26.49	0.4136	300
12 000	216.7	19.40	0.3119	295
14 000	216.7	14.17	0.2278	295
16 000	216.7	10.35	0.1665	295
18 000	216.7	7.563	0.1216	295
20 000	216.7	5.528	0.0889	295
30 000	226.5	1.196	0.0184	302
40 000	250.4	0.287	4.00×10^{-3}	317
50 000	270.7	0.0798	1.03×10^{-3}	330
60 000	255.8	0.0225	3.06×10^{-4}	321
70 000	219.7	0.00551	8.75×10^{-5}	297
80 000	180.7	0.00103	2.00×10^{-5}	269

Tabla B.3 Unidades inglesas Propiedades de la atmósfera

Altitud (ft)	*Temperatura* (°F)	*Presión* (lb/ft^2)	*Densidad* (slugs/ft^3)	*Velocidad del sonido* (ft/s)
0	59.0	2116	0.00237	1117
1,000	55.4	2014	0.00231	1113
2,000	51.9	1968	0.00224	1109
5,000	41.2	1760	0.00205	1098
10,000	23.4	1455	0.00176	1078
15,000	5.54	1194	0.00150	1058
20,000	−12.3	973	0.00127	1037
25,000	−30.1	785	0.00107	1016
30,000	−48.0	628	0.000890	995
35,000	−65.8	498	0.000737	973
36,000	−67.6	475	0.000709	971
40,000	−67.6	392	0.000586	971
50,000	−67.6	242	0.000362	971
100,000	−51.4	23.2	3.31×10^{-5}	971

Tabla B.4 Propiedades de gases ideales a 300 K

Gas	Fórmula química	Masa molar	R ft-lb slug-°R	R kJ kg·K	c_p ft-lb slug-°R	c_p kJ kg·K	k
Aire	—	28.97	1,716	0.287	6,012	1.004	1.40
Argón	Ar	39.94	1,244	0.2081	3,139	0.5203	1.667
Dióxido de carbono	CO_2	44.01	1,129	0.1889	5,085	0.8418	1.287
Monóxido de carbono	CO	28.01	1,775	0.2968	6,238	1.041	1.40
Etano	C_2H_6	30.07	1,653	0.2765	10,700	1.766	1.184
Helio	He	4.003	12,420	2.077	31,310	5.193	1.667
Hidrógeno	H_2	2.016	24,660	4.124	85,930	14.21	1.40
Metano	CH_4	16.04	3,100	0.5184	13,330	2.254	1.30
Nitrógeno	N_2	28.02	1,774	0.2968	6,213	1.042	1.40
Oxígeno	O_2	32.00	1,553	0.2598	5,486	0.9216	1.394
Propano	C_3H_8	44.10	1,127	0.1886	10,200	1.679	1.12
Vapor	H_2O	18.02	2,759	0.4615	11,150	1.872	1.33

$c_v = c_p - \mathrm{R}, k = c_p/c_v$

Tabla B.5 Propiedades de líquidos comunes a presión atmosférica y a aproximadamente 60 a 70 ºF (16 a 21 ºC)

Líquido	*Peso específico* γ lb/ft^3	*Peso específico* γ N/m^3	*Densidad* ρ slugs/ft^3	*Densidad* ρ kg/m^3	*Tensión superficial*[a] σ lb/ft	*Tensión superficial*[a] σ N/m	*Presión de vapor* p_v psia	*Presión de vapor* p_v kPa
Alcohol, etilo	49.3	7 744	1.53	789	0.0015	0.022	—	—
Benceno	56.2	8 828	1.75	902	0.0020	0.029	1.50	10.3
Tetracloruro de carbono	99.5	15 629	3.09	1 593	0.0018	0.026	12.50	86.2
Gasolina	42.4	6 660	1.32	680	—	—	—	—
Glicerina	78.6	12 346	2.44	1 258	0.0043	0.063	2×10^{-6}	1.4×10^{-5}
Queroseno	50.5	7 933	1.57	809	0.0017	0.025	—	—
Mercurio	845.5	132 800	26.29	13 550	0.032	0.467	2.31×10^{-5}	1.59×10
Aceite SAE 10	57.4	9 016	1.78	917	0.0025	0.036	—	—
Aceite SAE 30	57.4	9 016	1.78	917	0.0024	0.035	—	—
Aguarrás	54.3	8 529	1.69	871	0.0018	0.026	7.7×10^{-3}	5.31×10^{-2}
Agua	62.4	9 810	1.94	1000	0.0050	0.073	0.34	2.34

[a]En contacto con aire.

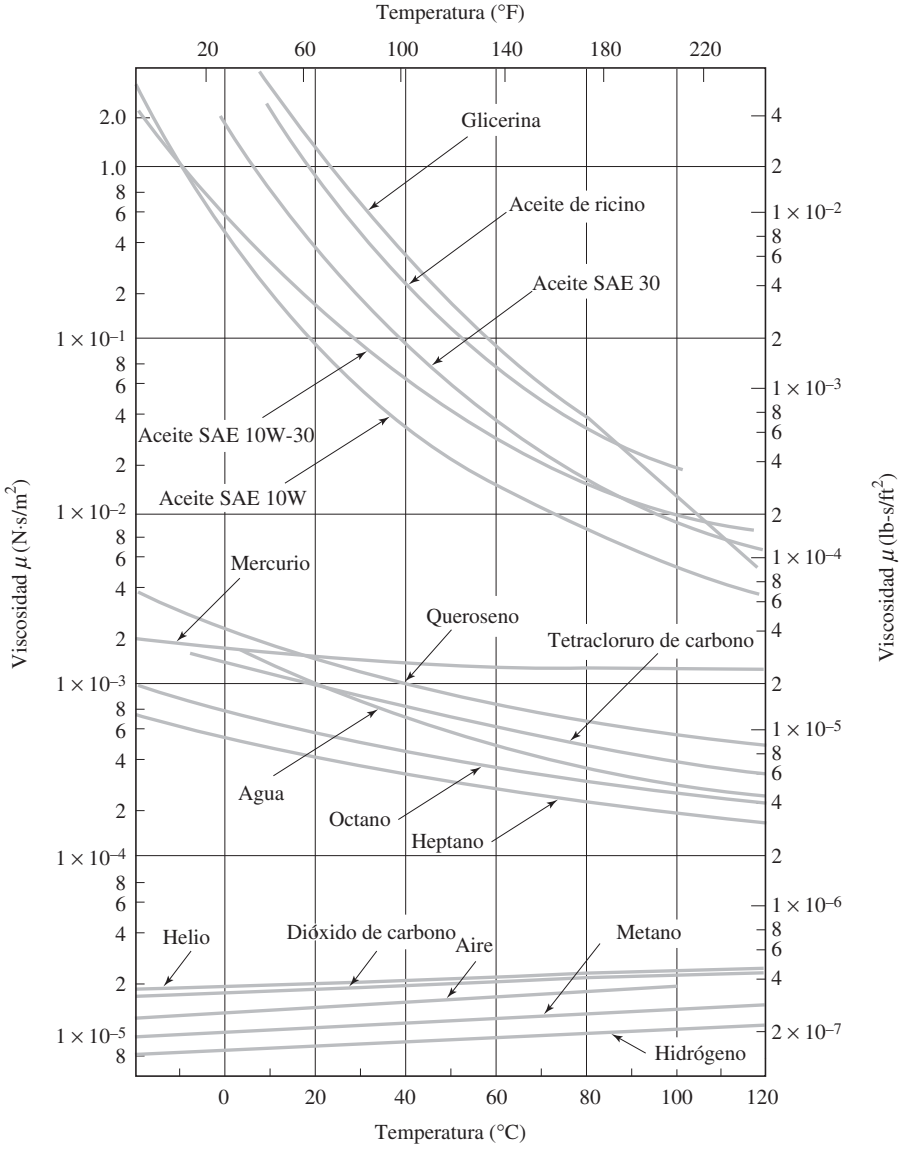


Fig. B.1 Viscosidad como una función de la temperatura. (De R. W. Fox y T. A. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 2a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1978.)

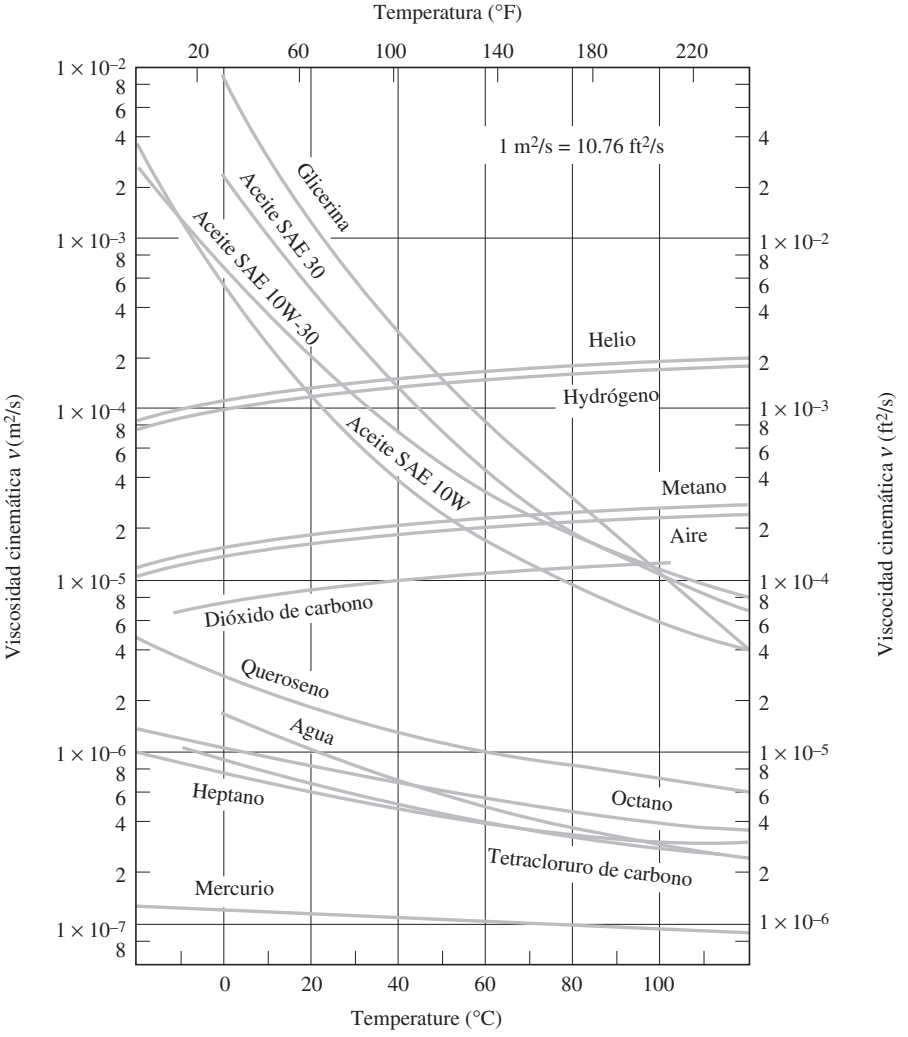


Fig. B.2 Viscosidad cinemática (a presión atmosférica) como función de la temperatura. (De R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 2a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1978.)

C. PROPIEDADES DE ÁREAS Y VOLÚMENES

Tabla C.1 Áreas

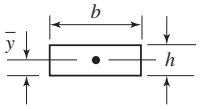
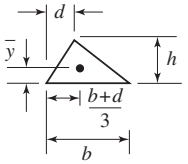
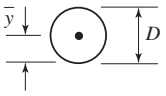
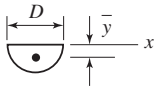
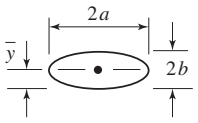
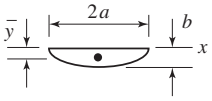
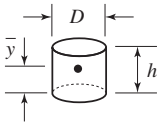
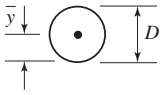
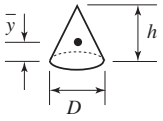
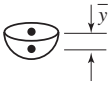
	Boceto	*Área*	*Centroide*	*Segundo momento*
Rectángulo		bh	$\bar{y} = h/2$	$\bar{I} = bh^3/12$ $\bar{I}_{xy} = 0$
Triángulo		$bh/2$	$\bar{y} = h/3$	$\bar{I} = bh^3/36$ $\bar{I}_{xy} = (b - 2d)bh^3/72$
Círculo		$\pi D^2/4$	$\bar{y} = r$	$\bar{I} = \pi D^4/64$
Semicírculo		$\pi D^2/8$	$\bar{y} = 4r/3\pi$	$I_x = \pi D^4/128$
Elipse		πab	$\bar{y} = b$	$\bar{I} = \pi ab^3/4$
Semielipse		$\pi ab/2$	$\bar{y} = 4b/3\pi$	$I_x = \pi ab^3/8$

Tabla C.2 Volúmenes

	Boceto	*Área superficial*	*Volumen*	*Centroide*
Cilindro		$\pi Dh + \pi D^2/2$	$\pi D^2 h/4$	$\bar{y} = h/2$
Esfera		πD^2	$\pi D^3/6$	$\bar{y} = r$
Cono		$\pi(r^2 + r\sqrt{r^2 + h^2})$	$\pi D^2 h/12$	$\bar{y} = h/4$
Hemisferio		$3\pi D^2/4$	$\pi D^2/12$	$\bar{y} = 3r/8$

D. TablaS PARA FLUJO COMPRESIBLE DE AIRE

Tabla D.1 Flujo isentrópico

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0	1.0000	1.0000	∞	.96	.5532	.8444	1.0014
.02	.9997	.9999	28.9421	.98	.5407	.8389	1.0003
.04	.9989	.9997	14.4815	1.00	.5283	.8333	1.000
.06	.9975	.9993	9.6659	1.02	.5160	.8278	1.000
.08	.9955	.9987	7.2616	1.04	.5039	.8222	1.001
.10	.9930	.9980	5.8218	1.06	.4919	.8165	1.003
.12	.9900	.9971	4.8643	1.08	.4800	.8108	1.005
.14	.9864	.9961	4.1824	1.10	.4684	.8052	1.008
.16	.9823	.9949	3.6727	1.12	.4568	.7994	1.011
.18	.9776	.9936	3.2779	1.14	.4455	.7937	1.015
.20	.9725	.9921	2.9635	1.16	.4343	.7879	1.020
.22	.9668	.9904	2.7076	1.18	.4232	.7822	1.025
.24	.9607	.9886	2.4956	1.20	.4124	.7764	1.030
.26	.9541	.9867	2.3173	1.22	.4017	.7706	1.037
.28	.9470	.9846	2.1656	1.24	.3912	.7648	1.043
.30	.9395	.9823	2.0351	1.26	.3809	.7590	1.050
.32	.9315	.9799	1.9219	1.28	.3708	.7532	1.058
.34	.9231	.9774	1.8229	1.30	.3609	.7474	1.066
.36	.9143	.9747	1.7358	1.32	.3512	.7416	1.075
.38	.9052	.9719	1.6587	1.34	.3417	.7358	1.084
.40	.8956	.9690	1.5901	1.36	.3323	.7300	1.094
.42	.8857	.9659	1.5289	1.38	.3232	.7242	1.104
.44	.8755	.9627	1.4740	1.40	.3142	.7184	1.115
.46	.8650	.9594	1.4246	1.42	.3055	.7126	1.126
.48	.8541	.9560	1.3801	1.44	.2969	.7069	1.138
.50	.8430	.9524	1.3398	1.46	.2886	.7011	1.150
.52	.8317	.9487	1.3034	1.48	.2804	.6954	1.163
.54	.8201	.9449	1.2703	1.50	.2724	.6897	1.176
.56	.8082	.9410	1.2403	1.52	.2646	.6840	1.190
.58	.7962	.9370	1.2130	1.54	.2570	.6783	1.204
.60	.7840	.9328	1.1882	1.56	.2496	.6726	1.219
.62	.7716	.9286	1.1657	1.58	.2423	.6670	1.234
.64	.7591	.9243	1.1452	1.60	.2353	.6614	1.250
.66	.7465	.9199	1.1265	1.62	.2284	.6558	1.267
.68	.7338	.9153	1.1097	1.64	.2217	.6502	1.284
.70	.7209	.9107	1.0944	1.66	.2151	.6447	1.301
.72	.7080	.9061	1.0806	1.68	.2088	.6392	1.319
.74	.6951	.9013	1.0681	1.70	.2026	.6337	1.338
.76	.6821	.8964	1.0570	1.72	.1966	.6283	1.357
.78	.6691	.8915	1.0471	1.74	.1907	.6229	1.376
.80	.6560	.8865	1.0382	1.76	.1850	.6175	1.397
.82	.6430	.8815	1.0305	1.78	.1794	.6121	1.418
.84	.6300	.8763	1.0237	1.80	.1740	.6068	1.439
.86	.6170	.8711	1.0179	1.82	.1688	.6015	1.461
.88	.6041	.8659	1.0129	1.84	.1637	.5963	1.484
.90	.5913	.8606	1.0089	1.86	.1587	.5910	1.507
.92	.5785	.8552	1.0056	1.88	.1539	.5859	1.531
.94	.5658	.8498	1.0031	1.90	.1492	.5807	1.555

Tabla D.1 Flujo isoentrópico (*continuación*)

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
1.92	.1447	.5756	1.580	2.92	$.3071^{-1}$	.3696	3.924
1.94	.1403	.5705	1.606	2.94	$.2980^{-1}$	.3665	3.999
1.96	.1360	.5655	1.633	2.96	$.2891^{-1}$	.3633	4.076
1.98	.1318	.5605	1.660	2.98	$.2805^{-1}$	.3602	4.155
2.00	.1278	.5556	1.688	3.00	$.2722^{-1}$	.3571	4.235
2.02	.1239	.5506	1.716	3.02	$.2642^{-1}$	.3541	4.316
2.04	.1201	.5458	1.745	3.04	$.2564^{-1}$	.3511	4.399
2.06	.1164	.5409	1.775	3.06	$.2489^{-1}$	.3481	4.483
2.08	.1128	.5361	1.806	3.08	$.2416^{-1}$	.3452	4.570
2.10	.1094	.5313	1.837	3.10	$.2345^{-1}$	.3422	4.657
2.12	.1060	.5266	1.869	3.12	$.2276^{-1}$	.3393	4.747
2.14	.1027	.5219	1.902	3.14	$.2210^{-1}$	.3365	4.838
2.16	$.9956^{-1}$	.5173	1.935	3.16	$.2146^{-1}$	.3337	4.930
2.18	$.9649^{-1}$	.5127	1.970	3.18	$.2083^{-1}$	.3309	5.025
2.20	$.9352^{-1}$	.5081	2.005	3.20	$.2023^{-1}$	.3281	5.121
2.22	$.9064^{-1}$	.5036	2.041	3.22	$.1964^{-1}$	.3253	5.219
2.24	$.8785^{-1}$	.4991	2.078	3.24	$.1908^{-1}$	.3226	5.319
2.26	$.8514^{-1}$	.4947	2.115	3.26	$.1853^{-1}$	.3199	5.420
2.28	$.8251^{-1}$	.4903	2.154	3.28	$.1799^{-1}$	.3173	5.523
2.30	$.7997^{-1}$	.4859	2.193	3.30	$.1748^{-1}$	.3147	5.629
2.32	$.7751^{-1}$	.4816	2.233	3.32	$.1698^{-1}$	.3121	5.736
2.34	$.7512^{-1}$	.4773	2.274	3.34	$.1649^{-1}$	.3095	5.845
2.36	$.7281^{-1}$	.4731	2.316	3.36	$.1602^{-1}$	.3069	5.956
2.38	$.7057^{-1}$	.4688	2.359	3.38	$.1557^{-1}$	.3044	6.069
2.40	$.6840^{-1}$	.4647	2.403	3.40	$.1512^{-1}$	.3019	6.184
2.42	$.6630^{-1}$	.4606	2.448	3.42	$.1470^{-1}$	.2995	6.301
2.44	$.6426^{-1}$	.4565	2.494	3.44	$.1428^{-1}$	.2970	6.420
2.46	$.6229^{-1}$	.4524	2.540	3.46	$.1388^{-1}$	.2946	6.541
2.48	$.6038^{-1}$	.4484	2.588	3.48	$.1349^{-1}$	.2922	6.664
2.50	$.5853^{-1}$	.4444	2.637	3.50	$.1311^{-1}$	.2899	6.790
2.52	$.5674^{-1}$	.4405	2.686	3.52	$.1274^{-1}$	.2875	6.917
2.54	$.5500^{-1}$	.4366	2.737	3.54	$.1239^{-1}$	.2852	7.047
2.56	$.5332^{-1}$	.4328	2.789	3.56	$.1204^{-1}$	.2829	7.179
2.58	$.5169^{-1}$	.4289	2.842	3.58	$.1171^{-1}$	.2806	7.313
2.60	$.5012^{-1}$	.4252	2.896	3.60	$.1138^{-1}$	.2784	7.450
2.62	$.4859^{-1}$	.4214	2.951	3.62	$.1107^{-1}$	.2762	7.589
2.64	$.4711^{-1}$	.4177	3.007	3.64	$.1076^{-1}$	.2740	7.730
2.66	$.4568^{-1}$	.4141	3.065	3.66	$.1047^{-1}$	.2718	7.874
2.68	$.4429^{-1}$	.4104	3.123	3.68	$.1018^{-1}$	.2697	8.020
2.70	$.4295^{-1}$	.4068	3.183	3.70	$.9903^{-2}$	.2675	8.169
2.72	$.4165^{-1}$	.4033	3.244	3.72	$.9633^{-2}$	.2654	8.320
2.74	$.4039^{-1}$	.3998	3.306	3.74	$.9370^{-2}$	.2633	8.474
2.76	$.3917^{-1}$	.3963	3.370	3.76	$.9116^{-2}$	.2613	8.630
2.78	$.3799^{-1}$	.3928	3.434	3.78	$.8869^{-2}$	.2592	8.789
2.80	$.3685^{-1}$	.3894	3.500	3.80	$.8629^{-2}$	.2572	8.951
2.82	$.3574^{-1}$	.3860	3.567	3.82	$.8396^{-2}$	.2552	9.115
2.84	$.3467^{-1}$	.3827	3.636	3.84	$.8171^{-2}$	.2532	9.282
2.86	$.3363^{-1}$	.3794	3.706	3.86	$.7951^{-2}$	.2513	9.451
2.88	$.3263^{-1}$	.3761	3.777	3.88	$.7739^{-2}$	.2493	9.624
2.90	$.3165^{-1}$	.3729	3.850	3.90	$.7532^{-2}$	.2474	9.799

Tabla D.1 Flujo isoentrópico (*continuación*)

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
3.92	$.7332^{-2}$	.2455	9.977	4.54	$.3288^{-2}$	.1952	17.13
3.94	$.7137^{-2}$	.2436	10.16	4.56	$.3207^{-2}$	.1938	17.42
3.96	$.6948^{-2}$	.2418	10.34	4.58	$.3129^{-2}$	.1925	17.72
3.98	$.6764^{-2}$	.2399	10.53	4.60	$.3053^{-2}$	.1911	18.02
4.00	$.6586^{-2}$	.2381	10.72	4.62	$.2978^{-2}$	.1898	18.32
4.02	$.6413^{-2}$	.2363	10.91	4.64	$.2906^{-2}$	.1885	18.63
4.04	$.6245^{-2}$	.2345	11.11	4.66	$.2836^{-2}$	.1872	18.94
4.06	$.6082^{-2}$	.2327	11.31	4.68	$.2768^{-2}$	.1859	19.26
4.08	$.5923^{-2}$	.2310	11.51	4.70	$.2701^{-2}$	.1846	19.58
4.10	$.5769^{-2}$	.2293	11.71	4.72	$.2637^{-2}$	.1833	19.91
4.12	$.5619^{-2}$	.2275	11.92	4.74	$.2573^{-2}$	.1820	20.24
4.14	$.5474^{-2}$	.2258	12.14	4.76	$.2512^{-2}$	.1808	20.58
4.16	$.5333^{-2}$	.2242	12.35	4.78	$.2452^{-2}$	.1795	20.92
4.18	$.5195^{-2}$	.2225	12.57	4.80	$.2394^{-2}$	.1783	21.26
4.20	$.5062^{-2}$	.2208	12.79	4.82	$.2338^{-2}$	.1771	21.61
4.22	$.4932^{-2}$	.2192	13.02	4.84	$.2283^{-2}$	.1759	21.97
4.24	$.4806^{-2}$	.2176	13.25	4.86	$.2229^{-2}$	.1747	22.33
4.26	$.4684^{-2}$	.2160	13.48	4.88	$.2177^{-2}$	.1735	22.70
4.28	$.4565^{-2}$	.2144	13.72	4.90	$.2126^{-2}$	.1724	23.07
4.30	$.4449^{-2}$	.2129	13.95	4.92	$.2076^{-2}$	.1712	23.44
4.32	$.4337^{-2}$	.2113	14.20	4.94	$.2028^{-2}$	.1700	23.82
4.34	$.4228^{-2}$	.2098	14.45	4.96	$.1981^{-2}$	.1689	24.21
4.36	$.4121^{-2}$	.2083	14.70	4.98	$.1935^{-2}$	.1678	24.60
4.38	$.4018^{-2}$	.2067	14.95	5.00	$.1890^{-2}$	.1667	25.00
4.40	$.3918^{-2}$	.2053	15.21	6.00	$.0633^{-2}$	.1219	53.19
4.42	$.3820^{-2}$	.2038	15.47	7.00	$.0242^{-2}$	.0926	104.14
4.44	$.3725^{-2}$	.2023	15.74	8.00	$.0102^{-2}$	.0725	109.11
4.46	$.3633^{-2}$	.2009	16.01	9.00	$.0474^{-3}$	.0582	327.19
4.48	$.3543^{-2}$	.1994	16.28	10.00	$.0236^{-3}$	.0476	535.94
4.50	$.3455^{-2}$	.1980	16.56	∞	0	0	∞
4.52	$.3370^{-2}$	.1966	16.84				

Tabla D.2 Flujo de choque normal

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000
1.02	.9805	1.047	1.013	1.000
1.04	.9620	1.095	1.026	.9999
1.06	.9444	1.144	1.039	.9997
1.08	.9277	1.194	1.052	.9994
1.10	.9118	1.245	1.065	.9989
1.12	.8966	1.297	1.078	.9982
1.14	.8820	1.350	1.090	.9973
1.16	.8682	1.403	1.103	.9961
1.18	.8549	1.458	1.115	.9946
1.20	.8422	1.513	1.128	.9928
1.22	.8300	1.570	1.141	.9907
1.24	.8183	1.627	1.153	.9884
1.26	.8071	1.686	1.166	.9857
1.28	.7963	1.745	1.178	.9827

Tabla D.2 Flujo de choque normal (*continuación*)

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1.30	.7860	1.805	1.191	.9794
1.32	.7760	1.866	1.204	.9758
1.34	.7664	1.928	1.216	.9718
1.36	.7572	1.991	1.229	.9676
1.38	.7483	2.055	1.242	.9630
1.40	.7397	2.120	1.255	.9582
1.42	.7314	2.186	1.268	.9531
1.44	.7235	2.253	1.281	.9476
1.46	.7157	2.320	1.294	.9420
1.48	.7083	2.389	1.307	.9360
1.50	.7011	2.458	1.320	.9298
1.52	.6941	2.529	1.334	.9233
1.54	.6874	2.600	1.347	.9166
1.56	.6809	2.673	1.361	.9097
1.58	.6746	2.746	1.374	.9026
1.60	.6684	2.820	1.388	.8952
1.62	.6625	2.895	1.402	.8877
1.64	.6568	2.971	1.416	.8799
1.66	.6512	3.048	1.430	.8720
1.68	.6458	3.126	1.444	.8640
1.70	.6405	3.205	1.458	.8557
1.72	.6355	3.285	1.473	.8474
1.74	.6305	3.366	1.487	.8389
1.76	.6257	3.447	1.502	.8302
1.78	.6210	3.530	1.517	.8215
1.80	.6165	3.613	1.532	.8127
1.82	.6121	3.698	1.547	.8038
1.84	.6078	3.783	1.562	.7948
1.86	.6036	3.870	1.577	.7857
1.88	.5996	3.957	1.592	.7765
1.90	.5956	4.045	1.608	.7674
1.92	.5918	4.134	1.624	.7581
1.94	.5880	4.224	1.639	.7488
1.96	.5844	4.315	1.655	.7395
1.98	.5808	4.407	1.671	.7302
2.00	.5774	4.500	1.688	.7209
2.02	.5740	4.594	1.704	.7115
2.04	.5707	4.689	1.720	.7022
2.06	.5675	4.784	1.737	.6928
2.08	.5643	4.881	1.754	.6835
2.10	.5613	4.978	1.770	.6742
2.12	.5583	5.077	1.787	.6649
2.14	.5554	5.176	1.805	.6557
2.16	.5525	5.277	1.822	.6464
2.18	.5498	5.378	1.839	.6373
2.20	.5471	5.480	1.857	.6281
2.22	.5444	5.583	1.875	.6191
2.24	.5418	5.687	1.892	.6100
2.26	.5393	5.792	1.910	.6011
2.28	.5368	5.898	1.929	.5921

Tabla D.2 Flujo de choque normal (*continuación*)

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
2.30	.5344	6.005	1.947	.5833
2.32	.5321	6.113	1.965	.5745
2.34	.5297	6.222	1.984	.5658
2.36	.5275	6.331	2.002	.5572
2.38	.5253	6.442	2.021	.5486
2.40	.5231	6.553	2.040	.5401
2.42	.5210	6.666	2.059	.5317
2.44	.5189	6.779	2.079	.5234
2.46	.5169	6.894	2.098	.5152
2.48	.5149	7.009	2.118	.5071
2.50	.5130	7.125	2.138	.4990
2.52	.5111	7.242	2.157	.4991
2.54	.5092	7.360	2.177	.4832
2.56	.5074	7.479	2.198	.4754
2.58	.5056	7.599	2.218	.4677
2.60	.5039	7.720	2.238	.4601
2.62	.5022	7.842	2.259	.4526
2.64	.5005	7.965	2.280	.4452
2.66	.4988	8.088	2.301	.4379
2.68	.4972	8.213	2.322	.4307
2.70	.4956	8.338	2.343	.4236
2.72	.4941	8.465	2.364	.4166
2.74	.4926	8.592	2.386	.4097
2.76	.4911	8.721	2.407	.4028
2.78	.4896	8.850	2.429	.3961
2.80	.4882	8.980	2.451	.3895
2.82	.4868	9.111	2.473	.3829
2.84	.4854	9.243	2.496	.3765
2.86	.4840	9.376	2.518	.3701
2.88	.4827	9.510	2.540	.3639
2.90	.4814	9.645	2.563	.3577
2.92	.4801	9.781	2.586	.3517
2.94	.4788	9.918	2.609	.3457
2.96	.4776	10.06	2.632	.3398
2.98	.4764	10.19	2.656	.3340
3.00	.4752	10.33	2.679	.3283
3.02	.4740	10.47	2.703	.3327
3.04	.4729	10.62	2.726	.3172
3.06	.4717	10.76	2.750	.3118
3.08	.4706	10.90	2.774	.3065
3.10	.4695	11.05	2.799	.3012
3.12	.4685	11.19	2.823	.2960
3.14	.4674	11.34	2.848	.2910
3.16	.4664	11.48	2.872	.2860
3.18	.4654	11.63	2.897	.2811
3.20	.4643	11.78	2.922	.2762
3.22	.4634	11.93	2.947	.2715
3.24	.4624	12.08	2.972	.2668
3.26	.4614	12.23	2.998	.2622
3.28	.4605	12.38	3.023	.2577

Tabla D.2 Flujo de choque normal (*continuación*)

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
3.30	.4596	12.54	3.049	.2533
3.32	.4587	12.69	3.075	.2489
3.34	.4578	12.85	3.101	.2446
3.36	.4569	13.00	3.127	.2404
3.38	.4560	13.16	3.154	.2363
3.40	.4552	13.32	3.180	.2322
3.42	.4544	13.48	3.207	.2382
3.44	.4535	13.64	3.234	.2243
3.46	.4527	13.80	3.261	.2205
3.48	.4519	13.96	3.288	.2167
3.50	.4512	14.13	3.315	.2129
3.52	.4504	14.29	3.343	.2093
3.54	.4496	14.45	3.370	.2057
3.56	.4489	14.62	3.398	.2022
3.58	.4481	14.79	3.426	.1987
3.60	.4474	14.95	3.454	.1953
3.62	.4467	15.12	3.482	.1920
3.64	.4460	15.29	3.510	.1887
3.66	.4453	15.46	3.539	.1855
3.68	.4446	15.63	3.568	.1823
3.70	.4439	15.81	3.596	.1792
3.72	.4433	15.98	3.625	.1761
3.74	.4426	16.15	3.654	.1731
3.76	.4420	16.33	3.684	.1702
3.78	.4414	16.50	3.713	.1673
3.80	.4407	16.68	3.743	.1645
3.82	.4401	16.86	3.772	.1617
3.84	.4395	17.04	3.802	.1589
3.86	.4389	17.22	3.832	.1563
3.88	.4383	17.40	3.863	.1536
3.90	.4377	17.58	3.893	.1510
3.92	.4372	17.76	3.923	.1485
3.94	.4366	17.94	3.954	.1460
3.96	.4360	18.13	3.985	.1435
3.98	.4355	18.31	4.016	.1411
4.00	.4350	18.50	4.047	.1388
4.02	.4344	18.69	4.078	.1364
4.04	.4339	18.88	4.110	.1342
4.06	.4334	19.06	4.141	.1319
4.08	.4329	19.25	4.173	.1297
4.10	.4324	19.45	4.205	.1276
4.12	.4319	19.64	4.237	.1254
4.14	.4314	19.83	4.269	.1234
4.16	.4309	20.02	4.301	.1213
4.18	.4304	20.22	4.334	.1193
4.20	.4299	20.41	4.367	.1173
4.22	.4295	20.61	4.399	.1154
4.24	.4290	20.81	4.432	.1135
4.26	.4286	21.01	4.466	.1116
4.28	.4281	21.20	4.499	.1098

Tabla D.2 Flujo de choque normal (*continuación*)

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
4.30	.4277	21.41	4.532	.1080
4.32	.4272	21.61	4.566	.1062
4.34	.4268	21.81	4.600	.1045
4.36	.4264	22.01	4.633	.1028
4.38	.4260	22.22	4.668	.1011
4.40	.4255	22.42	4.702	$.9948^{-1}$
4.42	.4251	22.63	4.736	$.9787^{-1}$
4.44	.4247	22.83	4.771	$.9628^{-1}$
4.46	.4243	23.04	4.805	$.9473^{-1}$
4.48	.4239	23.25	4.840	$.9320^{-1}$
4.50	.4236	23.46	4.875	$.9170^{-1}$
4.52	.4232	23.67	4.910	$.9022^{-1}$
4.54	.4228	23.88	4.946	$.8878^{-1}$
4.56	.4224	24.09	4.981	$.8735^{-1}$
4.58	.4220	24.31	5.017	$.8596^{-1}$
4.60	.4217	24.52	5.052	$.8459^{-1}$
4.62	.4213	24.74	5.088	$.8324^{-1}$
4.64	.4210	24.95	5.124	$.8192^{-1}$
4.66	.4206	25.17	5.160	$.8062^{-1}$
4.68	.4203	25.39	5.197	$.7934^{-1}$
4.70	.4199	25.61	5.233	$.7809^{-1}$
4.72	.4196	25.82	5.270	$.7685^{-1}$
4.74	.4192	26.05	5.307	$.7564^{-1}$
4.76	.4189	26.27	5.344	$.7445^{-1}$
4.78	.4186	26.49	5.381	$.7329^{-1}$
4.80	.4183	26.71	5.418	$.7214^{-1}$
4.82	.4179	26.94	5.456	$.7101^{-1}$
4.84	.4176	27.16	5.494	$.6991^{-1}$
4.86	.4173	27.39	5.531	$.6882^{-1}$
4.88	.4170	27.62	5.569	$.6775^{-1}$
4.90	.4167	27.85	5.607	$.6670^{-1}$
4.92	.4164	28.07	5.646	$.6567^{-1}$
4.94	.4161	28.30	5.684	$.6465^{-1}$
4.96	.4158	28.54	5.723	$.6366^{-1}$
4.98	.4155	28.77	5.761	$.6268^{-1}$
5.00	.4152	29.00	5.800	$.6172^{-1}$
6.00	.4042	41.83	7.941	$.2965^{-1}$
7.00	.3974	57.00	10.469	$.1535^{-1}$
8.00	.3929	74.50	13.387	$.0849^{-1}$
9.00	.3898	94.33	16.693	$.0496^{-1}$
10.00	.3875	116.50	20.388	$.0304^{-1}$
∞	.3780	∞	∞	0

Tabla D.3 Función de Prandtl-Meyer

M	θ	μ	M	θ	μ
1.00	0	90.00	2.02	26.929	29.67
1.02	.1257	78.64	2.04	27.476	29.35
1.04	.3510	74.06	2.06	28.020	29.04
1.06	.6367	70.63	2.08	28.560	28.74
1.08	.9680	67.81	2.10	29.097	28.44
1.10	1.336	65.38	2.12	29.631	28.14
1.12	1.735	63.23	2.14	30.161	27.86
1.14	2.160	61.31	2.16	30.689	27.58
1.16	2.607	59.55	2.18	31.212	27.30
1.18	3.074	57.94	2.20	31.732	27.04
1.20	3.558	56.44	2.22	32.250	26.77
1.22	4.057	55.05	2.24	32.763	26.51
1.24	4.569	53.75	2.26	33.273	26.26
1.26	5.093	52.53	2.28	33.780	26.01
1.28	5.627	51.38	2.30	34.283	25.77
1.30	6.170	50.28	2.32	34.783	25.53
1.32	6.721	49.25	2.34	35.279	25.30
1.34	7.280	48.27	2.36	35.771	25.07
1.36	7.844	47.33	2.38	36.261	24.85
1.38	8.413	46.44	2.40	36.746	24.62
1.40	8.987	45.58	2.42	37.229	24.41
1.42	9.565	44.77	2.44	37.708	24.19
1.44	10.146	43.98	2.46	38.183	23.99
1.46	10.731	43.23	2.48	38.655	23.78
1.48	11.317	42.51	2.50	39.124	23.58
1.50	11.905	41.81	2.52	39.589	23.38
1.52	12.495	41.14	2.54	40.050	23.18
1.54	13.086	40.49	2.56	40.509	22.99
1.56	13.677	39.87	2.58	40.963	22.81
1.58	14.269	39.27	2.60	41.415	22.62
1.60	14.861	38.68	2.62	41.863	22.44
1.62	15.452	38.12	2.64	42.307	22.26
1.64	16.043	37.57	2.66	42.749	22.08
1.66	16.633	37.04	2.68	43.187	21.91
1.68	17.222	36.53	2.70	43.621	21.74
1.70	17.810	36.03	2.72	44.053	21.57
1.72	18.397	35.55	2.74	44.481	21.41
1.74	18.981	35.08	2.76	44.906	21.24
1.76	19.565	34.62	2.78	45.327	21.08
1.78	20.146	34.18	2.80	45.746	20.92
1.80	20.725	33.75	2.82	46.161	20.77
1.82	21.302	33.33	2.84	46.573	20.62
1.84	21.877	32.92	2.86	46.982	20.47
1.86	22.449	32.52	2.88	47.388	20.32
1.88	23.019	32.13	2.90	47.790	20.17
1.90	23.586	31.76	2.92	48.190	20.03
1.92	24.151	31.39	2.94	48.586	19.89
1.94	24.712	31.03	2.96	48.980	19.75
1.96	25.271	30.68	2.98	49.370	19.61
1.98	25.827	30.33	3.00	49.757	19.47
2.00	26.380	30.00	3.02	50.142	19.34

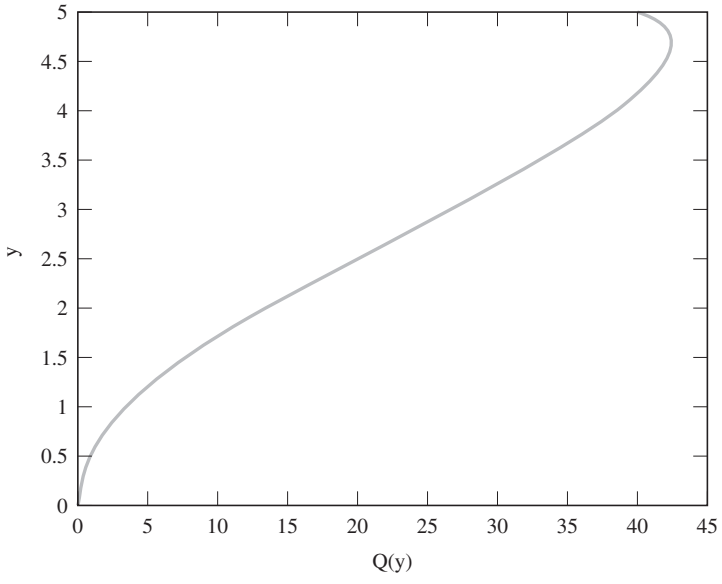
Tabla D.3 Función de Prandtl-Meyer (*continuación*)

M	θ	μ	M	θ	μ
3.04	50.523	19.20	4.04	66.309	14.33
3.06	50.902	19.07	4.06	66.569	14.26
3.08	51.277	18.95	4.08	66.826	14.19
3.10	51.560	18.82	4.10	67.082	14.12
3.12	52.020	18.69	4.12	67.336	14.05
3.14	52.386	18.57	4.14	67.588	13.98
3.16	52.751	18.45	4.16	67.838	13.91
3.18	53.112	18.33	4.18	68.087	13.84
3.20	53.470	18.21	4.20	68.333	13.77
3.22	53.826	18.09	4.22	68.578	13.71
3.24	54.179	17.98	4.24	68.821	13.64
3.26	54.529	17.86	4.26	69.053	13.58
3.28	54.877	17.75	4.28	69.302	13.51
3.30	55.222	17.64	4.30	69.541	13.45
3.32	55.564	17.53	4.32	69.777	13.38
3.34	55.904	17.42	4.34	70.012	13.32
3.36	56.241	17.31	4.36	70.245	13.26
3.38	56.576	17.21	4.38	70.476	13.20
3.40	56.907	17.10	4.40	70.706	13.14
3.42	57.237	17.00	4.42	70.934	13.08
3.44	57.564	16.90	4.44	71.161	13.02
3.46	57.888	16.80	4.46	71.386	12.96
3.48	58.210	16.70	4.48	71.610	12.90
3.50	58.530	16.60	4.50	71.832	12.84
3.52	58.847	16.51	4.52	72.052	12.78
3.54	59.162	16.41	4.54	72.271	12.73
3.56	59.474	16.31	4.56	72.489	12.67
3.58	59.784	16.22	4.58	72.705	12.61
3.60	60.091	16.13	4.60	72.919	12.56
3.62	60.397	16.04	4.62	73.132	12.50
3.64	60.700	15.95	4.64	73.344	12.45
3.66	61.000	15.86	4.66	73.554	12.39
3.68	61.299	15.77	4.68	73.763	12.34
3.70	61.595	15.68	4.70	73.970	12.28
3.72	61.899	15.59	4.72	74.176	12.23
3.74	62.181	15.51	4.74	74.381	12.18
3.76	62.471	15.42	4.76	74.584	12.13
3.78	62.758	15.34	4.78	74.786	12.08
3.80	63.044	15.26	4.80	74.986	12.03
3.82	63.327	15.18	4.82	75.186	11.97
3.84	63.608	15.10	4.84	75.383	11.92
3.86	63.887	15.02	4.86	75.580	11.87
3.88	64.164	14.94	4.88	75.775	11.83
3.90	64.440	14.86	4.90	75.969	11.78
3.92	64.713	14.78	4.92	76.162	11.73
3.94	64.983	14.70	4.94	76.353	11.68
3.96	65.253	14.63	4.96	76.544	11.63
3.98	65.520	14.55	4.98	76.732	11.58
4.00	65.785	14.48	5.00	76.920	11.54
4.02	66.048	14.40			

E. SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL CAPÍTULO 10

```
clear;
% ingresar diámetro, coeficiente de Manning y pendiente del canal
d=5;
n=0.013;
so=0.0005;
c1-1.0;

%Establecer intervalo e incrementos de y
y=0.01:.01:d;

%Definir funciones geométricas
alpha=acos(1-2*y/d);
A=d^2/4*(alpha-sen(alpha).*cos(alpha));
R=A./P;

%Definir función de descarga, es decir, ecuación de Manning
Q=c1/n*A.*R.^(2/3)*sqrt(so);

%Graficar y contra Q
Plot(Q, y);
xlabel('Q(y)');
ylabel('y');
```

(a) Algoritmos



(b) Soluciones

Fig. E.1 Ejemplo 10.2 usando MATLAB®

Ingrese pendiente lateral, ancho de fondo, descarga, profundidad crítica, profundidad corriente arriba y constante gravitacional:

$m := 2.5$ $b := 0$ $Q := 20$

$y_c := 1.67$ $y_1 := 0.75$ $g := 9.81$

Defina la función de cantidad de movimiento:

$$M(y) := \frac{y^2}{6}\cdot(2\cdot m\cdot y + 3\cdot b) + \frac{Q^2}{g\cdot(b\cdot y + m\cdot y^2)}$$

Encuentre la raíz de M(y) dentro de los límites $y_c < y < 3y_c$:

$$y_2 := \text{root}(M(y) - M(y_1), y, y_c, 3\cdot y_c)$$

Por tanto, la solución es $y_2 = 3.218$

Fig. E.2 Solución con Mathcad del ejemplo 10.11

```
clear;
%Ingresar pendiente lateral, ancho de fondo, descarga,
%profundidad crítica, profundidad corriente arriba y
%constante gravitacional
m=2.5;
b=0;
q=20;
yc=1.67;
y1=0.75;
g=9.81;

%Establecer límites superior e inferior apropiados
y=yc:.001:3*yc;

%Al reducir la ecuación 10.5.16 con F=0 se obtiene
f=y.^3+19.58./y.^2-35.23;

%Calcular el valor de y donde f cruza por cero
[s,t]=min(abs(f));
y2=y(t)
```

Fig. E.3 Algoritmo utilizado con MATLAB® para resolver el ejemplo 10.11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Profundidad [m]	Residuo					
3		Crítica	0.865	1.08665E–06					
4									
5		Normal	1.292	1.81248E–06					
6									
7									
8	Estación	y [m]	A [m^2]	V [m/s]	E [m]	y_m [m]	$S(y_m)$	Δx [m]	x [m]
9	1	0.865	8.358	2.632	1.218				2000
10	2	0.950	9.381	2.345	1.230	0.908	2.165E–03	–8	1992
11	3	1.050	10.631	2.069	1.268	1.000	1.527E–03	–41	1951
12	4	1.150	11.931	1.844	1.323	1.100	1.081E–03	–114	1837
13	5	1.250	13.281	1.656	1.390	1.200	7.866E–04	–357	1480
14	6	1.270	13.557	1.623	1.404	1.260	6.574E–04	–250	1230
15									

(a) Solución

	B	C	D
2		Depth [m]	Residual
3	Critical	0.86479527789122	=22^2*(7.5+2*2.5*C3)/(9.81*(7.5*C3+2.5*C3^2)^3)–1
4			
5	Normal	1.29156940192658	=22*0.015*(7.5+2*C5*SQRT(1+2.5^2))^0.6667/((7.5*C5+2.5*C5^2)^1.6667*SQRT(0.0006))–1

	A	B	C	D	E	F
8	Station	y [m]	A [m^2]	V [m/s]	E [m]	y_m [m]
9	1	0.865	=7.5*B9+B9^2*2.5	=22/C9	=B9+D9^2/(2*9.81)	
10	2	0.95	=7.5*B10+B10^2*2.5	=22/C10	=B10+D10^2/(2*9.81)	=0.5*(B9+B10)
11	3	1.05	=7.5*B11+B11^2*2.5	=22/C11	=B11+D11^2/(2*9.81)	=0.5*(B10+B11)
12	4	1.15	=7.5*B12+B12^2*2.5	=22/C12	=B12+D12^2/(2*9.81)	=0.5*(B11+B12)
13	5	1.25	=7.5*B13+B13^2*2.5	=22/C13	=B13+D13^2/(2*9.81)	=0.5*(B12+B13)
14	6	1.27	=7.5*B14+B14^2*2.5	=22/C14	=B14+D14^2/(2*9.81)	=0.5*(B13+B14)

	G	H	I
8	$S(y_m)$	Δx [m]	x [m]
9			2000
10	=22^2*0.015^2*(7.5*F10+F10^2*2.5)^–3.3333*((7.5+2*F10*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E10–E9)/(0.0006–G10)	=I9+H10
11	=22^2*0.015^2*(7.5*F11+F11^2*2.5)^–3.3333*((7.5+2*F11*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E11–E10)/(0.0006–G11)	=I10+H11
12	=22^2*0.015^2*(7.5*F12+F12^2*2.5)^–3.3333*((7.5+2*F12*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E12–E11)/(0.0006–G12)	=I11+H12
13	=22^2*0.015^2*(7.5*F13+F13^2*2.5)^–3.3333*((7.5+2*F13*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E13–E12)/(0.0006–G13)	=I12+H13
14	=22^2*0.015^2*(7.5*F14+F14^2*2.5)^–3.3333*((7.5+2*F14*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E14–E13)/(0.0006–G14)	=I13+H14

(b) Fórmulas de hoja de cálculo

Fig. E.4 Ejemplo 10.15 resuelto empleando Excel®

```
clear;
%Ingresar datos
Q=22;
M=2.5;
b=7.5;
L=2000;
So=0.0006;
n=0.015;
g=9.81;

%Establecer intervalo e incrementos de y
y=0.01:.001:5;

%Definir funciones
A=b*y+M*y.^2;
B=b+2*M*y;
P=b+2*y*sqrt(1+M^2);
S=Q^2*n^2./(A.^3.3333.*P.^-1.3333);
Fr=sqrt(Q^2*B./(g*A.^3));

%Calcular los valores de y donde (s-So) y (Fr-1) cruzan por cero
[s,t]=min(abs(S-So));
yN=y(t)
[s,t]=min(abs(Fr-1));
yc=y(t)

%Restablecer intervalo e incrementos de y para pasar de
%profundidades crítica a normal
clear y;
dy=0.1;
y=yc:dy:yN

%Calcular energía específica en los nuevos valores de y
A=b*y+M*y.^2;
E=y+Q^2./(2*g*A.^2)

%Calcular ubicaciones x de acuerdo con la ecuación 10.7.6
ym=(y(2:5)+y(1:4))/2;
A_Ym=b*ym+M*ym.^2);
P_ym=b+2*ym*sqrt(1+M^2);
S_ym=Q^2*n^2./(A_ym.^(10/3).*P_ym.^(-4/3));

x(1)=L;
for i=2:5;
   x(i)=x(i-1)+(E(i)-E(i-1))/(S0-S_ym(i-1));
end;
```

Fig. E.5 Ejemplo 10.15 resuelto con MATLAB® (a) Algoritmo

```
YN =

     1.2920

yc =

     0.8650

Y =

    0.8650       0.9650     1.0650     1.1650     1.2650

E =

    1.2181       1.2346     1.2756     1.3326     1.4006

x =

  1.0e+003 *

    2.0000.      1.9890     1.9406     1.8076     1.3591
```

(b) Solución

Fig. E.5 Ejemplo 10.15 resuelto con MATLAB® (b) Solución

Tabla E.1 Función de flujo variado,[a] ecuación 10.7.11

	N				N		
u	$2^1/_2$	3	$3^1/_3$	u	$2^1/_2$	3	$3^1/_3$
0.00	0.000	0.000	0.000	0.82	1.057	0.993	0.963
0.02	0.020	0.020	0.020	0.83	1.083	1.016	0.985
0.04	0.040	0.040	0.040	0.84	1.110	1.040	1.007
0.06	0.060	0.060	0.060	0.85	1.139	1.065	1.030
0.08	0.080	0.080	0.080	0.86	1.171	1.092	1.055
0.10	0.100	0.100	0.100	0.87	1.205	1.120	1.081
0.12	0.120	0.120	0.120	0.88	1.241	1.151	1.109
0.14	0.140	0.140	0.140	0.89	1.279	1.183	1.139
0.16	0.161	0.160	0.160	0.90	1.319	1.218	1.172
0.18	0.181	0.180	0.180	0.91	1.362	1.257	1.206
0.20	0.201	0.200	0.200	0.92	1.400	1.300	1.246
0.22	0.222	0.221	0.220	0.93	1.455	1.348	1.290
0.24	0.243	0.241	0.240	0.94	1.520	1.403	1.340
0.26	0.263	0.261	0.261	0.950	1.605	1.467	1.398
0.28	0.284	0.282	0.281	0.960	1.703	1.545	1.468
0.30	0.305	0.302	0.301	0.970	1.823	1.644	1.559
0.32	0.326	0.323	0.322	0.975	1.899	1.707	1.615
0.34	0.347	0.343	0.342	0.980	1.996	1.783	1.684
0.36	0.368	0.364	0.363	0.985	2.111	1.880	1.772
0.38	0.391	0.385	0.383	0.990	2.273	2.017	1.895
0.40	0.413	0.407	0.404	0.995	2.550	2.250	2.106
0.42	0.435	0.428	0.425	0.999	3.195	2.788	2.590
0.44	0.458	0.450	0.447	1.000	∞	∞	∞
0.46	0.481	0.472	0.469	1.001	2.786	2.184	1.907
0.48	0.504	0.494	0.490	1.005	2.144	1.649	1.425
0.50	0.528	0.517	0.512	1.010	1.867	1.419	1.218
0.52	0.553	0.540	0.535	1.015	1.705	1.286	1.099
0.54	0.578	0.563	0.557	1.020	1.602	1.191	1.014
0.56	0.604	0.587	0.580	1.03	1.436	1.060	0.896
0.58	0.631	0.612	0.604	1.04	1.321	0.967	0.813
0.60	0.658	0.637	0.628	1.05	1.242	0.896	0.749
0.61	0.673	0.650	0.641	1.06	1.166	0.838	0.697
0.62	0.686	0.663	0.653	1.07	1.111	0.790	0.651
0.63	0.700	0.676	0.666	1.08	1.059	0.749	0.618
0.64	0.716	0.690	0.679	1.09	1.012	0.713	0.586
0.65	0.731	0.703	0.692	0.10	0.973	0.681	0.558
0.66	0.746	0.717	0.705	1.11	0.939	0.652	0.532
0.67	0.762	0.731	0.718	1.12	0.907	0.626	0.509
0.68	0.777	0.746	0.732	1.13	0.878	0.602	0.488
0.69	0.795	0.761	0.746	1.14	0.851	0.581	0.479
0.70	0.811	0.776	0.760	1.15	0.824	0.561	0.452
0.71	0.828	0.791	0.775	1.16	0.802	0.542	0.436
0.72	0.845	0.807	0.790	1.17	0.782	0.525	0.421
0.73	0.863	0.823	0.805	1.18	0.760	0.509	0.406
0.74	0.881	0.840	0.821	1.19	0.740	0.494	0.393
0.75	0.900	0.857	0.837	1.20	0.723	0.480	0.381
0.76	0.919	0.874	0.853	1.22	0.692	0.454	0.358
0.77	0.940	0.892	0.870	1.24	0.662	0.431	0.338
0.78	0.962	0.911	0.887	1.26	0.633	0.410	0.320
0.79	0.985	0.930	0.905	1.28	0.609	0.391	0.303
0.80	1.008	0.950	0.924	1.30	0.587	0.373	0.289
0.81	1.032	0.971	0.943	1.32	0.568	0.357	0.275

Tabla E.1 Función de flujo variado,[a] ecuación 10.7.11 (*continuación*)

		N				*N*	
u	$2^1/_2$	3	$3^1/_3$	*u*	$2^1/_2$	3	$3^1/_3$
1.34	0.549	0.342	0.262	2.20	0.220	0.107	0.071
1.36	0.531	0.329	0.251	2.3	0.204	0.098	0.064
1.38	0.513	0.316	0.239	2.4	0.190	0.089	0.057
1.40	0.496	0.304	0.229	2.5	0.179	0.082	0.052
1.42	0.481	0.293	0.220	2.6	0.169	0.076	0.048
1.44	0.467	0.282	0.211	2.7	0.160	0.070	0.043
1.46	0.455	0.272	0.203	2.8	0.150	0.065	0.040
1.48	0.444	0.263	0.196	2.9	0.142	0.060	0.037
1.50	0.432	0.255	0.188	3.0	0.135	0.056	0.034
1.55	0.405	0.235	0.172	3.5	0.106	0.041	0.024
1.60	0.380	0.218	0.158	4.0	0.087	0.031	0.017
1.65	0.359	0.203	0.145	4.5	0.072	0.025	0.013
1.70	0.340	0.189	0.135	5.0	0.062	0.019	0.010
1.75	0.322	0.177	0.125	6.0	0.048	0.014	0.007
1.80	0.308	0.166	0.116	7.0	0.038	0.010	0.005
1.85	0.293	0.156	0.108	8.0	0.031	0.008	0.004
1.90	0.279	0.147	0.102	9.0	0.027	0.006	0.003
1.95	0.268	0.139	0.095	10.0	0.022	0.005	0.002
2.00	0.257	0.132	0.089	20.0	0.015	0.002	0.001
2.10	0.238	0.119	0.079				

[a] $F(u, N) = \int_0^u du/(1 - u^N)$, con constante de integración ajustada de modo que $F(0, N) = 0$ y $F(\infty, N) = 0$.

Fuente: Henderson, 1966.

F. SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL CAPÍTULO 11

Datos dados:

$$L := \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.075 \\ 0.085 \end{pmatrix} \quad e := \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0.0002 \\ 0.0001 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q_T := 0.02 \quad g := 9.81 \quad v := 1.10^{-6}$$

Defina funciones para coeficiente de resistencia:

$$R(e, D, Q, L, K, C) := \frac{1.07 \cdot L}{g \cdot D^5} \cdot \left[\ln\left[0.27 \cdot \frac{e}{D} + C \cdot 5.74 \cdot \left(\frac{\pi \cdot v \cdot D}{4 \cdot Q} \right)^{0.9} \right] \right]^{-2} + \frac{K}{2 \cdot g \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)^2}$$

Estime valores iniciales de incógnitas:

$$W := Q_T^2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{\sqrt{R(e_i, D_i, Q_T, L_i, K_i, 0)}} \right)^{-2}$$

$$i := 0..2 \quad Qi := \sqrt{\frac{W}{R(e_i, D_i, Q_T, L_i, K_i, 1)}}$$

Resuelva sistema de ecuaciones:

Dados $\quad W = Q_T^2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{\sqrt{R(e_i, D_i, Q_T, L_i, K_i, 1)}} \right)^{-2} \quad Q_T = \sum_{i=0}^{2} Qi$

$$\text{Encuentre } (W, Q_0, Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} 7.858 \\ 3.122 \times 10^{-3} \\ 7.274 \times 10^{-3} \\ 9.604 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Fig. F.1 Solución del ejemplo 11.3 con Mathcad

$$L := \begin{pmatrix} 500 \\ 750 \\ 1000 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.13 \end{pmatrix} \qquad f := \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.020 \\ 0.018 \end{pmatrix}$$

$$H := \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad K := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad g := 9.81$$

Coeficientes de resistencia:

$$i := 0..2 \qquad R_i := \frac{8 \cdot (f_i \cdot L_i + D_i \cdot K_i)}{g \cdot \pi^2 \cdot (D_i)^5}$$

Estime valores iniciales de incógnitas:

$$Q := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix} \qquad H_J := 14$$

Despeje incógnitas:

Dados

$$H_J - H_0 = R_0 \cdot Q_0 \cdot |Q_0| \qquad H_J - H_2 = R_2 \cdot Q_2 \cdot |Q_2|$$

$$H_1 - H_J = R_1 \cdot Q_1 \cdot |Q_1| \qquad Q_0 - Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\text{Encuentre } (H_J, Q_0, Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} 15.182 \\ 9.812 \times 10^{-3} \\ 1{,}701 \times 10^{-2} \\ 7.201 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Fig. F.2 Solución del ejemplo 11.4 con Mathcad

(a)

```
clear;
%Datos dados
global H R;
L=[500 750 1000];
D=[0.10 0.15 0.13];
f=[0.025 0.020 0.018];
K=[3 2 7];
H=[5 20 13];
g=9.81;

%Evaluar longitudes equivalentes y coeficientes
de resistencia
Le=D.*k./f;
R=8*f.*(L+Le)./(g*pi^2*D.^5);

%Estimaciones iniciales de incógnitas x0=[HB Q1 Q2 Q3]
x0=[14 0.01 0.01 0.01];

%Invocar archivo de función f.m y despejar las incógnitas
options=optimset ('precondbandwidth',Inf);
[x, fval] = fsolve('f', x0, options);
x
```

(b)

```
%Definir cada función como f(x)=0

function F = f(x);
global H R;

F = [x(1) - H(1) - R(1)*x(2)*abs(x(2));
     H(2) - x(1) - R(2)*x(3)*abs(x(3));
     x(1) - H(3) - R(3)*x(4)*abs(x(4));
     x(2) - x(3) + x(4)];
```

(c)

```
>> ex11_4

Optimización completada con éxito:
 Valor de la función relativa cambiando en menos de
OPTIONS.TolFun
x =


   15.1818  0.0098  0.0170  0.0072
```

Fig. F.3 Solución del ejemplo 11.4 con MATLAB® : (a) algoritmo principal, (b) subrutina de función, (c) salida. Observe que se requiere la herramienta de optimización (Optimization Toolbox).

Datos dados:

$L_1 := 50$ $D_1 := 0.15$ $f_1 := 0.02$ $K_1 := 2$ $H_1 := 10$

$L_2 := 100$ $D_2 := 0.10$ $f_2 := 0.015$ $K_2 := 1$ $H_2 := 30$

$L_3 := 300$ $D_3 := 0.10$ $f_3 := 0.025$ $K_3 := 1$ $H_3 := 15$

$g := 9.81$ $P := 20 \cdot 10^3$

Longitudes equivalentes:

$$Leq_2 := \frac{D_2 \cdot K_2}{f_2} \qquad Leq_1 := \frac{D_1 \cdot K_1}{f_1} \qquad Leq_3 := \frac{D_3 \cdot K_3}{f_3}$$

Coeficientes de resistencia:

$$R_1 := \frac{8 \cdot f_1 \cdot (L_1 + Leq1)}{g \cdot \pi^2 \cdot D_1^5} \quad R_2 := \frac{8 \cdot f_2 \cdot (L_2 + Leq_2)}{g \cdot \pi^2 \cdot D_2^5} \quad R_3 := \frac{8 \cdot f_3 \cdot (L_3 + Leq_3)}{g \cdot \pi^2 \cdot D_3^5}$$

Estimaciones iniciales de incógnitas:

$$Q_1 := 0.05 \qquad Q_2 := 0.05 \qquad Q_3 := 0.05 \qquad H_B := 20$$

Despeje incógnitas:

Dados

$$H_1 + \frac{P}{9800 \cdot Q_1} - H_B = R_1 \cdot Q_1 \cdot |Q_1| \qquad H_B - H_3 = R_3 \cdot Q_3 \cdot |Q_3|$$

$$H_B - H_2 = R_2 \cdot Q_2 \cdot |Q_2| \qquad Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$\text{Encuentra} \quad (HB, Q_1, Q_2, Q_3) = \begin{pmatrix} 43.845 \\ 0.054 \\ 0.032 \\ 0.021 \end{pmatrix}$$

Fig. F.4 Solución del ejemplo 11.5 con Mathcad

(a)

```
clear;
%Datos dados
global H R P;
L=[50 100 300];
D=[0.15 0.10 0.10];
f=[0.020 0.015 0.025];
K=[2 1 1];
H=[10 30 15];
g=9.81;
p=20000;

%Evaluar longitudes equivalentes y coeficientes de
resistencia
Le=D.*k./f;
R=8*f.*(L+Le)./(g*pi^2*D.^5);

%Estimaciones iniciales de incógnitas x0=[HB Q1 Q2 Q3]
x0=[20 0.05 0.05 0.05];

%Invocar archivo de función g.m y despejar incógnitas
options=optimset ('precondbandwidth', Inf);
[x, fval] = fsolve('g', x0, options);
x
```

(b)

```
%Definir cada función como g(x)=0

function G = g(x);
global H R P;

G = [H(1) + p/(9800*x(2)) - x(1) - R(1)*x(2)*abs(x(2));
     x(1) - H(2) - R(2)*x(3)*abs(x(3));
     x(1) - H(3) - R(3)*x(4)*abs(x(4));
     x(2) - x(3) - x(4)];
```

(c)

```
>> ex11_5
Optimización completada con éxito:
 Valor de función relativa cambiando en menos de
OPTIONS.TolFun

x =


   43.8449  0.0538  0.0324  0.0214
```

Fig. F.5 Solución del ejemplo 11.5 con MATLAB®: (a) algoritmo principal, (b) subrutina función, (c) salida. Observe que se requiere la herramienta de optimización (Optimization Toolbox).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1					Iteración 1			Iteración 2			Iteración 3			Iteration 4		
2																
3			R	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q
4																
5		ΔH			20.000			20.000			20.000			20.000		
6		Tubo 4	100	–0.020	–0.040	4.000	–0.022	–0.051	4.495	–0.019	–0.038	3.899	–0.020	–0.039	3.968	–0.019
7	Bucle 1	Tubo 3	200	–0.060	–0.720	24.000	–0.064	–0.809	25.440	–0.062	–0.770	24.817	–0.063	–0.787	25.098	–0.062
8		Tubo 2	500	–0.130	–8.450	130.000	–0.137	–9.433	137.352	–0.133	–8.907	133.466	–0.135	–9.150	135.276	–0.134
9		Tubo 1	100	–0.320	–10.240	64.000	–0.322	–10.399	64.495	–0.319	–10.208	63.899	–0.320	–10.230	63.968	–0.319
10																
11					0.550	222.000		–0.691	231.783		0.078	226.081		–0.206	228.309	
12																
13					ΔQ =	–2.48E–03		ΔQ =	2.98E–03		ΔQ =	–3.44E–04		ΔQ =	9.03E–04	
14																
15																
16		Tubo 2	500	0.130	8.450	130.000	0.137	9.433	137.352	0.133	8.907	133.466	0.135	9.150	135.276	0.134
17	Bucle 2	Tubo 8	300	0.070	1.470	42.000	0.074	1.632	44.251	0.071	1.530	42.853	0.073	1.578	43.519	0.072
18		Tubo 7	400	–0.040	–0.640	32.000	–0.035	–0.494	28.101	–0.036	–0.519	28.823	–0.035	–0.478	27.650	–0.035
19		Tubo 6	300	–0.190	–10.830	114.000	–0.185	–10.281	111.075	–0.186	–10.382	111.617	–0.185	–10.219	110.738	–0.185
20																
21					–1.550	318.000		0.290	320.779		–0.464	316.759		0.031	317.183	
22																
23					ΔQ =	4.87E–03		ΔQ =	–9.03E–04		ΔQ =	1.47E–03		ΔQ =	–9.83E–05	
24																
25																
26		Tubo 3	200	0.060	0.720	24.000	0.064	0.809	25.440	0.062	0.770	24.817	0.063	0.787	25.098	0.062
27	Bucle 2	Tubo 5	400	0.040	0.640	32.000	0.041	0.676	32.898	0.043	0.724	34.039	0.043	0.736	34.325	0.043
28		Tubo 8	300	–0.070	–1.470	42.000	–0.074	–1.632	44.251	–0.071	–1.530	42.853	–0.073	–1.578	43.519	–0.072
29																
30					–0.110	98.000		–0.146	102.589		–0.036	101.710		–0.054	102.941	
31																
32					ΔQ =	1.12E–03		ΔQ =	1.43E–03		ΔQ =	3.57E–04		ΔQ =	5.29E–04	

Fig. F.6 Ejemplo 11.6 usando Excel® (a) Solución

	A	B	C	D	E	F	G
1					Iteración 1		
2							
3			R	Q	RQ|Q|	2R|Q|	Q
4							
5		ΔH			20		
6		Tubo 4	100	–0.02	=C6*D6*ABS(D6)	=2*C6*ABS(D6)	=D6+F13
7	Bucle 1	Tubo 3	200	–0.06	=C7*D7*ABS(D7)	=2*C7*ABS(D7)	=D7+F13–F32
8		Tubo 2	500	–0.13	=C8*D8*ABS(D8)	=2*C8*ABS(D8)	=D8+F13–F23
9		Tubo 1	100	–0.32	=C9*D9*ABS(D9)	=2*C9*ABS(D9)	=D9+F13
10							
11					=SUM(E5:E9)	=SUM(F6:F9)	
12							
13						ΔQ = =–E11/F11	
14							
15							
16		Tubo 2	500	0.13	=C16*D16*ABS(D16)	=2*C16*ABS(D16)	=D16+F23–F13
17	Bucle 2	Tubo 8	300	0.07	=C17*D17*ABS(D17)	=2*C17*ABS(D17)	=D17+F23–F32
18		Tubo 7	400	–0.04	=C18*D18*ABS(D18)	=2*C18*ABS(D18)	=D18+F23
19		Tubo 6	300	–0.19	=C19*D19*ABS(D19)	=2*C19*ABS(D19)	=D19+F23
20							
21					=SUM(E16:E19)	=SUM(F15:F19)	
22							
23						ΔQ = =–E21/F21	
24							
25							
26		Tubo 3	200	0.06	=C26*D26*ABS(D26)	=2*C26*ABS(D26)	=D26+F32–F13
27	Bucle 2	Tubo 5	400	0.04	=C27*D27*ABS(D27)	=2*C27*ABS(D27)	=D27+F32
28		Tubo 8	300	–0.07	=C28*D28*ABS(D28)	=2*C28*ABS(D28)	=D28+F32–F23
29							
30					=SUM(E26:E28)	=SUM(F26:F28)	
31							
32						ΔQ = =–E30/F30	

Fig. F.6 (continuación) Ejemplo 11.6 usando Excel® (b) Fórmulas de hoja de cálculo

Datos dados:

$$R_1 := 100 \quad R_3 := 400 \quad R_5 := 400 \quad R_7 := 400 \qquad H_A := 50 \quad QF := 0.15$$
$$R_2 := 500 \quad R_4 := 100 \quad R_6 := 300 \quad R_8 := 300 \qquad H_B := 30 \quad QG := 0.15$$

Estimaciones iniciales de incógnitas:

$$\begin{array}{lllll} Q_1 := 0.50 & Q_4 := 0.50 & Q_7 := 0.50 & H_C := 35 & H_F := 35 \\ Q_2 := 0.50 & Q_5 := 0.50 & Q_8 := 0.50 & H_D := 35 & H_G := 35 \\ Q_3 := 0.50 & Q_6 := 0.50 & & H_E := 35 & \end{array}$$

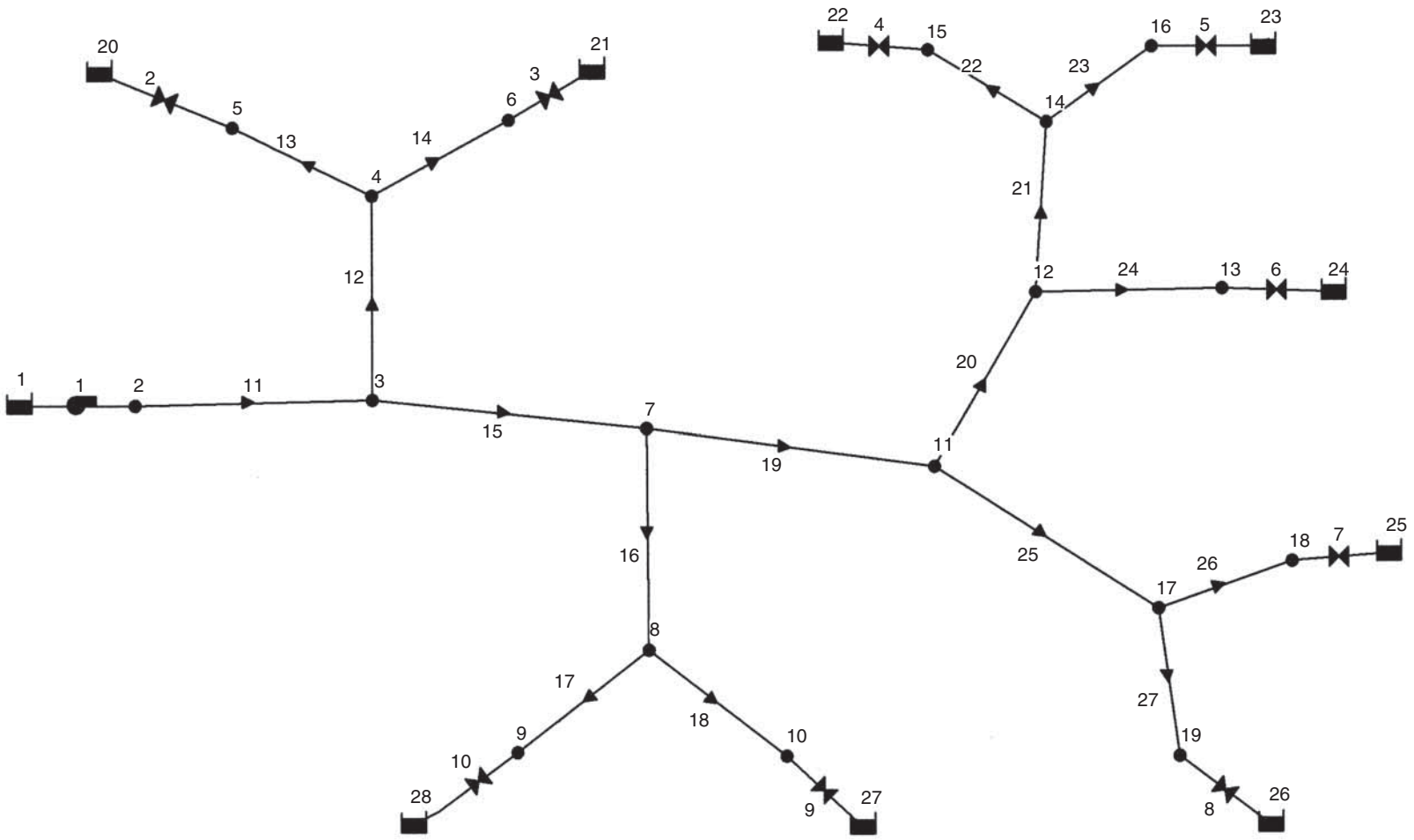
Despeje incógnitas:

Dados

$$\begin{array}{lll} H_A - H_C = R_1 \cdot Q_1 \cdot |Q_1| & H_E - H_G = R_5 \cdot Q_5 \cdot |Q_5| & Q_1 = Q_2 + Q_6 \\ H_C - H_D = R_2 \cdot Q_2 \cdot |Q_2| & H_C - H_F = R_6 \cdot Q_6 \cdot |Q_6| & Q_2 = Q_3 + Q_8 \\ H_D - H_E = R_3 \cdot Q_3 \cdot |Q_3| & H_F - H_G = R_7 \cdot Q_7 \cdot |Q_7| & Q_3 = Q_4 + Q_5 \\ H_E - H_B = R_4 \cdot Q_4 \cdot |Q_4| & H_D - H_G = R_8 \cdot Q_8 \cdot |Q_8| & Q_6 = Q_7 + Q_F \\ & & Q_7 + Q_8 + Q_5 = Q_G \end{array}$$

$$\text{Encuentre } (H_C, H_D, H_F, H_G, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8) = \begin{pmatrix} 39.862 \\ 30.814 \\ 30.034 \\ 29.717 \\ 29.257 \\ 0.318 \\ 0.135 \\ 0.062 \\ 0.018 \\ 0.044 \\ 0.184 \\ 0.034 \\ 0.072 \end{pmatrix}$$

Fig. F.7 Solución del ejemplo 11.6 con Mathcad



(a) Mapa de la red

Fig. F.8 Figura 11.7a solución con EPANET 2

Enlace - Tabla de nodos:

ID de enlace	Nodo inicial	Nodo final	Longitud m	Diámetro mm	
11	2	3	195	100	
12	3	4	158	50	
13	4	5	115	50	
14	4	6	155	50	
15	3	7	188	100	
16	7	8	117	100	
17	8	9	59	50	
18	8	10	82	50	
19	7	11	130	100	
20	11	12	102	100	
21	12	14	78	100	
22	14	15	55	50	
23	14	16	60	50	
24	12	13	114	50	
25	11	17	165	100	
26	17	18	64	50	
27	17	19	127	50	
1	1	2	#N/D	#N/D	Bomba
2	5	20	#N/D	50	Válvula
3	6	21	#N/D	50	Válvula
4	15	22	#N/D	50	Válvula
5	16	23	#N/D	50	Válvula
6	13	24	#N/D	50	Válvula
7	18	25	#N/D	50	Válvula
8	19	26	#N/D	50	Válvula
9	10	27	#N/D	50	Válvula
10	9	28	#N/D	50	Válvula

(b) Resultados calculados

Resultados en nodos:

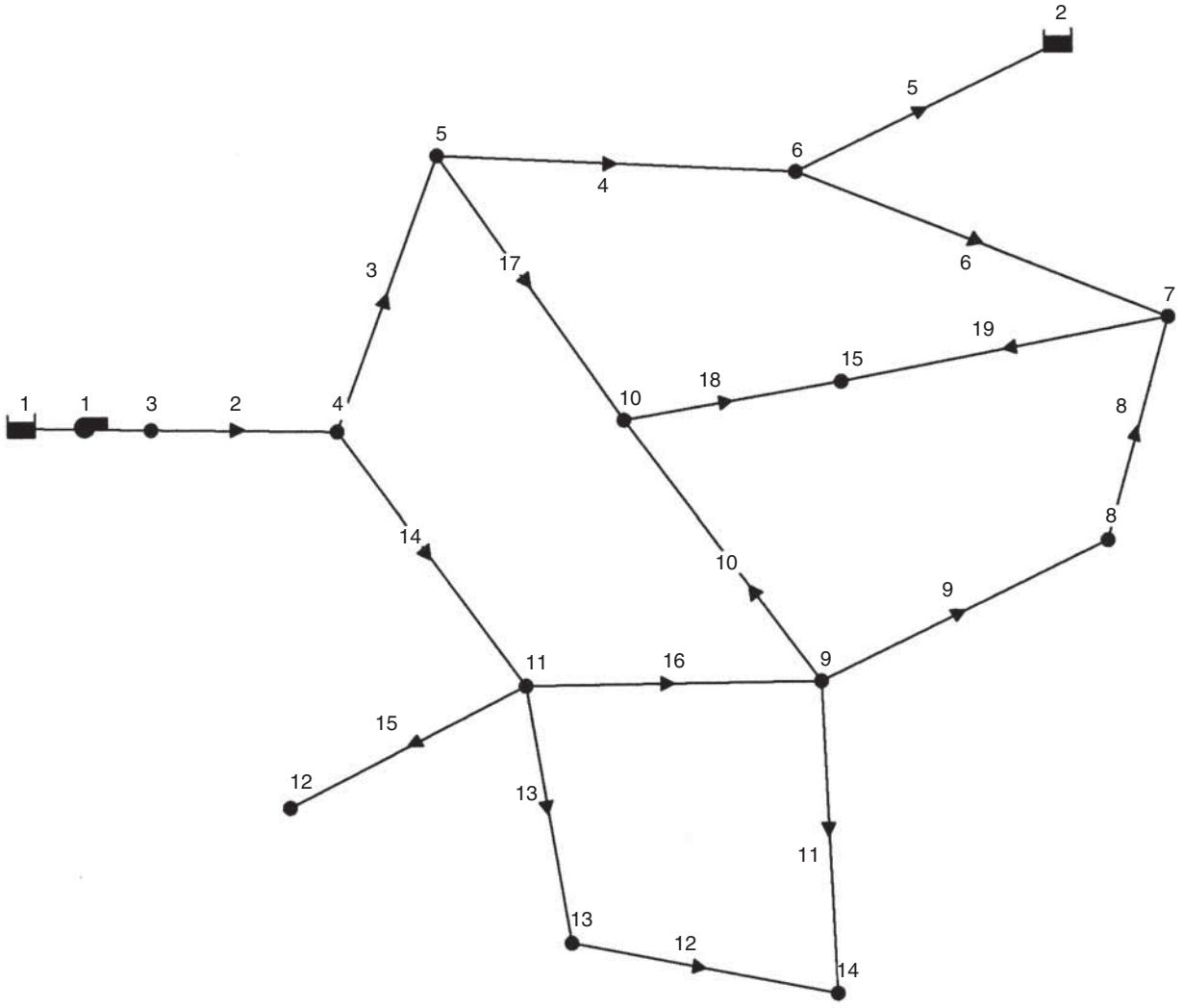
ID de nodo	Demanda LPS	Carga m	Presión m	Calidad	
2	0.00	135.85	105.85	0.00	
3	0.00	89.79	57.79	0.00	
4	0.00	47.59	12.59	0.00	
5	0.00	40.02	3.02	0.00	
6	0.00	36.36	3.36	0.00	
7	0.00	58.08	28.08	0.00	
8	0.00	53.37	26.37	0.00	
9	0.00	37.67	13.67	0.00	
10	0.00	36.41	10.41	0.00	
11	0.00	49.22	22.22	0.00	
12	0.00	47.26	14.26	0.00	
13	0.00	38.55	3.55	0.00	
14	0.00	46.56	6.56	0.00	
15	0.00	42.98	2.98	0.00	
16	0.00	41.74	3.74	0.00	
17	0.00	46.01	20.01	0.00	
18	0.00	34.75	8.75	0.00	
19	0.00	30.07	6.07	0.00	
1	-38.91	30.00	0.00	0.00	Depósito
20	3.15	37.00	0.00	0.00	Depósito
21	3.32	33.00	0.00	0.00	Depósito
22	3.13	40.00	0.00	0.00	Depósito
23	3.51	38.00	0.00	0.00	Depósito
24	3.42	35.00	0.00	0.00	Depósito
25	5.36	26.00	0.00	0.00	Depósito
26	4.47	24.00	0.00	0.00	Depósito
27	5.85	26.00	0.00	0.00	Depósito
28	6.70	24.00	0.00	0.00	Depósito

Fig. F.8 (a) Resultados calculados (*continuación*)

Resultados de enlaces:

ID de enlace	Flujo LPS	Velocidad m/s	Pérdida de carga m/km	Estado
11	38.91	4.96	236.24	Abierto
12	6.47	3.30	267.05	Abierto
13	3.15	1.61	65.81	Abierto
14	3.32	1.69	72.49	Abierto
15	32.44	4.13	168.65	Abierto
16	12.55	1.60	40.21	Abierto
17	6.70	3.42	266.15	Abierto
18	5.85	2.98	206.84	Abierto
19	19.89	2.53	68.13	Abierto
20	10.06	1.28	19.27	Abierto
21	6.64	0.85	8.94	Abierto
22	3.13	1.60	65.00	Abierto
23	3.51	1.79	80.23	Abierto
24	3.42	1.74	76.36	Abierto
25	9.83	1.25	19.45	Abierto
26	5.36	2.73	176.01	Abierto
27	4.47	2.28	125.52	Abierto
1	38.91	0.00	−105.85	Bomba abierta
2	3.15	1.61	3.02	Válvula activa
3	3.32	1.69	3.36	Válvula activa
4	3.13	1.60	2.98	Válvula activa
5	3.51	1.79	3.74	Válvula activa
6	3.42	1.74	3.55	Válvula activa
7	5.36	2.73	8.75	Válvula activa
8	4.47	2.28	6.07	Válvula activa
9	5.85	2.98	10.41	Válvula activa
10	6.70	3.42	13.67	Válvula activa

(b) Resultados calculados (*continuación*)



(a) Mapa de la red

Fig. F.9 Figura 11.7b solución con EPANET 2

Enlace – Tabla de nodos:

ID del enlace	Nodo inicial	Nodo final	Longitud m	Diámetro mm
2	3	4	3000	600
3	4	5	1520	450
4	5	6	1520	400
5	6	2	305	150
6	6	7	1680	350
8	7	8	1070	300
9	8	9	1680	350
10	9	10	1680	300
11	9	14	1380	300
12	14	13	760	150
13	13	11	1100	300
14	11	4	2000	450
15	11	12	1200	400
16	9	11	670	380
17	10	5	1520	350
18	10	15	900	350
19	15	7	1200	350
1	1	3	#N/D	#N/D Bomba

(b) Resultados calculados

Resultados en nodos:

ID del nodo	Demanda LPS	Carga m	Presión m	Calidad	
3	0.00	192.15	177.15	0.00	
4	0.00	155.46	109.49	0.00	
5	140.00	132.55	83.55	0.00	
6	0.00	126.03	76.03	0.00	
7	100.00	122.64	73.64	0.00	
8	100.00	123.04	77.04	0.00	
9	0.00	130.00	87.00	0.00	
10	140.00	124.13	80.13	0.00	
11	0.00	136.56	92.56	0.00	
12	55.00	136.02	96.02	0.00	
13	55.00	133.12	92.12	0.00	
14	55.00	128.61	88.61	0.00	
15	85.00	122.59	76.59	0.00	
1	-823.11	15.00	0.00	0.00	Depósito
2	93.11	61.00	0.00	0.00	Depósito

Resultados de enlaces:

ID del enlace	Flujo LPS	Velocidad m/s	Pérdida de carga m/km	Estado
2	823.11	2.91	12.22	Abierto
3	460.26	2.90	15.10	Abierto
4	177.63	1.41	4.29	Abierto
5	93.11	5.27	213.20	Abierto
6	84.52	0.88	2.01	Abierto
8	-22.87	0.32	0.37	Abierto
9	-122.87	1.28	4.15	Abierto
10	74.98	1.06	3.50	Abierto
11	39.19	0.55	1.01	Abierto
12	-15.81	0.89	5.94	Abierto
13	-70.81	1.00	3.13	Abierto
14	-362.85	2.28	9.46	Abierto
15	55.00	0.44	0.45	Abierto
16	-237.04	2.09	9.80	Abierto
17	-142.63	1.48	5.54	Abierto
18	77.61	0.81	1.71	Abierto
19	-7.39	0.10	0.05	Abierto
1	823.11	0.00	-177.15	Bomba abierta

Fig. F.9 (b) Resultados calculados (*continuación*)

Bibliografía

REFERENCIAS

Adrian, R. J., "Multi-point Optical Measurements of Simultaneous Vectors in Unsteady Flow–A Review", *Int. J. Heat Fluid* Flow, Vol. 7, Núm. 2, junio 1986.

Bakhmeteff, B. A., *Hydraulics of Open Channels*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1932.

Bean, H. S., ed., *Fluid Meters: Their Theory and Application*, 6a. ed., American Society of Mechanical Engineers, Nueva York, 1971.

Benedict, R. P., *Fundamentals of Pipe Flow*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1980.

Chapra, S. C. y Canale, R. P., *Numerical Methods for Engineers*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1998.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.

Coleman, Hugh W. y Steele, W. Glenn, JR, *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*, 2a., ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1998.

Croos, H., "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors," *University of Illinois Bulletin 286*, noviembre de 1936.

Goldstein, R. J., ed., *Fluid Mechanics Measurements*, 2a. ed., Taylor and Francis, Washington, DC, 1996.

HEC-RAS River Analysis System, Hydrologic Engineering Center, U.S. Army Corps of Engineers, Davis, CA, julio de 1995.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1966.

Karassik, I. J., Messina, J. P., Cooper, P., Heald, C. C., eds., *Pump Handbook*, 3a. ed., McGraw-Hill Professional Publishing, 2000.

King, H. W. y Brater, E. F., *Handbook of Hydraulics*, 7a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1996.

Kline, S. J., ed., Proceedings of the Symposium on Uncertainty Analysis. *J. Fluids Eng.,* Vol. 107, Núm. 2, junio de 1985, pp. 153-178.

MARTIN, C. S., "Experimental Investigation of Column Separation with Rapid Valve Closure", *Proceedings, 4th International Conference on Pressure Surges*, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, Inglaterra, 1983, pp. 77-88.

MCBEAN, E. A. y PERKINS, F. E., "Convergence Schemes in Water Profile Computation", *J. Hydraulics Div.*, *ASCE*, Vol. 101, Núm. HY10, octubre de 1975, pp. 1380-1384.

ORMSBEE, L. E. y WOOD, D. J., "Hydraulic Design Algorithms for Pipe Networks," *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 112, Núm. 12, diciembre de 1986, pp. 1195-1207.

ROBERSON, J. A., CASSIDY, J. J. y CHAUDHRY, M. H., *Hydraulic Engineering*, Houghton Mifflin Company, Boston, MA, 1988.

ROBERSON, J. A., y CROWE, C. T., *Engineering Fluid Mechanics*, 6a. ed., John Wiley & Sons, 1997.

ROSSMAN, L. A., *EPANETZ Users Manual*, United States Environmental Protection Agency, junio de 2000.

STEPANOFF, A. J., *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.

SWAMME, P. K. y JAIN, A. K., "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems", *J. Hydraulics Div., ASCE*, Vol. 102, Núm. HY5, mayo de 1976, pp. 657-664.

TAYLOR, G. I., "Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube", *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 219A, 1953, pp. 186-203.

U.S. DEPARTMENT OF INTERIOR, BUREAU OF RECLAMATION, *Design of Small Dams*, U.S. Government Printing Office, Washington DC, 1974.

VAN DYKE, M., *An Album of Fluid Motion*, Prentice-Hall Press, Stanford, CA, 1982.

WARNICK, C. C., *Hydropower Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.

WOOD, D. J., "Algorithms for Pipe Network Analysis and Their Reliability", *Research Report 127*, Water Resources Research Institute, University of Kentucky, Lexington, KY, 1981.

WYLIE, E. B. y STREETER, V. L., *Fluid Transients in Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

INTERÉS GENERAL

DAILY, J. W. y HARLEMAN, D. R. F., *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1968.

ESKINAZI, S., *Principles of Fluid Mechanics*, 2a. ed., Allyn and Bacon, Inc., Needham Heights, MA, 1968.

FOX, R. W. y MCDONALD, A. T., *Introduction to Fluid Mechanics*, 4a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1992.

FUNG, Y. C., *Continuum Mechanics*, 2a. ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1977.

HANSON, A. G., *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1967.

JOHN, E. A. J., *Gas Dynamics*, Allyn and Bacon, Inc., Needham Heights, MA, 1969.

MUNSON, B. R., YOUNG, D. F. y OKIISHI, T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1994.

OWCZAREK, J. A., *Introduction to Fluid Mechanics*, International Textbook Company, Scranton, PA, 1968.

Potter, M. C. y Foss, J. F., *Fluid Mechanics*, Great Lakes Press, Okemos, MI, 1979.
Roberson, J. A. y Crowe, C. T., *Engineering Fluid Mechanics*, 6a. ed., Houghton-Mifflin Company, Boston, MA, 1996.
Sabersky, R. H., Acosta, A. J. y Hauptman, E. G., *Fluid Flow*, 5a. ed., Macmillan Publishing Company, Nueva York, 2001.
Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 8a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2000.
Shames., I., *Mechanics of Fluids*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1992.
Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Ronald Press, Nueva York, 1953.
Streeter, V. L. y Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, 8a. ed., McGraw-Hill Company, Nueva York, 1985.
Van Wylen, G. J. y Sonntag, R. E. *Fundamentals of Classical Thermodynamics*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1976.
White, F. M., *Fluid Mechanics*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1994.
Yih, C. S., *Fluid Mechanics*, West River Press, 1988.
Yuan, S. W., *Foundations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1967.

Respuestas

Capítulo 1

1.1 C
1.2 B
1.3 A
1.4 C
1.5 C
1.6 B
1.7 D
1.8 A
1.9 D
1.10 C
1.11 C
1.12 B
1.13 D
1.16 **a)** FT^2/L^4 **c)** FL/T **e)** FT/L
1.18 **b)** m/s^2
1.20 kg/s, N/m, N
1.22 **a)** 1.26×10^8 N, **c)** 6.7×10^8 Pa **e)** 5.2×10^{-2} m^2
1.24 **a)** 5.56×10^{-5} m/s **c)** 37.3 kW **e)** 2×10^{10} N/m^2
1.26 10.06 lb
1.28 **b)** 142.2 kPa **d)** 78.8 kPa
1.30 62.8 kPa, 1.95%
1.32 −50.6 °C
1.34 2.40 N, 0.0095°
1.36 976 kg/m^3, 9560 N/m^3, −0.2%, −0.36%
1.38 **b)** 0.635 kg
1.40 28.6 N/m^3, 6.86×10^{-6} m^2/s
1.42 0.007848 N/m^2, 0.007848 N/m^2
1.44 3.2 Pa, 6.4 Pa
1.46 2.74 ft-lb, 1.04 hp
1.48 91×10^{-5} ft-lb
1.50 $E(e^{-Cy} - 1)$
1.54 899 m
1.56 **b)** 4940 fps
1.58 29.6 kPa, 59.2 kPa
1.60 8010 kPa
1.62 −0.0174 in
1.64 $\sqrt{8\sigma/\pi\rho g}$
1.66 $2\sigma\pi$D
1.68 50 °C
1.70 7.4 kPa
1.72 16.83 km
1.74 1.19 kg/m^3
1.76 9333 N
1.78 25.2 m
1.80 **a)** 19.25 m/s **c)** 16.42 m/s
1.82 69.2 °C
1.84 −101 Btu
1.86 **b)** 243 kJ
1.88 804 kPa manométrica
1.90 **b)** 266.9 m/s **d)** 1301 m/s
1.92 **b)** 2854 m

Capítulo 2

2.1 C
2.2 D
2.3 C
2.4 A
2.5 B
2.6 A
2.7 D
2.8 A
2.9 A
2.12 **a)** 25.5 m **c)** 1.874 m
2.14 **b)** 10.2 m
2.16 –5.37 psi
2.18 103 kPa
2.20 96.49 kPa, 96.44 kPa, −0.052%
2.22 **b)** 323,200 psf, 322,000 psf, −0.371%
2.24 **a)** 69.9 kPa **c)** 30.6 kPa
2.26 33.35 kPa
2.28 **a)** 680 kg/m^3, gasolina **c)** 999 kg/m^3, agua
2.30 4.51 psi
2.32 17.43 cm

2.34 15.62 kPa
2.36 14.0 kPa
2.38 17.89 kPa
2.40 5.87 kPa
2.42 0.52 kPa
2.44 **a)** 3.76 cm
2.46 4.51 cm
2.48 6934 N
2.50 29 400 N vs 28 400 N por tanto aumentará
2.52 **b)** 277.1 kN
2.54 **a)** 739.7 kN en (0, –0.167) m
c) 313.9 kN en (0.9375, –1.5) m
2.56 523 kN
2.60 3346 N
2.62 **b)** 0.6667 m
2.64 1.55 m
2.66 **b)** 799,000 ft-lb. Se volcará
2.68 616.1 kN
2.70 **a)** $F_H = 706$ kN, $F_V = 662$ kN
2.72 70.07 kN
2.74 **a)** 4580 N/m^3
2.76 **a)** 420 kN **b)** −23.4 kN
2.78 **a)** 1.372 m
2.80 4.62 in
2.82 8.804 kN
2.84 1.23×10^6 personas
2.86 **b)** 16.4 ft
2.88 **a)** 1.089 **b)** 0.01886 kg
2.90 $\gamma_x > 8369$ N/m^3 o $\gamma_x < 1435$ N/m^3
2.92 1.1
2.94 $GM = 0.277$ m. $\therefore$ estable
2.96 **a)** 99.6 kPa **c)** 17.15 psi
2.98 **b)** 4.8 m/s^2
2.100 **a)** 640 kN **b)** 1163 kN
2.102 **b)** −9 kPa, −3.11 kPa, 5.89 kPa
e) −364 psf, −234 psf, 130 psf
2.104 **a)** −40.5 kPa, −34.6 kPa, 5.89 kPa
c) −947 psf, −817 psf, 130 psf
2.106 **a)** 8149 Pa **c)** 17.4 kPa
2.108 **a)** 6670 N **c)** 9920 N

Capítulo 3

3.1 D
3.2 C
3.3 D
3.4 C
3.5 B
3.6 C
3.7 B
3.8 A
3.14 **a)** $x^2 - 2xy + y^2 = 4y$. Una parábola
3.16 Euleriano: Varios estudiantes universitarios estarían posicionados en cada intersección y las cantidades se registrarían como una función del tiempo.
3.18 **a)** $\hat{\mathbf{n}} = (2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{3}$
c) $\hat{\mathbf{n}} = (8\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{89}$
3.20 **b)** $8\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ **d)** $2\hat{\mathbf{i}} - 114\hat{\mathbf{j}} + 15\hat{\mathbf{k}}$
3.22 **a)** $-40\hat{\mathbf{i}}$ **c)** $12\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}$
3.23 **a)** rapidez de deformación $= \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3.24 **a)** (9.375, 0, 0) m/s^2
3.26 $(\partial u/\partial t)\mathbf{i}$
3.28 **b)** 1.875 m/s en $t = \infty$
3.30 -9.11×10^{-4} kg/m^3·s
3.32 0.04 kg/m^3·s
3.34 $\mathbf{a} = \partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$
3.36 $-52 \times 10^{-5}\,\hat{\mathbf{j}} + 0.0224\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2
3.38 Permanente: a, c, e, f, h. No permanente: b, d, g
3.42 **a)** inviscido **c)** inviscido
e) viscoso dentro de las capas límite y regiones separadas
g) viscoso
3.46 11 400. $\therefore$ Turbulento
3.48 **a)** Re = 795. Laminar
3.50 $x_T = 8.17$ m. Laminar
3.52 $u\partial\rho/\partial t + v\partial\rho/\partial y = 0$
3.54 **b)** 351 fps
3.56 57 m/s
3.58 **b)** $r = r_c$: $p_T = \rho U_\infty^2/2$
d) $\theta = 90°$: $p_{90} = -3\rho U_\infty^2/2$
3.60 **a)** $-50\rho(2/x + 1/x^2)$
c) $-450\rho(2/x + 1/x^2)$
3.62 9.39 m/s
3.64 **a)** 3.14 m/s **c)** 11.62 fps
3.66 12.76 m/s
3.68 **b)** 3.516 m/s, 193.6 kPa

3.70 19.82 cm
3.72 **a)** −6195 Pa **c)** −5470 Pa
3.74 **a)** 37.42 m/s, 71.4 m **c)** 121.8 fps, 231 ft
3.76 **a)** 37.4 m/s **c)** 118.6 fps
3.78 **b)** −43.3 kPa **d)** −59 Pa
3.80 Presión negativa, entonces se elevará
3.82 Alta presión
3.84 La presión más alta en *B* forzará el fluido hacia la presión más baja en *A*, causando así un flujo secundario normal al eje del tubo. Esto resulta en una pérdida relativamente alta para un codo.

Capítulo 4

4.1 B
4.2 D
4.3 A
4.4 D
4.5 A
4.6 C
4.7 B
4.8 C
4.9 D
4.10 A
4.11 A
4.12 C
4.13 D
4.14 A
4.15 A
4.16 **b)** $Q - W = 0$
4.20 **b)** Conservación de masa
d) Ecuación de energía
4.24 $-0.707\,(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}), 0.866\hat{\mathbf{i}} - 0.5\hat{\mathbf{j}}, -\hat{\mathbf{j}}$, −7.07 fps, 8.66 fps, 0
4.26 1559 cm^3
4.32 $dm_V/dt = \dot{m} - \rho Q$
4.34 15 fps, 3.97 slug/s, 2.045 ft^3/s
4.36 0.1509 m^3/s
4.38 320 m/s, 20.9 kg/s, 4.712 m^3/s, 2.512 m^3/s
4.40 **b)** 4.478 m
4.42 **a)** 5 m/s, 320 kg/s, 0.32 m^3/s
c) 7.5 m/s, 480 kg/s, 0.48 m^3/s
4.44 5.08 kg/s
4.46 0.82 kg/s
4.48 4.528 slug/s, 4.6 slug/s. $\therefore \overline{\rho V} \neq \overline{\rho}\,\overline{V}$
4.50 0.565 m
4.52 12.04 m/s
4.54 0.244 m/s
4.56 27.3 m/s
4.58 $\rho\pi[\,(d^2 - d_2^2)\dot{h}_2/4 + h_1^2\dot{h}_1 \tan^2\phi\,]$
4.60 3.99×10^{-4} kg/s
4.62 **b)** 8.84 mm/s
4.64 −14.5 kPa/s
4.66 1847 W
4.68 0.836 °C
4.70 **b)** 524 kW
4.72 7.93 ft o 1.76 ft
4.74 9.94 m/s
4.76 60.44 psi
4.78 32.1 MPa
4.80 **a)** 5.01 m^3/s
4.82 **b)** 0.485 m^3/s
4.84 $12.35 d_1^2 d_2^2 (H/(d_1^4 - d_2^4))^{1/2}$
4.86 **a)** 0.663 m
4.88 60.4 m
4.90 **a)** 0.131 m
4.92 23.5 hp
4.94 1304 kW
4.96 **a)** 299 °C
4.98 5390 kW
4.100 0.5 W
4.102 3820 W, 39.4 kPa, 416 kPa
4.104 1.85 m o 2.22 m
4.106 0.815 m
4.108 **a)** 2.00
4.110 $\dot{m}_f q_f = F_D V_\infty + \dot{m}[\,(V_2^2 - V_1^2)/2 + c_v(T_2 - T_1)\,]$
4.112 7.37×10^{-5} m^3/s
4.114 **a)** $\cong$ 0.32 m^3/s
4.116 **b)** 679 N **d)** 127 lb
4.118 **a)** 692 N **c)** 2275 N
4.120 **b)** 2280 N, 1071 N
4.122 49.6 N
4.124 618 kN
4.126 **a)** 3.2 m, 8.86 m/s
4.128 3.8 ft, 15.8 fps
4.130 4420 N

4.132 **a)** 11.46 kN **b)** 6.25 kN
4.134 **b)** 202 kg/s
4.136 147.3 kW
4.138 986 kW
4.140 **b)** 47°, 29.5°, 3.6 MW
4.142 **a)** 11.08 kN, 240 kg/s, 80 kg/s
4.144 13.33 m/s
4.146 647 hp
4.148 110 kN
4.150 1440 N, 69.9 m^3/s, 62.5%
4.152 291 hp, 186.2 slug/s
4.154 141 N
4.156 191 ft/s/ft
4.158 3780 N
4.160 **a)** 54.9 kW/m
4.164 46.9 rad/s
4.166 39.6 rad/s
4.168 $11.73(1 - e^{-31.8t})$rad/s

Capítulo 5

5.2 Vea la tabla 5.1
5.4 $\rho du/dx + u d\rho/dx = 0$
5.6 $u\partial\rho/\partial x + w\partial\rho/\partial z = 0$, $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0$
5.8 **a)** $v_r = C/r$
5.10 **a)** $3y/(0.15x + 0.5)^2$
b) $-9y/(0.15x + 0.5)^4$
5.12 $v =$ const
5.14 $-Ay$
5.16 $(10 - 0.4/r^2)\,\text{sen}\,\theta$
5.18 $(10 - 80/r^3)\cos\theta$
5.20 0.541 m/s
5.22 0.296 m/s
5.24 **a)** −0.88 m/s **b)** 2772 m/s^2
5.26 $[\,100\rho/(x^2 + y^2)^2\,]\,(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$
5.28 $(\partial p/\partial\theta)/r = -\rho v_r v_\theta/r - \rho v_r \partial v_\theta/\partial r - \rho(v_\theta/r)\partial v_\theta/\partial\theta$
5.30 $\rho(D\mathbf{V}/Dt + 2\Omega \times \mathbf{V} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + (d\Omega/dt) \times \mathbf{r}) = -\nabla p - \rho\mathbf{g}$
5.32 $252y^2x^{-9/5} - 5270y^3x^{-13/5}$, $\tau_{xy} = 5.01 \times 10^{-5}$ Pa
5.34 $-\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{V} + \mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})/3$
5.36 $-[\,(V_1 + V_2)y/h\,] + V_1$
5.38 $\partial p/\partial z = \mu[\,\partial^2 v_z/\partial r^2 + \partial v_z/\partial r)/r\,]$
5.40 $\partial p/\partial\theta = \mu[\,\partial/\partial r(r^2\partial v_\theta/\partial r)\,]/r - \mu v_\theta/r\,\text{sen}^2\theta$
5.44 $\rho\partial u/\partial t = \mu\partial^2 u/\partial y^2$
5.48 $0.3 + 10y$
5.50 $\rho D\tilde{u}/Dt = K\nabla^2 T$
5.52 $\rho Dh/Dt = K\nabla^2 T + Dp/Dt$
5.56 **a)** $\partial u/\partial t = v\partial^2 u/\partial y^2$, $\rho c\partial T/\partial t = K\partial^2 T/\partial y^2 + \mu(\partial u/\partial y)^2$

Capítulo 6

6.1 A
6.2 A
6.3 A
6.4 A
6.5 C
6.6 A
6.8 **a)** FT/L **c)** FT^2/L^4 **e)** FL
6.10 V $\ell\rho/\mu =$ const
6.12 $V = \sqrt{gH/C}$
6.14 $F_D/\rho\ell^2V^2 = f_1(d/\ell, \mu/\rho\ell V)$
6.16 $h/d = f_1(\sigma/\gamma d^2, \beta)$
6.18 $\sigma = CMy/I$
6.20 $V = \text{Const.}\sqrt{gH}$
6.22 $\Delta p/\rho V^2 = f_1(\nu/Vd, L/d, e/d)$
6.24 $Q/\sqrt{gR^5} = f_1(A/R^2, e/R, s)$
6.26 $F_D/\rho V^2 d^2 = f_1(\mu/\rho Vd, e/d, I)$
6.28 $T/\rho V^2 D^2 = \phi[\text{Re}]$
6.30 $F_D/\rho V^2 d^2 = f_1(\mu/\rho Vd, e/d, r/d, Cd^2)$
6.32 $F_L/\rho V^2 \ell_c^2 = f_1(c/V, t/\ell_c, \alpha)$
6.34 $F_D/\rho V^2 d^2 = f_1(Vd\rho/\mu, d/L, \rho/\rho_c, V/\omega d)$
6.36 $T/\rho\omega^2 d^5 = g_1(f/\omega, H/d, \ell/d, h/d)$
6.38 $d/D = f_1(V/V_j, \sigma/\rho V_j^2 D, \mu/\rho V_j D, \rho_a/\rho)$
6.40 $\mu/\rho VD = f_1(H/D, \ell/D, gD/V^2)$
6.42 $y_2/y_1 = f(gy_1/V_1^2)$
6.44 $Q_m/Q_p = V_m\ell_m^2/V_p\ell_p^2$, $(F_p)_m/(F_p)_p = \rho_m V_m^2\ell_m^2/\rho_p V_p^2\ell_p^2$, $T_m/T_p = \rho_m V_m^2\ell_m^3/\rho_p V_p^2\ell_p^3$
6.46 **a)** 160 kg/s, 15 MPa
6.48 Se recomienda escala completa
6.50 1184 N

6.52 0.0048 ft, 1.11
6.54 $\nu_m = 6.1 \times 10^{-9}$ m^2/s. ¡Imposible!
6.56 **a)** 0.00632 m^3/s **b)** 12 kN
6.58 120 kN·m
6.60 1633 kW
6.62 4.16 N, 95 hp
6.64 **b)** 186 m/s, 2080 N
6.66 **a)** 6320 rpm **b)** 2000 rpm
6.68 5 movimientos/segundo
6.70 $f\ell/V$
6.72 $g\ell/U^2$
6.74 **b)** $\dfrac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\mathrm{Re}\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \dfrac{1}{r^*}\dfrac{\partial u^*}{\partial r^*}$
6.76 $(K/\mu c_p)(\mu/\rho U\ell) = \mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Re}^{-1}$

Capítulo 7

7.1 D
7.2 A
7.3 D
7.4 D
7.5 A
7.6 B
7.7 D
7.8 B
7.9 A
7.10 B
7.11 A
7.12 C
7.14 **b)** 0.0015 m/s
7.16 Re = 700 000. Turbulento
7.18 **a)** 12.6 m **c)** 25.0 m
7.20 L_E = 7.2 m. Desarrollado
7.22 3.7 m vs 0.72 m
7.24 **a)** 20.8 m, 5.2 m
7.30 0.123°, 7.79×10^{-6} m^3/s
7.32 **b)** 1.04×10^{-4} m^3/s. Laminar
7.34 1.15×10^{-5} m^3/s, 1.2 m
7.36 0.396 psf
7.38 12.1 m/s, 3.5 Pa, 260 m
7.40 3.85×10^{-6} m^3/s
7.42 **a)** $0.707r_0$ **b)** $0.5r_0$
7.44 0.0188 ft, 0.00163 psf, 217 ft
7.46 0.462 m/s, 0.0054 Pa
7.50 **a)** 0.0274 N·s/m^2
7.52 12.1 m^3/s, 241 000, 60.4 m/s, 20.1 Pa
7.54 0.028 m^3/s, 2030
7.56 0.0556 cfs
7.58 **a)** 18.5 m/s **c)** −6.15 m/s
7.60 32 kPa/m
7.62 151 N·m
7.64 7.9 N·m
7.66 18.9 W
7.68 0.040 N·m, 12.6 W, 1650
7.70 $4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L\omega_2/(r_2^2 - r_1^2)$
7.76 $\overline{u'^2} = 51.2$ m^2/s^2, $\overline{u'v'} = 9.7$ m^2/s^2
7.78 0.146 ft^2/s, −0.118, 0.342 in
7.80 **b)** Rugoso
7.82 **b)** 0.262 m/s
7.84 8.5, 21.7 fps
7.86 −40.8 kPa/m
7.88 24.2 m/s
7.90 **a)** 1.12 m/s, 0.0127 m^3/s
7.92 **a)** 0.0143 **b)** 0.0146
7.94 **a)** 0.064 **c)** 0.034
7.96 **a)** 62 ft **c)** 42 ft
7.98 **a)** 136 kPa **c)** 20 kPa
7.100 11 200 psf
7.102 147 kPa
7.104 **b)** 0.0033 m^3/s
7.106 **b)** 0.069 kg/s
7.108 **a)** 0.032 m **c)** 0.031 m
7.110 **a)** 0.121 m **b)** 0.127 m
7.112 0.000143 m^3/s
7.114 **b)** 0.257 m^3/s
7.118 **a)** 52.6 kPa
7.120 11.7
7.122 0.0044 m^3/s
7.124 **b)** 0.011 m^3/s
7.126 1.3 min
7.128 46.1 m/s
7.130 Oscila entre flujo laminar y turbulento
7.132 117 kW, 13.0 m
7.134 251 hp, 37.9 ft
7.136 0.23 m^3/s, 190 kW
7.138 **a)** 195 kW **b)** −81 kPa **c)** 625 kPa
7.140 1.05 MW
7.142 0.170 psf
7.144 **a)** 1.64 m^3/s
7.146 **a)** 0.794 m^3/s **b)** 0.86 m^3/s
7.148 3.91 m
7.150 2.04 ft

Capítulo 8

8.1 C
8.2 C
8.3 B
8.4 B
8.5 D
8.6 C
8.7 C
8.8 D
8.10 3.78×10^{-5} m
8.14 **b)** 7.9×10^{6}. Separado
8.16 2659 N, 469 N, 2.63, 0.417
8.18 **b)** 4.58×10^{-5} N
8.20 $C_{D,\text{alto}}/C_{D,\text{bajo}} = 2.5$
8.22 $0.5, 1.46 \times 10^{5}$
8.24 **a)** 1380 N, 25.7 kN·m
8.26 36 kN
8.28 **a)** 27 fps
8.30 **a)** 10 hp
8.32 **a)** 93.6 N
8.34 \$8800
8.36 1.24 hp
8.38 **a)** 1.58 m/s **c)** 2.86 m/s
8.40 \$683
8.42 125 km/hr
8.44 8.13×10^{-5} ft, 0.24″
8.46 0.0191 m/s
8.48 3.5 hp, 0.12 hp
8.50 900 N, 60 N
8.52 3.3 N, 0.29 N
8.54 4800 N, sin cavitación
8.56 52 kN
8.58 **b)** 1.24 m/s^2
8.60 0.587
8.62 13.8 hp
8.64 38 m/s
8.66 39.9 m/s
8.68 **a)** 7.77% de aumento
8.74 **a)** $5x^2 + 10y^2$ **c)** $\sqrt{x^2 + y^2}$
8.76 $100y - 50x, 100x + 50y$
8.78 $-40\tan^{-1}y/x$
8.80 **b)** $10y + 10\tan^{-1}y/x$
c) $100 - 50(2/x + 1/x^2)$kPa
e) -12.5 m/s^2
8.82 **a)** $(-1'', 0)$ **b)** 0.119′
c) 1.257″ **d)** 27.5 fps
8.84 $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0), 0, 0$
8.86 **a)** 0.314 m
8.88 **b)** $(0, -104)$ m/s^2 **c)** 13.76 kPa
8.90 **b)** $-8\,\text{sen}\,\theta$ **c)** $58 - 32\,\text{sen}^2\theta$ kPa
d) 42.7 kN
8.92 100 rad/s, −3660 Pa
8.94 472 000 lb
8.96 (0.729, 0.481) m/s
8.98 **b)** 5.04″
8.100 **a)** 3 cm **c)** 3 cm **e)** 6 mm
8.102 $20 - 200\,\text{sen}^2(x/2)$ kPa, $20\,\text{sen}\,(x/2)$
8.104 $16/(2.67 - x), 256/(2.67 - x)^3$
8.108 **a)** $4.79\sqrt{\nu x/U_\infty}$ **b)** $0.328\mu U_\infty\sqrt{U_\infty/\nu x}$
c) $\displaystyle\int_0^\delta y\cos\left[(0.189\sqrt{U_\infty/\nu})y\right]dy$
8.110 $6.65\sqrt{\nu x/U_\infty}, 0.451\rho U_\infty^2\,\text{Re}_x^{-1/2}$, 33%, 36%
8.112 2.1 cm, 0.001 m, 0.001 m
8.114 **a)** $1.74\sqrt{\nu x/U_\infty}, 0.648\sqrt{\nu x/U_\infty}$, 1.2%, 0.62%
8.116 **a)** 0.0221 m **b)** 0.00498 Pa
c) 0.299 N **d)** 0.00391 m/s
8.118 **a)** 0.0949 m, 0.6 Pa
8.120 **a)** 0.31 lb
8.122 **a)** 235 m, 0.0618 Pa **b)** 0.151 Pa, 585 m
8.124 **a)** 0.00212 **b)** 0.229 psf
c) 8.09×10^{-5} ft **d)** 0.228 ft
8.126 163 kN, 0.89 m
8.132 **a)** 0.0124 Pa **b)** 0.0122 m
c) 0.00527 m/s **d)** 0.04 m^3/s/m
8.134 **a)** 32.1 Pa **b)** 0.0248 m **c)** 0.109 m^3/s/m
8.136 3.85 mm, 0.00127 m/s, 0.011 Pa
8.140 negativo, cero, positivo, positivo, negativo

Capítulo 9

9.10 0.0069 s
9.12 393 m
9.14 3.776 s
9.16 −0.113 fps, 0.021°F
9.18 **a)** 77.3 m/s
9.20 **a)** 0.1473 kg/s **b)** 0.1393 kg/s
9.22 **a)** 0.1472 kg/s **b)** 0.1423 kg/s
9.24 211.3 kPa absoluta, 7.29 kg/s

9.26 27.83 psia, 0.101 slug/s, 0.202 slug/s
9.28 97.45 kPa absoluta, 199.4 kPa absoluta
9.30 168 m/s, 476 m/s
9.32 0.1025 slug/s
9.34 494.2 kPa absoluta, 4.29 kPa absoluta
9.36 0.319 ft, 684 fps, 0.417 ft
9.38 129 kPa absoluta, 1004 m/s
9.40 8.16 cm
9.42 22.1 cm^2, 772 °C, 3670 kPa absoluta
9.44 1260 m/s
9.46 412 kN
9.48 **a)** 3.774 kg/m^3, 808 kPa absoluta, 2.966, 473 °C, 0.477
9.50 $(k + 1)/(k - 1)$
9.52 908 m/s, 1600 kPa absoluta, 8.33 kg/m^3
9.54 391 kPa absoluta, 448 °C
9.56 102.5 kPa abs, 0.471 kg/s, 0.302 kg/s
9.58 49.7 psia, 1020 fps, 1989 fps, 523 fps
9.60 6 cm, 9.2 cm
9.62 2.39″
9.64 **a)** 1.49, 120.4 kPa absoluta, 620 m/s
9.66 780 m/s
9.68 555 kPa absoluta, 413 kPa absoluta
9.70 39.4°, 867 m/s, −156 °C
9.72 **a)** 14.24 kPa absoluta, 26.4 kPa absoluta
9.74 0.0854, 0.010

Capítulo 10

10.2 2.86 m
10.6 **a)** 2.15 m, 23.5 m^2, 18.6 m
c) 4.15 ft, 20.9 ft^2, 11.8 ft
10.8 **a)** 0.0121 m^3/s **b)** 0.244 m
10.12 **a)** –0.17 m **c)** –0.43 m
10.14 **a)** 3.46 m **b)** 11.51 ft
10.16 **a)** 0.3 m
10.18 **a)** 5.75 m **c)** 21.5 ft
10.20 **a)** 1.00 m **c)** 1.81 m
10.22 **a)** 1.75 m **b)** 0.83 m
10.26 ≅ 0.95 m
10.28 **a)** 16 cfs
10.30 **a)** 1.03 ft × 28.8 ft
10.32 $M/by_c^2 = y^2/2y_c^2 + y_c/y$
10.34 **a)** 3.87 m, 363 N
10.36 7.03 m^3/s
10.38 **a)** 1.77 m, 0.339 m/s, 3.33 m/s
10.40 **a)** 3.43 m^3/s **b)** 0.932 m **c)** 52 kW
10.42 2.55 m, 3.38 kW
10.44 11.51 m^3/s, 0.346 m
10.46 **a)** $y_0 = 0.094$ m, $y_1 = 0.316$ m, $y_3 = 0.088$ m, $y_{cj} = 0.243$ m
10.48 $y_0 = 2.98$ m, M_3 seguido de salto hidráulico a M_2
10.50 M_3 seguido de salto hidráulico a M_1
10.52 $y_c = 1.13$ m. $y_{cj} = 1.35$ m. Un salto hidráulico ocurre corriente arriba, seguido por una curva S_1
10.54 **a)** $y_c = 1.50$ m. Un salto hidráulico entre *A* y *C*
10.56 **a)** $y_c = 0.7$ m. $y_0 = 0.99$ m. M_3 seguido por un salto hidráulico a un M_2
10.58 **a)** 20.2 m **b)** perfil A_2
10.60 15.5 m^3/s, S_3
10.62 $Q = 7.72$ m^3/s, $y_c = 0.72$ m, $y_0 = 1.17$ m, $y_{cj} = 0.41$ m. M_1 corriente arriba, M_3 corriente abajo
10.64 S_3 seguido por un salto hidráulico a S_1
10.66 **a)** 0.87 m **b)** 48 m
10.68 **a)** 721 kW **b)** 59.3 m
10.70 En $y = 2$ m, $x \cong 55$ km
10.72 3.2 m

Capítulo 11

11.2 **a)** 750 W
11.4 **a)** 1.29 ft
11.6 **a)** 0.265 m^3/s
11.8 **a)** 0.32 m^3/s
11.10 1.78 m^3/s, 0.285 m^3/s, 0.935 m^3/s, 1.07 MW
11.12 0.198 m^3/s, 0.138 m^3/s, 0.06 m^3/s
11.14 16 L/s, 7.1 L/s, 5.1 L/s, 3.8 L/s
11.16 **c)** 28.2 L/s, 10.7 L/s, 8.6 L/s, 9.1 L/s
11.18 **a)** 143 L/s, 290 L/s, 166 L/s
11.20 1.05 m^3/s, 90.8 m, 73.6 m, 810 kW
11.22 **a)** 2.27 m^3/s, 0.811 m^3/s, 0.580 m^3/s, 0.880 m^3/s
11.24 **a)** 2.28 ft **c)** 3600 gal/hr
11.26 **a)** 7400 gal/hr

11.28 2.30, 0.43, 2.73 unidades de flujo
11.30 **a)** 96, 92, 88, 82 m
b) 843, 706, 813, 804 kPa
11.32 21.6 L/s, 6.6 L/s, 28.4 L/s
11.34 2.77 m^3/s
11.36 9.3, 1.6, 7.7, 0.6, 7.1 L/s
11.38 **d)** 2.06 m^3/s
11.44 69 s
11.46 1.57 L/s, 8.03 s
11.48 **a)** 1090 m/s **b)** 590 kPa

Capítulo 12

12.2 42.1 L/s, 35.6 N, 2980 W, 7.22 m
12.4 54.1 ft, 1.31 hp
12.6 1.23 m
12.8 17.6 m, 172 kW
12.12 $\Omega_P = 1.30$, por tanto una bomba de flujo mixto
12.14 **a)** 2.27 ft, 17.8 ft, 22.7 ft, 113 hp
12.16 $\Omega_P = 0.751$, por tanto una bomba de flujo radial
12.18 La velocidad y el diámetro son 1.19 veces mayores
12.20 Flujo mixto, 0.251 m, 282 rad/s
12.22 2.75 m^3/min, 12.6 m, 7.2 kW
12.24 2.44 m^3/min, 10.0 m, 5.1 kW
12.26 $\Omega_P = 5.19$ por tanto es correcta una bomba de flujo axial
12.28 **a)** 280 m^3/h, 64 kW, 8.3 m
12.30 Tres bombas, 206 hp
12.32 **a)** 5.67 m **b)** 15.8 m
12.34 **a)** flujo radial, 9 cm, 4680 rpm **b)** 3.95 m
12.36 6.1°, 28.3 MN·m, 243 m, 360 MW
12.38 0.736 ft, 399 rpm
12.40 189 kW, Francis, 2920 rpm
12.42 4.78 m^3/s, 1.95 m, 244 mm, 3 chorros, 0.204
12.44 25.8 ft, Francis o bomba/turbina
12.46 **a)** 1.45 m **b)** 13.6 cm
12.48 9.2 MW total, dos unidades
12.50 **a)** 24.6 kW **b)** $\Omega_T = 1.65$, Francis
c) 0.3 m, 680 rpm, 26 kW

Capítulo 13

13.2 **a)** 46.8 **b)** 51.6
13.4 1.114×10^{-4} ft^3/s, 2.16×10^{-4} slug/s, 2.04 fps, laminar
13.6 0.0592 m^3/s, 7.54 m/s
13.8 **a)** 0.064 m^3/s
13.10 **a)** 0.0974 m^3/s, **c)** 3.33 cfs
13.14 0.00396, 0.50

Índice

A

Aceleración, 91-94
componente, 209
convectiva, 93
del marco de referencia, 94
en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, 96
local, 93
Aceleración angular, 94
Aceleración convectiva, 93
Aceleración de Coriolis, 94
Aceleración local, 93
Adiabático, 28
Aguaje, 504
Aire, propiedades, 744
Álabe giratorio, 635
Álabes, 166, 169
velocidad, 604
Album of Fluid Motion, 679
Algoritmo de solución, definido, 762
Algoritmo de Thomas, 709
Altitudes, 45
Altura metacéntrica GM, definición de, 64
Análisis de incertidumbre
categorías, 684
mediciones de flujo, 684-690
Análisis de redes
de tuberías, 563-576
usando software de computadora, 573-576
Análisis de regresión, medición en mecánica de fluidos, 690-693
Análisis dimensional, 237-262
ejercicios relativos a, 263-265, 651-652
frecuencia de dispersión, 359
Anemómetro
de copa, 663
de hilo caliente, 664
térmico, 666
Anemómetros, 663-664
Ángulo de deflexión, 457
Arco semicircular, líneas de corriente, 104
Área de entrada, posición, 136
Área de salida, posición, 136
Áreas, propiedades, 743
Ariete hidráulico, 19, 576, 579
Arquímedes, 61
Aspersor, 177
Atmósfera, propiedades, 739
Atmósfera estándar, 44-46
condiciones, 10
Atmósfera isotérmica, 47

B

Bernoulli, Daniel, 108
Blasius, Paul R.H., 393
Bloques deflectores, estanque de amortiguamiento, 508
Bomba centrífuga, 603
de cuatro etapas, 634
Bomba de flujo axial, 603-611
curvas de operación, 614, 622
Bomba de succión simple, 603
Bombas
de etapas múltiples, 634
en paralelo y en serie, 630-633
que satisfacen la demanda del sistema, 629-630
Bombas de flujo mixto, 603, 611-615
curvas de operación, 616, 623
Bombas de flujo radial, 602-611
curvas de operación, 611-612, 622
función de eficiencia de velocidad, y descarga específicas, 627
Borde de capa límite, 102, 385
Borlas, 678
Brazos giratorios, 177
Buckingham, Edgar, 242
Burbuja, 19-20
Burbujas
de helio, 677
de hidrógeno, 676

C

Caída de presión adimensional *vs.* velocidad adimensional, 241
Caja de bomba, 602
Calle de vórtice de Karman, 359
Cámaras, visualización de flujo, 678
Canal ancho, 285
Canal trapezoidal, ejemplo, 494, 525
Canal triangular, ejemplo, 490
Canales irregulares, 528
Cangilones Pelton, diagrama vectorial de velocidad, 642
Cantidad de movimiento y energía, ejercicios relativos a, 200-201
Cantidad de trabajo, elemento de fluido, 223
Cantidades de estancamiento, 434
Cantidades físicas, 4-8
Cantidades termodinámicas, 27
Capa de pared viscosa, 299, 397
turbulencia iniciada, 299
Capa límite, 102
aire, 387
con transición, 386
efectos viscosos, 387
ejercicios relativos a, 419-420
flujo, placa plana, 105, 390, 403
flujo real, 385
separación, 351
superficie aerodinámica, 367
superficie curva, 385
teoría de la, 385-409
transición en la separación, 353
volumen de control, 388
Capa límite laminar
ecuaciones, 402
ejercicios relativos a, 422-423
ejercicios relativos a, 421-422
en separación, 353
solución aproximada, 389-393
solución para, 405
Capas límite turbulentas, 386-387, 393-396
antes de separación, 353
ejercicios relativos a, 421-422
forma empírica, 397-402
perfil de velocidad, 398
Carcasa, 602
Carga de succión positiva neta, 617-618
curvas, 611
turbinas, 640-641
Carga hidráulica, 43, 148, 552-553
Carga hidráulica de bomba, 150
curva de descarga, 629
Carga hidráulica de diseño, 630
Carga total, 109, 148
Cauchy, Augustin L., 374
Caudal de vórtice, 383
Caudal supersónico, 430
alrededor de esquina convexa, 462
ángulos de giro grandes, 464
Caudales inviscidos internos, 110
Cavitación, 22, 111, 363-366, 627, 640
en vórtice, 363
fija, 363

turbomaquinaria, 615-619
viajera, 363
vibratoria, 363
Celeridad, 517
Centro
de flotabilidad, 64
de presión, 53
Centroides, 52-53
Choque de condensación, 455
Choque normal
ejercicios relativos a, 469-470
en aire, cambio de entropía, 445
flujo, 746-751
onda, 442-454
diagrama T-s, 447
Chorro contraído, 317
Cierre de válvula rápido, 576-584
Cilindro
ejemplo de flujo simétrico, 162
masa agregada, 366
volúmenes, 743
Cilindros giratorios, flujo laminar, 104, 288-292
Circulación, 378
Círculo, áreas, 743
Codo, flujo en un, 315
Codo horizontal en tubo, ejemplo de flujo, 160
Coeficiente
de compresibilidad, 19
de correlación, esfuerzo cortante turbulento normalizado, 297
de fricción superficial, 391, 405
de fricción superficial local, 391, 399, 405
de resistencia, 548
Coeficientes adimensionales, turbomaquinaria, 619-623
Coeficientes de pérdida, 148
expansión cónica, 315
aditamentos, 316
Coeficientes de retardo 349, 508
alrededor de cuerpos sumergidos, 352-358
de cilindros circulares de longitud finita, 355
de cilindros elípticos de longitud finita, 355
flujo alrededor de un cilindro y una esfera, 354
número de cavitación cero, cuerpos romos, 364
número de Mach, 370
objetos romos, 356
superficie hidrodinámica, 364
vs. número de Reynolds, 254
Cohete, 175
Comparaciones de Colebrook, 550
Componentes, 546
bidimensionales de esfuerzo, 211
tridimensionales de esfuerzo, 211
Compresibilidad, 18-19
ejercicios relativos a, 34
Conceptos de cantidad de movimiento
ejercicios relativos a, 535-537
en flujo en canal abierto, 500-511
Conceptos de energía
ejercicios relativos a, 532-535
en flujos en canal abierto, 486-489
Condición
de estrangulamiento, 491
sin deslizamiento, 17
Condiciones iniciales, 205
Condiciones límite, 205
efectos de la gravedad, 258-259
Conductividad térmica, 223
Conductos no circulares, pérdidas, 313
Cono, volúmenes, 743
Conservación de energía, 24, 129
Conservación de la cantidad de movimiento, 24, 129
Conservación de masa, 23, 129, 137-142
ejercicios relativos a, 182-187
Consistencia, FDE, 713
Constricción de un canal, 491-492
Controles, 517
representativos, 518
Convergencia, FD, 717
Corriente libre, 105
flujo, 349
intensidad de fluctuación, 351
Cortante viscoso, 296
Couette, 282
Cuadratura de Gauss-Legendre, 526-527
Cuerda, 350
Cuerpo romo vs. cuerpo aerodinámico, 348
Cuerpo sumergido, 61
Cuerpos sumergidos, retardo, 508
Cuña, 457
vórtice de inicio, 221
Curva altura-gasto, 499
Curva de carga hidráulica teórica, turbobombas, 607
Curva de isoeficiencia
turbina Francis, 638
turbina Pelton, 644
Curva E-y, 487-488
Curvas características
bombas que operan en paralelo, 632
bombas que operan en serie, 633
Curvas características de bomba, 194, 323
y curva de demanda de sistema, 629
Curvas de operación
adimensionales, 622
bomba de flujo axial
adimensionales, 621
comparación de ángulo de álabe, 614
bomba de flujo mezclado
adimensionales, 621
comparación de ángulo de impulso y álabe, 616
bomba de flujo radial
adimensional, 620
comparación de impulsores, 612
flujo de fluido real, 610
turbina Francis, 639
turbina Pelton, 643, 645

D

Darcy, Henri P.G., 278
Datos, registro digital de, 683-684
Deflector estacionario, 164
Deflectores, 164-175
ejemplo de flujo, 167-168
Del, 207
Densidad constante, 106
Densidad, 4, 10, 14-15
ejercicios relativos a, 33
variaciones, de flujo, 107
Depósitos linealmente acelerados, 68
Derivada material, 93
Derivada respecto al tiempo, volumen de control, 135
Derivada sustancial, 93
coordenadas de línea de corriente, 215
Derivadas espaciales
método explícito, 706
método implícito, 706
Derivadas sustantivas en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, 96
Derivar operadores de diferencia, 703
Descarga, 138, 552-553
coeficiente, 485
de diseño, 630
específica, 487
Descripciones eulerianas, 132-136
de movimiento, 88-89
Descripciones lagrangianas, 132-136
de movimiento, 88-89
Diagrama de cuerpo libre, 56-60
Diagrama de Moody, 306, 308
Difusión molecular, 720
Difusividad térmica, 225
Difusor, 433, 637
propósito, 438
Dilatantes, 17
Dimensión, 4-8
de cantidades, 240
ejercicios relativos a, 31
Dimensiones fundamentales y sus unidades, 6
Dinámica de fluidos computacional (DFC), 698-732
descrita, 700
Discretización
de dominio, 700
de ecuaciones regentes, 702-705
Distribución
de burbujas de cavitación, 617
de presión hidrostática, 479-480
Divergencia de velocidad, 207
Doblete, 379
magnitud, 378

E

Ecuación de Andrade, 17
Ecuación de Bernoulli, 107-116, 149, 240, 382-383, 495, 662, 667
ejemplo, 115
ejercicios relativos a, 121-125
Ecuación de cantidad de movimiento de componente como corriente, 428
Ecuación de cantidad de movimiento, 157-175, 500-502
ejercicios relativos a, 195-200
forma diferencial, 210

números de Mach, 444-449
región de transición, 502-503
solución numérica, 510-511
Ecuación de capa límite de Prandtl, 403
Ecuación de Chezy-Manning, 483, 485, 519, 521, 549
comparaciones, 550
Ecuación de Colebrook, 307
Ecuación de continuidad, 138, 214, 226, 754
forma diferencial, 206
números de Mach, 444-449
Ecuación de Darcy-Weisbach, 278, 309, 325, 548
Ecuación de energía, 144-156
aplicación, 149
diferencial, 223-228, 235
ecuación de Bernoulli, 115
ejercicios relativos a, 188-194
en transiciones, 490-495
flujo uniforme continuo, 149
números de Mach, 444-449
volumen de control, 318
Ecuación de Joukowsky, 580
Ecuación de Laplace, 373, 377-380
Ecuación de momento de cantidad de movimiento, 130-132, 176-178
Ecuación de Navier-Stokes, 216-218, 258-260, 275, 282, 289-290, 294, 402, 700
integración de, 283-284
solución, 276, 283, 289
superficie aerodinámica, 367
Ecuación de régimen turbulento, 307
Ecuación de Swamee-Jain, 549
comparaciones, 550
Ecuación diferencial de cantidad de movimiento, 210-222
ejercicios relativos a, 233-234
Ecuación diferencial de continuidad, 205-210
ejercicios relativos a, 231-233
Ecuación diferencial de energía, 223-228
ejercicios relativos a, 235
Ecuación general de energía, 146
Ecuación integral de Karman, 359
Ecuación integral de Von Karman, 387
ejercicios relativos a, 420
Ecuación para tubería lisa, 307
Ecuaciones constitutivas, 216
Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 374
Ecuaciones de Euler, 213-215
flujo inviscido, 224
Ecuaciones diferenciales, 294
flujos laminar y turbulento, 229
Ecuaciones diferenciales normalizadas, 258-261
ejercicios relativos a, 268-269
Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), 711
Ecuaciones diferenciales parciales (EDP), 700-701
Ecuaciones para redes generalizadas, 565-567
Efectos viscosos, 88, 111
capa límite, 387
cambios de vorticidad, 220
Eficiencia
con respecto al tamaño, 622
de bombas, 630
pérdidas, 148
Ejemplo de flujos horizontales en un codo en un tubo, 160
Elementos, 546
Elipse, áreas de, 743
En ebullición, 22
Energía crítica, 487
Energía específica, 130, 486-490
Entalpía, 27
definición de, 210
Entrada a un canal, flujo crítico, 493
Entropía, 427, 445
Envergadura, 369
Equilibrio metaestable, 455
Error de truncado, 713
Errores numéricos, FD, 718
Escalas de temperatura, 11-13
Esfera
masa agregada, 366
volúmenes, 743
Esfuerzo, 40
componentes, 211
cortante, 211
normal, 211
relaciones de gradiente de velocidad, 216
tensor, 210, 212
vector, 9, 145
Esfuerzo cortante, 9, 107, 211, 223, 287, 296
aparente, 295
componentes, 213
turbulento, 295
Esfuerzo de Reynolds, 659
Esfuerzo normal, 9, 211
Espesor
de cantidad de movimiento, 389
de desplazamiento, 389
Esquema implícito de Euler, 707
Estabilidad numérica, FD, 714-717
Estabilidad, 64-67
de cuerpo flotante, 65
ejercicios relativos a, 83
numérica, de cuerpo sumergido, 65
vertical, 64
Estación de calibración, 499
Estanque de amortiguamiento, 508
Estática de fluidos definida, 40
Estela, 347
Estratosfera, 44, 46
Euler, Leonhard, 89
Exosfera, 44
Expansión cónica, coeficientes de pérdida, 315
Expansión de la serie de Taylor, 703

F

Factor de amplificación, 716
Factor de corrección de cantidad de movimiento, 172-173
Factor de corrección de energía, 151
Factor de corrección de energía cinética, 151
ejemplo, 155
Factor de fricción, 278, 306
flujo uniforme, 325
Factor de velocidad *contra* eficiencia, turbina Pelton, 645
Flotabilidad, 61
Fluido
homogéneo, 216
isotrópico, 216
no newtoniano, 17
Fluidos de Bingham, 17
Fluidos incompresibles, estudio de, 26-27
Fluidos newtonianos isotrópicos, 239-240
Fluidos newtonianos, 17, 216
isotrópicos, 239-240
Fluidos no isotrópicos, 239-240
Flujo bidimensional, 100
Flujo crítico, 517
entrada a un canal, 493
Flujo de Couette, 284
solución numérica, 719
Flujo de entrada, 272-274
ejercicios relativos a, 330
Flujo de Poiseuille, 276-277
Flujo de salida, 112
Flujo de vapor
a través de tobera, 454-456
ejercicios relativos a, 470
Flujo de variación gradual no uniforme, 512
ejercicios relativos a, 537-543
Flujo de variación rápida (FVR), 476
Flujo desarrollado en tubo, pérdidas, 309
Flujo desarrollado, 101, 272-274
ejercicios relativos a, 330
en tubo circular, 275-280
entre placas paralelas, 281-286
Flujo en canal abierto, 477-480
conceptos de cantidad de movimiento, 500-511
conceptos de energía, 486-489
ejercicios relativos a, 343
compuerta, ecuación de energía, 149
medidores de corriente, 675
Flujo en canal rectangular abierto, ejemplo, 161
Flujo en tubo
cantidades, 277-281
desarrollado, 306-312
pérdidas, 306-312
liso, exponente, 302
pérdidas menores, 314-319
Flujo en un canal, sobre un obstáculo, 500
Flujo estrangulado, 436, 491
Flujo estratificado, 207
Flujo gradualmente variado (FGV), 476
ecuación diferencial, 512-522
notación para calcular, 521-522
Flujo hipersónico, 430
Flujo impulsado por bomba
Flujo incompresible, 106, 207, 214
en tubo inelástico, 576-577
número de Reynolds, 250-253
Flujo incompresible confinado, 251
Flujo intermitente, 105

Flujo inviscido, 101, 105, 111, 347
campo de superficie de aerodinámica, 367
capa límite, 385
interno, 110
Flujo irrotacional, 94, 372
Flujo laminar, 102
cilindros giratorios, 104
desarrollado, 272
ecuación, 286
ecuaciones diferenciales, 229
ejercicios relativos a, 330
entre cilindros giratorios, 288
ejercicios relativos a, 331-332
entre placas paralelas, 281-287
ejercicios relativos a, 332-334
en tubo, 274-281
ejercicios relativos a, 331-332
número de Reynolds, 288
velocidad, 103
Flujo másico, 138, 205
Flujo no continuo, 477
ejercicios relativos a, 599
en tuberías, 576-584
Flujo no homogéneo, 207
Flujo no uniforme, 151, 477
Flujo permanente, 89, 91, 180, 477
ejercicios relativos a, 585-598
Flujo permanente no uniforme, 151-156, 180
ecuación de cantidad de movimiento, 172-173
en canal, 478
Flujo permanente uniforme, 148-150
ecuación de cantidad de movimiento, 158-170
incompresible, 180
Flujo plano, 100, 112, 220
Flujo potencial
solución numérica de un, 723
teoría, 372-384
Flujo real, capa límite, 385
Flujo subsónico, 430
Flujo tridimensional, 100, 112
Flujo turbulento, 103
ecuaciones diferenciales, 229
ejercicios relativos a, 330, 335-336
en tubo, 292-324, 295
ejercicios relativos a, 337-339
relaciones empíricas, tubo liso, 300
transición, 274
Flujo turbulento desarrollado, categorías, 309
Flujo unidimensional, 100, 281
Flujo uniforme, 101, 477, 480
ecuación, 482-484
ejercicios relativos a, 531-532
en la dirección x, 379
profundidad asociada, 483
turbulento en canales abiertos, 325
Flujo viscoso, 101
Flujo. *Vea también* Flujos compresibles; Flujo desarrollado; Flujo con superficie libre; Flujo gradualmente variado (FGV); Flujo incompresible; Flujo inviscido; Flujo isentrópico; Flujo laminar; Flujo permanente; Flujo turbulento; Flujo uniforme
alrededor de cuerpos sumergidos, 352-367
alrededor de un cilindro circular, 354, 382
alrededor de un cilindro giratorio, 383
alrededor de un cuerpo romo, 352, 460
alrededor de una cuña, 460
alrededor de una esfera, 110, 354
bidimensional, 100
campo de, 89
ejercicios relativos a, 117-119
canal, sobre un obstáculo, 500
con cilindro externo fijo, 290-292
con variación rápida, 478
confinado, 250
confinado incompresible, 251
crítico, 493, 517
de aire, sobre cuña ejemplo, 461
de choque normal, 746-750
de corriente libre, 349
de Couette, 284
de entrada, 272-274, 330
de fluido, 100-107, 119-120, 238
de Poiseuille, 275, 277
de salida, 112
de Stokes, 346
de vapor, 455-457, 472
delante de un cilindro circular, 346
deslizante, 346
ecuaciones de, 372-377
en canales abiertos, 475-529
conceptos de cantidad de movimiento, 500-511
conceptos de energía, 486-489
en codo, 315
en sistemas de tuberías, 545-585
cantidades, 277-281
pérdidas menores, 314-319
en una dimensión, 101, 281, 477
entre cilindros concéntricos, 288
estrangulado, 436, 491
estratificado, 207
externo, 102
flujo másico, 138
función variada, 758-759
gas, 442
gasto, 138
coeficiente de turbomaquinaria, 620
tubo de hierro forjado, 318
gravedad, sistema de tubería ramal, 559
impulsado por bombas, sistema de tuberías ramales, 559
incompresible, 106, 207
intermitente, 105
interno, 271-329
mediciones, 495-499, 666-675
análisis de incertidumbre, 684-690
métodos, 499
no homogéneo, 207
no permanente, 477, 576-584
no uniforme, 477, 512
número de Reynolds
alto, 254-255, 346, 347, 359
bajo, 346
patrones en turbobombas, 604
periódico, 257
plano, 100, 112, 220
real, capa límite, 385
relaciones de fuerzas, 247
separado, 147
subsónico, 430
sumergido, ejemplos, 347
superficie aerodinámica, 368
supersónico, 430
alrededor de una esquina convexa, 462
con ángulos de giro grandes, 464
tobera de, 670, 671
coeficiente de flujo K contra número de Reynolds, 670
trabajo de, 146
tridimensional, 100, 112
válvula corrediza, 240
variaciones de densidad, 107
viscoso, 101
visualización de, 675-683
vórtice, 383
Flujos compresibles, 107, 256, 426-467
en tubo elástico, 578-584
tablas para aire, 744-752
Flujos con número de Reynolds bajo, 346
Flujos confinados, 250
Flujos de aire sobre cuña, ejemplo, 460
Flujos de fluidos, 238
clasificación, 100-107
ejercicios relativos a, 119-120
Flujos de Stokes, 346
Flujos deslizantes, 346
Flujos internos, 271-329
Flujos periódicos, 257
Flujos separados, 147
ejercicios relativos a, 410
Flujos sumergidos, ejemplos, 347
Flujos unidimensionales en superficie libre, combinaciones, 477
Fluorescencia inducida por láser (FIL), 678-679
Forma adimensional, ecuaciones diferenciales, 258
Formación de vórtices, 359-362
ejercicios relativos a, 413-414
medidor, 674-675
Formas diferenciales
derivación de, 204
leyes fundamentales, 203-230
Formas integrales de leyes fundamentales, 180
Fórmula de Blasius, 393
Fórmula de Colebrook, 550
Fórmula de Crank-Nicholson, 711
Fórmula de Gauss-Legendre, 526
Fórmula de Jain, 309
Fórmula de Rayleigh-tubo de Pitot, 454
Fórmula de Swamee, 309
Fórmulas de Adams-Bashforth, 711
Fórmulas de Adams-Mouton, 711

Fórmulas de Runge-Kutta, 712
Fotografía, 678
Fourier, Jean B.J., 223
Fricción interna, 147
Froude, William, 246
Fuente lineal, 379
Fuerza de resistencia al avance, ejemplo, 156
Fuerza de una fuente, 378, 381
Fuerza de vórtice, 378, 381
Fuerza resultante, 57
Fuerza tangencial, 9
Fuerzas, 5
  en áreas planas, 51-56
    ejercicios relativos a, 77-80
  en cambio de dirección, 150
  en compuerta rectangular, 53
  en cuerpo flotante, 62
  en cuerpo sumergido, 61
  en superficies curvas, 57-60
  en superficie plana, 53
    ejercicios relativos a, 80-83
  en tobera, 157
  vector, 9
Función analítica, 374
Función de corriente, 374
  ejercicios relativos a, 416-417
Función de disipación, 226
Función de flujo variable, 758-759
  diagrama de velocidad, cangilón Pelton, 642
  esfuerzo, 9, 145
  fuerza, 9
  volumen unitario, 134
Función de Prandtl-Meyer, 463, 749-750
Función escalar potencial, 375

G

Gas ideal
  ejercicios relativos a, 36
  propiedades, 740
  suposición, 226
Gas, 9
  flujos de, 442
  vista como medio continuo, 8-11
Geometría de un canal, 480, 482
Golpeteo, 361
Gotitas, 19-20
Gradiente
  de función escalar, 258
  de presión adversa, 351
  de presión favorable, 351
  de presión negativo, 407
  de presión positivo, 407
Gravedad
  efectos de la condición límite, 258-259
  flujo, sistema de tuberías ramales, 559
  patrón de flujo, 250
Gravedad específica, 14-15

H

Hazen-Williams
  coeficiente de, 549
  comparaciones, 550
  ecuación, 548
  valores nominales, 550
Hélice
  anemómetro, 663
  ecuación de cantidad de movimiento, 170
  flujo de fluido, 170
  sometida a cavitación, 23
  velocidad, 171
Hemisferio, volúmenes, 743
Hidráulicamente lisa, 299
Hidrómetro, 63
Holografía, 680
Homogeneidad dimensional, 238

I

Iluminación, 678
Imágenes tridimensionales, 680-681
Impulsor de flujo axial idealizado, 613
Impulsor de flujo radial idealizado, 604
Impulsores de bomba, tipos, 602-603
Impulsores de doble succión, 602
Indicadores químicos, 676-677
Integrandos, distribuciones, 204
Intensidad de turbulencia, 659
Interfases, 250
Interferometría, 681-683
Interferómetro de Mach-Zehnder, 683
Ionosfera, 44
Isentrópico, 427
  expansión
    ondas, 461-464
    vapor, 454
  flujo, 744-746
    ejercicios relativos a, 37, 467-469
    tobera, 431-442
  proceso, 28

L

Lagrange, Joseph L., 89
Laplace, Pierre S., 373
Ley de Fourier de transferencia de calor, 223, 704
Ley de un gas ideal, 427
Leyes de conservación, 23-24
Leyes fundamentales
  formas diferenciales, 203-230
  formas integrales, 180
Línea de corriente, 91, 362-363
  arco semicircular, 104
  cuerpo vs. cuerpo romo, 348
  ejercicios relativos a, 414-415
  patrón, 249
  presión, 111
Línea de trayectoria, 90
Línea de vórtice, 220
Línea fugaz, 90
Linealización de ecuaciones de energía de sistema, 567-568
Líneas de referencia de energía (EGL), 319-322
Líneas de referencia hidráulica (HGL), 319-322
Líquidos, 9
  propiedades, 740
  vista como medio continuo, 8-11
Longitud
  de entrada, 272
  de mezclado, 297
  de núcleo inviscido, 272
  viscosa, 299

M

Mach, Ernst, 106
Manómetro de Borden, 660
Manómetro de tubo en U, 48
Manómetros, 48-51, 659
  ejercicios relativos a, 73-74
Marco de referencia inercial, 94
Marcos de referencia no inerciales
  ecuación de cantidad de movimiento, 174-175
  movimiento relativo a, 94
Masa agregada, 366-367
  ejercicios relativos a, 415
Mathcad, 689-691, 693-694
  ejemplo, 527
  mediciones en mecánica de fluidos, 688
Mecánica de fluidos
  mediciones, 657-695
    ejercicios relativos a, 695-697
  parámetros adimensionales comunes, 248
  símbolos y dimensiones de cantidades, 242
Medición de la velocidad de partículas, 662
Medidor
  de codo, 671-672
  de corriente, 663
  de disco, 673-674
  de flujo acústico, 674-675
  de flujo basado en la aceleración de Coriolis, 675
  de flujo electromagnético, 673-674
  de orificio, 667, 669-671
  de oscilación, 663
Medidor venturi, 667, 671
  coeficiente de flujo K contra número de Reynolds, 670
  ejemplo, 154
Medidores
  de flujo, 666
  de presión diferencial, 666
Medio continuo, 10
Medios de medición de cantidad, 666
Método de Crank-Nicholson, 708
Método de Fourier, 715
Método de Gauss-Seidel, 724
Método de Hardy Cross, 552, 568-572
Método de integración numérica, 526
Método de los mínimos cuadrados, mediciones en mecánica de fluidos, 690-693
Método de pasos estándar, 521-525
Método elemental, 275
Método explícito, derivadas espaciales, 706
Método implícito, derivadas espaciales, 706-707

Método trapezoidal, 708
Métodos de diferencia finita (MDF), 700-730
Métodos de integración directa, 528-530
Métodos de la regla de Simpson, 526
Métodos de refracción, índice, 681-683
Micrófono de condensador, 661
Microhidráulicas, 648
  instalaciones, 647
Micromanómetro, 48, 51
Minihidráulicas, 648
  instalaciones, 647
Módulo de volumen, 429
  de elasticidad, 18-19, 581
Mol, 5
Momento inercial, 176
Momentos, 53
Moody, Lewis F., 306
Motivación, 239-240
Movimiento de un fluido, 295
  descripción, 88-99

N

n de Manning, 326
Navier, Louis M.H., 217
Nodos de referencia fijos, 563
Número de cavitación
  crítico, 364, 618
  turbinas, 640-641
Número de cavitación crítico, 618
  superficie hidrodinámica, 365
Número de cavitación de Thoma, 618
Número de Euler, 246, 248-249
Número de Froude, 246, 248-249, 257, 261, 489
  flujo en superficie libre, 252-253
  importancia de, 478-479
Número de Mach, 106, 246, 248-249, 257, 369, 427-431
  coeficiente de retardo, 370
Números de Reynolds, 104, 246-249, 257, 260, 286, 549
  alto, 254-255, 346-347, 350, 359
  bajo, 346, 362
  coeficientes de arrastre, 254, 355
  ejemplo, 310-312
  flujo incompresible, 250-253
  flujo laminar, 273
  flujo uniforme, 325
  local, 387
  separación, 352
  turbomaquinaria, 618
Número de Reynolds crítico, 104, 387
  placa plana, 105
Número de Reynolds local, 387
Número de Strouhal, 246, 248-249, 257
Número de Weber, 246, 248-249, 261
Números de Reynolds altos, 254-255, 346-347, 350, 359

O

Oleaje, 506
Oleaje positivo, 506
Onda de choque estacionaria, 444
Onda de choque oblicua, 456-460
  ejercicios relativos a, 470
Onda sonora, 428
Ondas de choque, 430, 442-449
  en toberas convergentes-divergentes, 449-453
  oblicuas, 456-461
  separadas, 460
Ondas de expansión, 461-466
  ejercicios relativos a, 471
Ondas de Mach, 430, 463-465
Operador de diferencia, 705
  derivación, pasos, 703-705
  selección, 706
Operador gradiente, 207
Operadores de diferencia, selección de, 710-712
Oscilaciones de flexión alterna, 361

P

Par de torsión, 291
Paraboloide de revolución, 70
Paralelepípedo infinitesimal, partícula de fluido, 95
Parámetros adimensionales, 239-240, 243
Parámetros adimensionales comunes, 246-247
Parámetros de flujo local, medición, 658-666
Pared lisa, 299
Partícula de un fluido, 295
  paralelepípedo infinitesimal, 95
Partícula infinitesimal de un fluido, 212
Partículas en aire, 677
Películas de aceite, 678
Pérdida de carga hidráulica, 148, 278, 285, 306
  coeficientes, 316
  expansión súbita, 163
Pérdida de sustentación, 111, 349-350
Pérdidas de energía en expansiones y contracciones, 495
Pérdidas menores
  en tuberías y conductos, 339-342
  flujo en tubo, 314-319
Pérdidas, 147
  conductos no circulares, 313
  eficiencia, 148
  en sistemas de tuberías, 339-342, 546-551
  flujo desarrollado en tubo, 306-319
  flujo en tubo, 314-319
Pérdidas por fricción
  en elementos de tuberías, 547-551
  pérdidas menores, 314
Perfil de velocidad bidimensional, 499
Perfil de velocidad turbulenta, 302
Perfil laminar, 387
Perfil parabólico, ejemplo, 173
Perfil turbulento, 387
Perfilado, 362
Perfiles de superficie, clasificación, 515
Perfiles de velocidad no uniforme, 138
Perfiles en superficie de agua, 514-517
  análisis numérico, 520
Perímetro mojado, 313, 480
Persistencia de irrotacionalidad, 220
Perturbaciones acústicas, 659-660
Perturbaciones hidrodinámicas, 659-660
Peso específico, 14-15
  ejercicios relativos a, 33
Piezómetro, 109
  ejemplo de apertura, 115
Placa plana
  número de Reynolds crítico, 105
  porción laminar, 395
Placas paralelas
  flujo estacionario y móvil, 701
Plásticos ideales, 17
Poiseuille, Jean L., 275, 277
Porción laminar, placa plana, 395
Potencia, 291
  coeficiente, turbomaquinaria, 620
  forma de ley, 393-396
  perfil de ley, 301-302
  salida, 164
    para girar un cilindro, 291
Potencial de velocidad compleja, 374
Prandtl, Ludwig, 403
Precisión, 685
Predicción de sustentación cero, 382
Presión
  caída de, 306
    vs. curvas de velocidad, 240
  carga hidráulica, 148
  coeficiente, turbomaquinaria, 620
  definida, 40
  ejercicios relativos a, 32, 73-74
  en atmósfera, 44-47
  en fluido, 41
  en líquidos en reposo, 43-44
  en un punto, 40-41
  escalas, 11-13
  factor de recuperación, 438
  fuerza, 20
  gradiente, 406-409
    ejercicios relativos a, 423
    influencia de, 408
  medición, 659
  prisma, 54
  sondas, 109
  transductor, 660-661
  variación, 41-43
    en flujo en tubo horizontal, 275
  velocidad de onda de pulso, 581
  y movimiento, 40
Presión absoluta, 11
Presión atmosférica, 45
Presión barométrica, 12
Presión cinética, 258
Presión de estancamiento, 109
Presión de vapor, 22, 111
  ejercicios relativos a, 35
Presión estática, 109
  ejemplo de carga hidráulica, 114
Presión total, 109
Presiones de salida, 441
Primera ley de la termodinámica, 24, 25, 129-130
  ejercicios relativos a, 36
Principio de Arquímedes, 61

Problema normalizado, condiciones de similitud, 261
Problemas de valor inicial (PVI), 711
Procedimiento iterativo
descargas, 556
línea de referencia hidráulica, 556
Proceso adiabático, 427
Proceso casi en equilibrio, 28
Proceso casi estático, 28
Profundidad crítica, 487
Profundidad hidráulica, 489
Profundidad normal, 483
Profundidad uniforme, 483
Profundidades alternas, 487
Profundidades conjugadas, 502
Profundidades consecuentes, 502
Promediar mediciones, 659
Promedio de tiempo, 293
líneas de corriente, 348
mecanismo, 659
perfil de velocidad, 298
Propiedad conservativa FD, 718
Propiedad de disipación FD, 719
Propiedad extensiva, 24
ilustración, 132
rapidez de cambio, 135
sistema, 131
Propiedad intensiva, 24
Propiedad transportadora FD, 719
Propiedades de un fluido, 14, 737-742
Propiedades termodinámicas, 24
Punto de estancamiento, 100, 383
Punto de operación, 323, 630

R

Radio hidráulico, 481
Rankine-Hugoniot, 469
Ranuras, 368-370
Rastrillo, 666
Razón de transferencia de calor, 144
elemento fluido, 223
Razón de transferencia de energía a través de la superficie de control debida a un cambio de temperatura, 144
Recipientes giratorios, 69-71
ejercicios relativos a, 85
Recipientes linealmente acelerados, 67-69
ejercicios relativos a, 84
Rectángulo
áreas de, 743
sección, 481, 487
vertedero de cresta afilada, 497
Régimen completamente turbulento, 307
ecuación, 307
Región de desarrollo de perfil, 272
Región de entrada
de flujo laminar, 272-273
de flujo turbulento, 273
Región de la pared, 299, 301
Región externa, 299, 301, 397
Región interna, 397
Región separada, 111, 347
Región turbulenta, 299
Registro digital, datos, 683-684
Regla de Leibniz, 502
Reglas de similitud, familia de turbomaquinaria geométricamente similar, 623-625
Relación autosimilar, 397
Relación de calores específicos, 28
Relación de Euler para turbomaquinaria, 605
Relaciones de descarga de carga hidráulica, flujo real de fluido, 610
Relaciones termodinámicas, 427
Relaciones vectoriales, 736
Reología, 9
Repetitividad, 685
Resistencia al avance, 348-350
superficies aerodinámicas, 367
ejercicios relativos a, 415-416
Respuesta dinámica, medición de, 659
Resultado de retardo cero, 382
Retardo por oleaje, 253
Retardo viscoso, 253
Reynolds, Osborne, 104
Riemann, Georg F., 374
Rotación horizontal, 69
Rotámetro, 677
Rotor, 634
Rotor de turbina Francis idealizada, 637
Rueda Pelton, 639
Rugosidad relativa, 299

S

Salto hidráulico, 161, 491, 503-510, 519
canales rectangulares horizontales, 505
traslación, 506
Salto hidráulico de traslación, 506
Salto hidráulico idealizado, 504
Schlieren, 681-683
Sección irregular, 480
Sección regular, 480
Sección T, ecuación de energía, 150
Sección transversal circular, 481
Sección transversal generalizada, 489-490
geometría, 481-482
Sección transversal trapezoidal, 486
Sección trapezoidal, 481
Segunda ley de Newton, 5, 7, 24, 107, 130, 157-175, 204, 241, 274
aplicada a una partícula de fluido, 211
Segundo coeficiente de viscosidad, 216
Semicírculo, áreas de, 743
Semielipse, áreas de, 743
Separación, 350-352
Sesgo, 684
Seudoplásticos, 17
SI (Sistema Internacional)
prefijos, 7
unidades, 5
Similitud, 237-262
condiciones, problema normalizado, 261
definida, 238
ejercicios relativos a, 263-265
Similitud cinemática, 249
Similitud dimensional, 619
ejercicios relativos a, 651-652
Similitud dinámica, 248
Similitud geométrica, 249
Síntesis de perfil, 518-520
ejemplo, 519
Sistema, 23, 128-129
a volumen de control, 133
ejercicios relativos a, 182
transformación de, 132-136, 135
curva de demanda, 323, 629
curva característica de bomba, 629
ejemplo, 131
propiedad extensiva, 131
volumen de control fijo, 133
Sistema de Análisis de Río HEC-RAS página web, 528
Sistema de tuberías ramales, 559
Sistema gravitacional británico, 5
Sistema Internacional, 5
Sistemas de tuberías, 547, 552-562
con bomba, 323
ejercicios relativos a, 340-342
flujos, 545-585
pérdidas, 546-551
Situación de flujo simplificado, 284-287
Sobrecarga, 549
Solución independiente de la red FD, 719
Sonda Pitot, 109
ejemplo, 453-454
Sonda Pitot estática, 109
medición, 662
Stokes, George, 217
Strouhal, Vincenz, 246
Supercavitación, 364
Superficie aerodinámica sin flecha, 370
Superficie curva, capa límite, 385
Superficie de control, 132
Superficie hidrodinámica, 364
Superficie libre, 43, 70, 250, 476
flujo, 250-253, 476
clasificación, 477-478
fuerza en compuerta, 159
Superficies aerodinámicas
ala en flecha, 370
alerones, 368
coeficientes de sustentación y resistencia al avance, 369
flujo inviscido, 102
sustentación y resistencia al avance, 367-372
Superficies aerodinámicas alas en flecha, 370
Superficies aerodinámicas con alerones, 369
Superficies de líquido-gas, 250
Superposición, 381-384
flujos simples, ejercicios relativos a, 417-419
Supersaturación, 455
Sustentación, 348-350
coeficiente, 349
superficie aerodinámica, 367
superficie hidrodinámica, 365
Sustentación y resistencia al avance en superficies aerodinámicas, ejercicios relativos a, 415-416

T

Temperatura, ejercicios relativos a, 32
Tensión superficial, 19-21
  ejercicios relativos a, 35
Tensor de velocidad de deformación, 96
Teorema π de Buckingham, 238, 241-245, 261
Teorema de Gauss, 204
Teorema de Kutta-Joukowsky, 384
Teorema de transporte de Reynolds, 135
Término de cantidad de trabajo, 144-146
Tobera, 433. *Vea también* Tobera convergente
  flujo isentrópico, 431-442
  propósito, 437-438
  supersónico, 434, 438
  venturi, 111
Tobera convergente, 436
Tobera convergente-divergente, 436-437
  ejemplo, 440-441
  ilustración, 450
  ondas de choque, 449-453
Tobera supersónica, 434, 438
Tobera venturi, 111
Tolva, 602
Trabajo de corte, 146
Trabajo de eje, 146
Tramos, 546
  turbinas, 634-641
    tipo Francis, 636
Tranformación lagrangiana a euleriana, 135
Transductor de presión piezoeléctrico, 661
Transductor deformimétrico, 661
Transferencia de calor, 144
Transición, 477
  capa límite, 386
  región, 387
    ecuación de cantidad de movimiento, 502-503
  zona, 307
    ecuación, 307
Trayectoria libre media, 10
Trazadores, 676-681
Triángulo, áreas, 743
Troposfera, 44
Tuberías en serie, 552
Tuberías paralelas, 555-558
Tuberías ramales, 558-562
Tubo capilar, 20
  elevación de líquido, 245, 21
Tubo de aspiración, 635
Tubo de corriente, 91
Tubo de impacto, 662
Tubo de Prandtl, 662, 665
Tubo de vórtices, 220
Tubo estático, 663
Tubo liso
  ecuación, 307
  exponente, 302
Tubo rugoso, 301
Turbina de flujo axial, 640
  tipo Kaplan, 680
Turbina de flujo cruzado, 648
Turbina de impulso tipo Pelton, 642
Turbina de impulso, 634, 641-646
  tipo Pelton, 642
Turbina espiral Francis, 636
Turbina Francis, 635
  curva de isoeficiencia, 638
  curva de operación, 639
Turbina Pelton
  curva de isoeficiencia, 644
  curva de operación, 645
  factor de velocidad contra eficiencia, 644
Turbinas, 634-649
  carga hidráulica, 150
  ejercicios relativos a, 655-657
  medidor, 672
  rotor, ejemplo de flujo, 169-170
  selección y operación, 647-649
Turbinas hidráulicas, intervalos de aplicación, 647
Turbobombas, 602-619
  ejercicios relativos a, 652-654
  en sistemas de tuberías, 628-633
Turbomaquinaria, 601-650
  análisis dimensional y similitud, 619-628
  cavitación, 615-619
  parámetros, 620
  reglas de similitud, 623-625
  teoría elemental, ejercicios relativos a, 650-651

U

Ubicación de control, 499
Umbrógrafo, 681-683
Unidades, 4-8
  ejercicios relativos a, 31
  vector volumen, 134
Unidades de bomba/turbina reversibles, 648
Unidades derivadas, 6
Unidades inglesas, 5

V

Vacío, 12
Válvula corrediza, flujo, 240
Variables repetidas, 243
Vector normal, 132
Vector normal unitario, 132
Velocidad
  álabe, 604
  carga hidráulica, 148
  coeficiente, 643
  componentes en flujo turbulento de tubo, 293
  curvas vs. caída de presión, 240
  de partícula de fluido, 92
  defecto, 347, 397
  diagrama vectorial, cangilón Pelton, 642
  dispositivos de medición, 666
  distribución, ejemplo, 155
  flujo laminar, 103
  gradientes, concepto, 16
  hélice, 171
  líquidos y gases, 665
  medición, 661-666
  métodos de área, 666
  perfil, 298-305, 388
    capa límite turbulenta, 398
    en flujo turbulento en tubo, 274
  potencial, 372
    ejercicios relativos a, 416-417
  tiempo
    flujo intermitente, 105
    flujo turbulento, 103
Velocidad adimensional vs. caída de presión adimensional, 241
Velocidad angular, 94-99
Velocidad de corte, 299, 397
Velocidad de deformación, 15
Velocidad de flujo másico, 138
Velocidad de prototipo, velocidad del viento en túnel de viento, 256-257
Velocidad de un fluido, medición, 661-666
Velocidad del aire en túnel de viento, velocidad del prototipo, 256-257
Velocidad del sonido, 427-431
  ejercicios relativos a, 37, 466-467
Velocidad específica, 626-628
Velocidad específica de succión, 627
Velocidad ficticia, 397
Velocimetría, 677-678
Velocimetría mediante imágenes de partículas (VIP), 675
  ilustrada, 679
Velocimetría por marcación molecular (VMM), 675, 678
  ilustrada, 680
Velocímetro de láser-doppler (VLD), 663-664
Velocímetro de láser-doppler de doble haz, 665
Velocímetro de luz pulsada, 677-678
  ilustrado, 678
Vertedero, 495
  de cresta afilada, 497
  rectangular de cresta afilada, 497
Vertedero de cresta afilada, 496
Vertedero de cresta ancha, 496
Vertedero en V, 497
Vertedero rectangular reducido, 497
Vibración, 363
Viscosidad, 15-18, 147, 205
  como función de temperatura, 804
  de aceite, 291
  ejercicios relativos a, 33-34
  segundo coeficiente, 216
Viscosidad cinemática, 297
  ejemplo, 551
Viscosidad cinética como función de la temperatura, 805
Viscosidad de remolinos, 297
Viscosímetro, 17
Volumen de control, 131
  área de entrada, 137
  derivada respecto al tiempo, 135
  ejemplo, 139-143
  sistema, 133
Volumen de control fijo
  ejemplo, 131
  sistema, 133

Volumen infinitesimal de control, 206
Volúmenes
  propiedades, 743
  vector unitario, 134
Voluta, 602, 635
Von Karman, Theodor, 359
Vórtice de salida, 370-371
Vórtice irrotacional, 379
Vorticidad, 94-99
  cambios, efectos viscosos, 220
  definición de, 95
  ecuación, 373
  ecuaciones, 219-222
  ejercicios relativos a, 416-417
  en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, 96

W

Weber, Moritz, 246
Weisbach, Julius, 278

Z

Zona crítica, 307
Zona de amortiguación, 299, 399
Zona de silencio, 430
Zona turbulenta, 397

Factores de conversión a unidades SI

Unidades inglesas	*SI*	*Símbolo en SI*	*Para convertir unidades inglesas a unidades SI multiplique por*	*Para convertir unidades SI a unidades inglesas multiplique por*
		Aceleración		
pie/segundo cuadrado	metro/segundo cuadrado	m/s^2	0.3048	3.281
		Área		
pulgada cuadrada	centímetro cuadrado	cm^2	6.452	0.1550
pie cuadrado	metro cuadrado	m^2	0.09290	10.76
acre	hectárea	ha	0.4047	2.471
		Densidad		
slug/pie cúbico	kilogramo/metro cúbico	kg/m^3	515.4	1.94×10^{-3}
		Gasto		
pie cúbico/segundo	metro cúbico/segundo	m^3/s	0.02832	35.32
pie cúbico/segundo	litro/segundo	L/s	28.32	0.03532
		Fuerza		
libra	newton	N	4.448	0.2248
kip (1000 lb)	newton	N	4448	
		Longitud		
pulgada	centímetro	cm	2.54	0.3937
pie	metro	m	0.3048	3.281
milla	kilómetro	km	1.6093	0.6214
		Masa		
libra masa	kilogramo	kg	0.4536	2.205
slug	kilogramo	kg	14.59	0.06854
		Potencia, rendimiento térmico		
caballo de potencia	kilowatt	kW	0.7457	1.341
pie-libra/segundo	watt	W	1.356	0.7376
Btu/hora	watt	W	0.2929	3.414

Factores de conversión a unidades SI (*continuación*)

Unidades inglesas	*SI*	*Símbolo en SI*	*Para convertir unidades inglesas a unidades SI multiplique por*	*Para convertir unidades SI a unidades inglesas multiplique por*
		Presión		
libra/pulgada cuadrada	kilopascal	kPa	6.895	0.1450
libra/pie cuadrado	kilopascal	kPa	0.04788	20.89
pies de H_2O	kilopascal	kPa	2.983	0.3352
pulgadas de Hg	kilopascal	kPa	3.374	0.2964
		Temperatura		
Fahrenheit	Celsius	°C	5/9(°F − 32)	9/5 × °C + 32
Fahrenheit	Kelvin	K	5/9(°F + 460)	9/5 × K − 460
		Par de torsión		
libra-pie	newton-metro	N · m	1.356	0.7376
libra-pulgada	newton-metro	N · m	0.1130	8.85
		Velocidad		
pie/segundo	metro/segundo	m/s	0.3048	3.281
milla/hora	metro/segundo	m/s	0.4470	2.237
milla/hora	kilómetro/hora	km/h	1.609	0.6215
		Viscosidad, viscosidad cinemática		
libras-s/pie cuadrado	newton-s/metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	47.88	0.02089
pie cuadrado/segundo	metro cuadrado/segundo	m^2/s	0.09290	10.76
		Volumen		
pulgada cúbica	centímetro cúbico	cm^3	16.387	0.06102
pie cúbico	metro cúbico	m^3	0.02832	35.32
galón	metro cúbico	m^3	0.003785	264.2
galón	litro	L	3.785	0.2642
		Trabajo, energía, calor		
pie-libra	joule	J	1.356	0.7376
Btu	kilojoule	kJ	1.054	0.9479
Btu	kilowatt-hora	kWh	0.000293	3413
termia	kilowatt-hora	kWh	29.3	0.03413

Propiedades del agua

Temperatura (°C)	*Densidad* ρ, (kg/m^3)	*Peso específico* γ, (N/m^3)	*Viscosidad* μ, (N · s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν, (m^2/s)	*Módulo de volumen* B, (Pa)	*Tensión superficial* σ, (N/m)	*Presión de vapor* (kPa)
0	999.9	9809	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	204×10^{7}	7.62×10^{-2}	0.610
5	1000.0	9810	1.519	1.519	206	7.54	0.872
10	999.7	9807	1.308	1.308	211	7.48	1.13
15	999.1	9801	1.140	1.141	214	7.41	1.60
20	998.2	9792	1.005	1.007	220	7.36	2.34
30	995.7	9768	0.801	0.804	223	7.18	4.24
40	992.2	9733	0.656	0.661	227	7.01	7.38
50	988.1	9693	0.549	0.556	230	6.82	12.3
60	983.2	9645	0.469	0.477	228	6.68	19.9
70	977.8	9592	0.406	0.415	225	6.50	31.2
80	971.8	9533	0.357	0.367	221	6.30	47.3
90	965.3	9470	0.317	0.328	216	6.12	70.1
100	958.4	9402	0.284×10^{-3}	0.296×10^{-6}	207×10^{7}	5.94×10^{-2}	101.3

Propiedades del aire a presión atmosférica

Temperatura T(°C)	*Densidad* ρ(kg/m^3)	*Viscosidad* μ(N · s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν(m^2/s)	*Velocidad del sonido* c(m/s)
−30	1.452	1.56×10^{-5}	1.08×10^{-5}	312
−20	1.394	1.61	1.16	319
−10	1.342	1.67	1.24	325
0	1.292	1.72	1.33	331
10	1.247	1.76	1.42	337
20	1.204	1.81	1.51	343
30	1.164	1.86	1.60	349
40	1.127	1.91	1.69	355
50	1.092	1.95	1.79	360
60	1.060	2.00	1.89	366
70	1.030	2.05	1.99	371
80	1.000	2.09	2.09	377
90	0.973	2.13	2.19	382
100	0.946	2.17	2.30	387
200	0.746	2.57	3.45	436
300	0.616	2.93×10^{-5}	4.75×10^{-5}	480

Propiedades del agua (sistema inglés)

Temperatura (°F)	*Densidad* (slugs/ft^3)	*Peso específico* (lb/ft^3)	*Viscosidad* (lb-s/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/s)	*Módulo de volumen* (lb/in^2)	*Presión de vapor* (lb/ft)	*Tensión superficial* (lb/in^2)
32	1.94	62.4	3.75×10^{-5}	1.93×10^{-5}	293,000	0.518×10^{-2}	0.089
40	1.94	62.4	3.23	1.66	294,000	0.514	0.12
50	1.94	62.4	2.74	1.41	305,000	0.509	0.178
60	1.94	62.4	2.36	1.22	311,000	0.504	0.256
70	1.94	62.4	2.05	1.06	320,000	0.500	0.340
80	1.93	62.1	1.80	0.93	322,000	0.492	0.507
90	1.93	62.1	1.60	0.826	323,000	0.486	0.698
100	1.93	62.1	1.42	0.739	327,000	0.480	0.949
120	1.92	61.8	1.17	0.609	333,000	0.465	1.69
140	1.91	61.5	0.98	0.514	330,000	0.454	2.89
160	1.90	61.1	0.84	0.442	326,000	0.441	4.74
180	1.88	60.5	0.73	0.385	318,000	0.426	7.51
200	1.87	60.2	0.64	0.341	308,000	0.412	11.53
212	1.86	59.8	0.59×10^{-5}	0.319×10^{-5}	300,000	0.404×10^{-2}	14.7

Propiedades del aire a presión atmosférica (sistema inglés)

Temperatura (°F)	*Densidad* (slugs/ft^3)	*Viscosidad* (lb-s/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/s)	*Velocidad del sonido* (ft/c)
−20	0.00280	3.34×10^{-7}	11.9×10^{-5}	1028
0	0.00268	3.38	12.6	1051
20	0.00257	3.50	13.6	1074
40	0.00247	3.62	14.6	1096
60	0.00237	3.74	15.8	1117
68	0.00233	3.81	16.0	1125
80	0.00228	3.85	16.9	1138
100	0.00220	3.96	18.0	1159
120	0.00213	4.07	18.9	1180
160	0.00199	4.23	21.3	1220
200	0.00187	4.50	24.1	1258
300	0.00162	4.98	30.7	1348
400	0.00144	5.26	36.7	1431
1000	0.000844	7.87×10^{-7}	93.2×10^{-5}	1839

MECÁNICA DE FLUIDOS presenta la mecánica de fluidos de una manera que ayuda a los estudiantes a alcanzar la comprensión y la capacidad de analizar los fenómenos importantes que encuentran los ingenieros en ejercicio. Los autores logran esto a través del uso de varias herramientas pedagógicas que ayudan a los estudiantes a visualizar las dificultades para entender los fenómenos de la mecánica de fluidos. Las explicaciones se basan en conceptos físicos básicos, así como en matemáticas, que son accesibles a los estudiantes de ingeniería. Esta cuarta edición incluye apoyos en línea (en inglés) disponibles en http://latam.cengage.com/potter que aprovecha la interactividad multimedia para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la mecánica de fluidos mediante la ilustración de los fenómenos fundamentales y los fascinantes flujos de fluidos.

Características principales:

- El material introductorio (capítulos 1-9) ha sido cuidadosamente seleccionado para introducir a los estudiantes a todas las áreas fundamentales de la mecánica de fluidos.
- Los conceptos importantes están ilustrados con ejemplos detallados y resueltos.
- Numerosos problemas de tarea, muchos con múltiples partes, proporcionan al estudiante una amplia oportunidad de adquirir experiencia para resolver problemas de varios niveles de dificultad.
- En varios capítulos se incluyen problemas de tipo de diseño.
- Se incluyen problemas tipo de examen en los capítulos correspondientes, señalados por el uso de un icono examen.
- El libro está escrito haciendo hincapié en las unidades del SI, sin embargo, todas las propiedades y constantes dimensionales también se dan en unidades inglesas.
- Las matemáticas avanzadas, como cálculo vectorial y tensorial y soluciones a las ecuaciones en derivadas parciales, se mantienen al mínimo para que los estudiantes sean más capaces de seguir la transformación de conceptos en expresiones matemáticas.

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607-519-459-2
ISBN-10: 607-519-459-2

9 786075 194592